Math. Un.

65m — 2

Johann Friedrich Häseler,

Hochfürstl. Braunschweig-Lüneburgische Abt des Klosters Amelunxborn, Consistorialrath und Generalsuperintendent des Weserdistrikts, und erster Prediger zu Holzminden, der Königl. Societät der Wissenschaften in Göttingen und der Alterthümer in Cassel correspondirendes Mitglied.

Anfangsgründe

der

Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie

zum eignen Unterricht

vorzüglich für

Hauslehrer und Gelehrte

welche diese Wissenschaft nicht zur Hauptbeschäftigung machen.

Zweyter Theil.

Mit Kupfern.

Zweyte verbesserte und vermehrte Auflage.

Lemgo,

im Verlage der Meyerschen Buchhandlung, 1794.

Dem

durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

HERRN

Ferdinand

Herzogen zu Braunschweig und Lü
Feld-Marschall, Dohmdechant de
Magdeburg, auch Probst der
Stifter St. Sebastiani und
Ritter des blauen Hosenban
und Johan

Gnädigsten

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

HERRN

Ferdinand

Herzogen zu Braunschweig und Lüneburg, General-Feld-Marschall, Dohmdechant des hohen Stifts zu Magdeburg, auch Probst der beyden Collegiat-Stifter St. Sebastiani und Petri Pauli daselbst, Ritter des blauen Hosenbandes, schwarzen Adlers, und Johanniter-Ordens.

Seinem

Gnädigsten Herzog und Herrn

widmet dieses Buch

ehrerbietigst und unterthänigst

der Verfasser.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Ich war anfangs nicht gewillet, zu diesem zweyten Theile meiner reinen Mathematik zum eignen Unterricht eine Vorrede zu schreiben. Ich habe aber bey genauerer Ueberlegung gefunden, daß sie nicht ganz unnöthig seyn würde. Ich habe das Glück gehabt,

den ersten Theil dieser Schrift nicht ganz ohne Beyfall zu sehen, und ich freue mich ungemein, wenn ich auch nur etwas zur Ausbreitung einer so nöthigen und nützlichen Wissenschaft, als die Mathematik ist, beygetragen, und Anfängern hin und wieder einen Stein aus ihrem Wege geräumet habe. Einige meiner Freunde haben mir wol gesaget, daß ich hin und wieder zu weitläuftig gewesen wäre. Etwas mag das wol wahr seyn. Aber es waren doch auch alle Mathematiker, die mir dieses sagten, und was denen zu weitläuftig schien, ist es nicht allezeit dem Anfänger, der an manchen Orten Schwierigkeiten findet, wo jener glaubet, daß keine anzutreffen sind. Für Anfänger habe ich eigentlich geschrieben, und so viel ich deren gesprochen habe, so sind sie alle mit dieser Weitläuftigkeit sehr zufrieden gewesen.

Ich habe in diesem zweyten Theile die Geometrie und Trigonometrie abgehan-

gehandelt. Ich habe wichtige Ursachen gehabt, mein Buch nach der Einrichtung zu verfertigen, welche man darin finden wird, und man wird diese Ursachen leicht einsehen, wenn man dasselbe durchsehen will.

Ich bin nicht abgeneigt, den dritten Theil dazu auszuarbeiten. Dieser soll die sphärische Trigonometrie, und die Kegelschnitte enthalten. Alles aber nach der Absicht, welche ich auf dem Titelblatte angezeiget habe.

Ich habe diesem zweyten Theile das Verzeichniß der vornehmsten Druckfehler des ersten Theils angehänget. In solchem Buche sollten gar keine Druckfehler seyn, und man hätte auch wirklich wenig darin finden sollen, wenn ich selbst die Correktur hätte besorgen können. Aber ich bekam das Buch nicht eher zu sehen, bis es ganz fertig war. Bey Kennern, die auswärts ihres Wohnorts je etwas

haben drucken lassen, wird mich dieses sattsam entschuldigen. Ich habe nur die Rechnungsdruckfehler angezeiget; das ist bey einem solchen Buche das wichtigste, die Sprachdruckfehler wird auch jeder Anfänger selbst ändern können.

Holzminden im December 1776.

Die
Elementar-Geometrie.

Das erste Kapitel.

Einige allgemeine Betrachtungen über die Geometrie.

§. 1.

Wir haben bis daher in der Arithmetik die Größe allgemein, ohne körperliche Ausdehnung betrachtet; wir fangen an, ihre Eigenschaften zu untersuchen, welche sie hat, wenn man sie auf Linien, Flächen, Körper anwendet.

Diese Wissenschaft der Größen, wenn man auf die Lage, Ordnung und Verbindung ihrer Theile siehet, heißet die Geometrie. Wenn man nach den Buchstaben dieses Wort, welches

aus dem Griechischen herkömmt, übersetzet, so würde es **Erdmessung** heißen; und weil die Bedürfnisse der Menschen sie im Anfange auf die ersten Gründe, oder vielmehr auf die erste Ausübung dieser Wissenschaft brachten, mag sie sich auch wol mit Messung und Theilung der Aecker zuerst beschäftiget haben. Allein ihr Umfang ist unendlich größer, und sie misset Himmel, Erde, Körper aus, alles, wozu sich ein Maasstab angeben, oder das sich mit einer bekannten Größe vergleichen läßt. Wenn man nur gerade Linien und Flächen, und bey den krummen (wir werden bald erklären, was das sey) nur die Cirkellinie, nebst den Figuren, Flächen und Körpern, die daraus entspringen, oder darauf sich obige Dinge anwenden lassen und beziehen, betrachtet, so redet man von der **Elementar-Geometrie**, und davon reden wir jetzt. Euclides, ein Lehrer der Mathematik zu Alexandrien, schrieb drey hundert Jahr vor Christi Geburt ein Buch, welches die Grundsätze oder Elemente der Geometrie vortrug, ein Buch, welches sich schon über zwey tausend Jahr in seinem Werthe erhalten hat, und bis ans Ende der Welt in seinem Werthe erhalten wird, und nach diesen Elementen der Geometrie hat die Elementar-Geometrie ihren Namen erhalten. Wir werden in dieser Schrift, nach unserer Absicht, nur die ersten und vornehmsten Grundsätze dieser Wissenschaft abhandeln, worauf unsere Leser, wenn sie wollen, durch Lesung anderer Schriften weiter fortbauen mögen.

§. 2.

§. 2. Es sind Körper da, die sehen wir allenthalben, diese haben auch eine gewisse Ausdehnung oder Größe, oder nehmen einen gewissen Platz oder Raum ein. Die größern nehmen mehr Raum ein, und die kleinern weniger. Alles dieses sind sinnliche Begriffe, die einem jeden bekannt sind, und worüber wir keine Erklärung geben dürfen, und auch nicht einmal geben können. Wenigstens haben wir von dem Raum gewiß keine andere als blos sinnliche Begriffe, und wir haben hier auch keine andere nöthig, selbst der Raum oder der leere Platz hat eine Ausdehnung, und kann auf gewisse Art als ein Körper betrachtet werden. Wenn man sich ein Zimmer vorstellet, darinn nichts befindlich ist, (wir wollen auch sogar die Luft einmal weggedenken,) so läßt sich das als ein leerer Raum ansehen, und das kann doch als ein Körper betrachtet werden, der von der Erde bis an den Balken eine Höhe, von der einen Wand bis zur andern gegen über eine Länge, und von der einen Wand bis zur andern eine Breite hat; dieser Raum behält doch immer Gestalt und Größe, und mehr Eigenschaften der Körper betrachtet die Geometrie nicht. Man stellet sich dabey auch in der Geometrie vor, daß die Körper, die man betrachtet, so an einander hängen, daß, wo ein Theilchen desselben aufhöret, sogleich ohne Zwischenraum das andere anhänget, man nennet dieses das Continuum oder **eine sterige Größe**, das ist nun freylich in der Natur nicht so richtig, denn so viel uns jetzt die Körper bekannt sind, so

haben sie alle Zwischenräumchens oder Poros, wenn sie auch erstaunend fein sind. Allein darum bekümmert sich der Geometer nicht, wenn er Körper ausmisset, oder mit andern vergleichet. Wenn man z. E. einen Würfel von Holz ausmäße, so bekümmert man sich um die Poros des Holzes nicht, sondern man würde sagen, das ist eins, zwey u. s. w. Cubikfuß, ohne daran zu gedenken, daß man für die Poros etwas abrechnen müßte. Man nimmt auch in der Geometrie eine Theilung ohne Ende an, so daß sich eine Sache beständig bis ins Unendliche fort theilen lasse. Das ist vielleicht im physikalischen Verstande auch nicht richtig, weil auch die kleinsten Körperchen, woraus ein Ding zusammengesetzt ist, Eigenschaften haben können, welche das verhindern können; allein es läßt sich allerdings doch gedenken, ob wir uns schon unendlich kleine Theile gar nicht vorzustellen im Stande sind.

§. 3. Ein jeder Körper höret doch wo auf, z. E. ein Stück Holz, ein Stein, und alle Körper sind doch von allen Seiten von andern Körpern abgesondert, hören auf, oder haben **Gränzen**, die sie von allen Seiten umgeben, und diese Gränzen heißen die **Oberfläche** der Körper. Man kann sich diese Oberfläche überhaupt zusammen, oder auch einzelne Theile derselben vorstellen. Z. E. wenn man einen Würfel betrachtet, der hat sechs Seiten, nun kann man ja jede Seite des Würfels ansehen; wenn man sich solche einzelne

Theile

Theile der Oberfläche, z. E. eine Seite eines Würfels vorstellet, so findet man, daß die doch wieder **Gränzen** habe, wo sie aufhöret, und die Gränzen der Oberfläche nennet man **geometrische Linien.** Da ein solcher Theil der Oberfläche nach allen Seiten hin ein Ende oder Gränzen hat, so muß er also nach allen Seiten hin von **Linien** eingeschlossen seyn. So hat z. E. die Oberfläche einer Seite des Würfels nach vier Seiten hin **Gränzen**, und sie ist daher in vier Linien eingeschlossen. Aber auch die Linie hat ein Ende und eine **Gränze**, sowol wo sie anfängt als aufhöret, und diese ihre Gränze heißt ein **geometrischer Punkt**, oder schlechthin ein **Punkt.**

§. 4. Wenn wir die Oberfläche eines Körpers betrachten, so können wir aus dem Begriffe, daß es die Gränze sey, wo der Körper aufhöret, schon schließen, daß sie also selbst nichts Körperliches mehr sey, denn es ist die Gränze des Körpers, sie hat also zwar eine Ausdehnung in der Breite und Länge, aber keine Dicke. (Der gemeine Sprachgebrauch lehret schon, was ich hier unter Breite, Länge und Dicke verstehe, ob man schon sonst im mathematischen Verstande überhaupt nur die Länge betrachten darf, die, nachdem ihre Richtung geht, bald mit dem Namen der **Länge**, bald **Breite**, und zwar an eben dem Körper belegt wird.) So hat z. E. die Oberfläche eines Tisches zwar ein ausgedehntes Wesen der Länge und Breite nach, aber keine **Dicke**, denn hätte

sie

sie die noch, so wäre sie nicht die Gränze des Körpers, des Tisches, sondern noch wirklich ein Theil des Tisches oder selbst noch Körper. Man mag sich also so viel Oberflächen, als man will, über einander gelegt gedenken, so machen die doch nie einen Körper aus, weil aus noch so vielen Dingen, die nichts Körperliches an sich haben, auch nichts Körperliches entstehen kann.

Die Gränze der Oberfläche war die **geometrische Linie**, diese hat also aus eben dem Begriffe der Gränze zwar eine Ausdehnung der **Länge** nach, aber keine **Breite** und keine **Dicke**. **Dicke** konnte sie nicht haben, weil sie die Gränze der Oberfläche ist, die auch keine Dicke hat; und Breite kann sie auch nicht haben, weil sie sonst schon wirklich Oberfläche wäre, die Breite möchte auch so schmal seyn, wie sie wollte. Sie soll nur die Gränze der Oberfläche seyn. Man siehet hieraus, daß man wirklich durch kein Werkzeug, es sey so fein als es wolle, eine geometrische Linie ziehen und beschreiben könne. Denn diese wird noch immer Breite haben. Selbst ein Lichtstrahl, den man doch 6000 Billionen mal feiner als ein Menschenhaar gedenken kann, ist im strengen Verstande noch keine geometrische Linie, denn wenn man 6000 Billionen Lichtstrahlen an einander legte, so hätte man schon die Breite und Dicke eines Menschenhaars, welches schon ein sehr in die Sinne fallender Körper ist. Man mag daher so viel geometrische Linien an einander legen, als man will, so bekömmt man doch keine

Fläche.

Fläche. Und weil eine Fläche an unendlich vielen Orten aufhören kann, so lassen sich unendlich viele Gränzen und unendlich viele Linien davon gedenken.

Die Gränze der Linie, wo sie anfieng und aufhörte, war der **geometrische Punkt** Eben aus dem Begriffe der Gränze folget es auch, daß der Punkt keine **Dicke**, keine **Breite** und auch keine **Länge** haben könne. Dicke und Breite kann er nicht haben, denn er war die Gränze der Linie, die selbst keine Dicke und Breite hat. Und **Länge** kann er auch nicht haben, denn man mag die so klein annehmen, als man will, so wird es schon Linie, und nicht Gränze der Linie, welches doch der **Punkt** seyn sollte. Ein Punkt hat also weder Ausdehnung noch Theile, und wenn man auch noch so viele Punkte an einander gedenket, als man will, so entstehet doch dadurch keine Linie, weil eine Linie anfangen und aufhören kann, wenn nicht nach gewissen Bestimmungen schon ihre Länge festgesetzt ist, wo man will. So giebts also an allen Orten in der Linie und also an unendlich vielen Orten Gränzen, und folglich an allen Orten in derselben Punkte, ob sie schon selbst nicht aus Punkten bestehet. Man kann daher überall in der ganzen Linie sich unendlich viele Punkte vorstellen. Und da ein Punkt keine Breite, keine Länge und keine Dicke hat, und ein jeder anderer Punkt eben so beschaffen ist, und also ein Punkt von dem andern würklich in nichts unterschieden ist, so könnte man auch wol sagen, daß eine Linie, oder viel-

mehr der Weg einer Linie, entstünde, wenn sich ein Punkt von einem Orte nach dem andern hinbewegte. Hieraus folgte aber nicht, daß also die ganze Linie aus Punkten zusammengesetzet wäre.

§. 5. Wenn man sich vorstellet, daß sich ein Punkt beständig nach einerley Richtung hinbe-
Fig. 1. weget, so entstehet daraus der Weg der **geraden Linie.** Dieses ist nun freylich noch keine Erklärung der geraden Linie, allein diese gehöret auch zu den sinnlichen Begriffen, von denen man keine Erklärung geben kann, eben so wenig wie man es von den Farben im Stande ist. Es ist aber auch nicht einmal nöthig, weil ohnedem ein jeder von Jugend an schon den Begrif von gerade und krümm
Fig. 1. hat. So soll z. E. die Linie AB Fig. 1 eine grade Linie vorstellen, alle Theile dieser Linie liegen von A nach B hin. Es würde unnütze seyn, zu beschreiben, wie man sie durch Hülfe eines Lineals, mit der Bleyfeder, Reisfeder ꝛc. ziehet, ein jeder weis dieses. Eine solche Linie, die man also ziehet, stellet nun freylich lange keine mathematische Linie vor, allein in der Ausübung kömmt es öfters so genau nicht darauf an, wenn sie schon nicht sehr fein ist. Es können Fälle vorkommen, wo man mit ziemlich groben Linien zufrieden seyn kann. Doch das gehört hier eigentlich nicht her. **Man kann zwischen jeden zwey Punkten, sie mögen gegen einander stehen wie sie wollen, eine gerade Linie ziehen,** wenn nichts im Wege ist, wenigstens wird man es doch in Gedan-

danken thun können, wenn in der Ausübung auch Verhinderungen sich befänden. Man stelle außer A oder B, nach welcher Gegend man wolle, Fig. 1. Punkte, so wird man gleich einsehen, daß sich allerwärts dahin aus A oder B gerade Linien ziehen lassen, es versteht sich, daß diese Punkte in der Richtung AB liegen müssen, wenn die grade Linie in der Richtung AB fortgehen soll. Dieser Satz ist für sich klar, und bedarf keines Beweises. Gleichfalls ist es auch für sich klar, daß **die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zweyen gegebenen Punkten ist.** Denn man erwähle z. E. Fig. 2 von A nach B welchen Fig. 1. Weg man wolle, so muß er doch allezeit, wie der Augenschein lehrt, länger als die gerade Linie AB seyn; denn er wird doch entweder, wie hier der Weg ACB, eine Krümme, oder auch wie ADB Absätze haben, und wenn man die gerade Linie AB so biegen wollte, so siehet man gleich, daß sie nicht von A nach B reichen kann, sondern daß man noch etwas daran setzen müßte. Die Entfernung zweyer Dinge von einander ist also eine gerade Linie. **Man kann auch daher zwischen zweyen gegebenen Punkten nur eine gerade Linie ziehen.** Denn wären mehrere dazwischen möglich, so würden die doch eine jede eine andere Richtung haben, und sie müßten doch alle, weil es gerade Linien seyn sollen, sich auf dem **kürzesten** Wege zwischen diesen zweyen Punkten befinden, das aber ist ein Widerspruch, also, folglich unmöglich, und folglich läßt sich auch nur eine gerade

Linie zwischen zween Punkten ziehen. Will man also mehrere dazwischen ziehen, so müssen die also alle auf einander zu liegen kommen, und sich einander bedecken. Daß eine gerade Linie AB Fig. 1. Fig. 1 immer verlängert werden kann, und in eben der Richtung von A nach B, von da nach F und so immer weiter fortgehen kann, leuchtet schon aus der Natur der geraden Linie hervor. Es können Ursachen seyn, die mich, wenn ich sie ziehe, aufzuhören befehlen, allein in Gedanken kann ich sie mir doch bis ins Unendliche hin vorstellen, und alle ihre Theile gehen denn nach der Richtung AB fort. Fig. 1. Denn ließe man ihre Richtung sich ändern, und sie z. E. Fig. 3, wenn sie bis AB Fig. 3. gegangen wäre, sich von B nach C wenden, und wenn es auch nun von B nach C, auch eine gerade Linie wäre, so wäre doch ABC keine gerade Linie mehr, sondern es wären zwey gerade Linien, die bey B zusammengesetzt wären.

Eine gerade Linie, die also in ihrer Richtung AB immer fortgehet, kömmt also niemals in ihren Anfangsort wieder hin, oder nähert sich demselben, sondern entfernet sich immer weiter von ihm, eben so kann man sie auch Fig. 1 rückwärts sie verlängern von A nach D, wenn sie nur in der Richtung AB fortgehet, und wenn ich die rückwärts nach D verlängerte Linie, in Ansehung der nach B hingezogenen betrachtete, und die von A nach B positiv nennete, so wäre die von A nach D der andern entgegen gesetzt, und könnte als negativ betrachtet werden, wie wir davon schon in der Arithmetik

gere-

geredet haben. Da zwey gegebene Punkte in einer geraden Linie mir zeigen, nach welchem Wege sie hingehet, so wird auch durch zwey gegebene Punkte, sie mögen nahe oder ferne bey einander seyn, ihre Richtung bestimmet, denn sie mag noch so lang außer diesen beyden Punkten seyn, so gehet sie doch in der Richtung fort, sonst wäre es keine gerade Linie. Stehen diese beyden Punkte an ihrem Anfang und Ende, so wird nebst ihrer Richtung auch ihre Länge dadurch bestimmet, sonsten nicht, und müßte alsdenn ihre Länge noch durch den dritten oder auch vierten an den Enden gegebenen Punkten bestimmt werden. Z. E. Fig. 1 durch die beyden gegebenen Punkte DA wird allerdings die Richtung der geraden Linie DAF bestimmet, aber durch die Entfernung der beyden Punkte DF ihre Länge. Fig. 1.

Wenn man Fig. 4 aus einem Punkte A nach verschiedenen Richtungen zwo gerade Linien als AB und AC zöge, so entfernen sich diese beyden Linien, oder die Punkte, von welchen man sich vorstellen kann, daß sie die geraden Linien beschreiben werden, immer weiter auf ihrem Wege von einander, weil jedes seine Richtung von dem andern verschieden ist, die Linien selbst werden sich also auch immer weiter von einander entfernen. Hingegen wenn zwey Punkte in D und E sich beyde nach einem dritten Punkte in A hinbewegen, so werden sie in A zusammen kommen, und daraus zwo Linien enestehen, die in A sich einander durchs- Fig. 4.

durchschneiden, und alsdenn weiter nach B und C fortgehen. Man siehet hieraus, daß zwey grade Linien wol einen Punkt mit einander gemein haben, und sich an einem Orte durchschneiden können, aber mehr als einen Punkt können sie nicht mit einander gemein haben, denn hätten sie nur zwey Punkte mit einander gemein, so würden sie, wie wir schon in diesem Paragraphen gesagt haben, in einander fallen, und nur eine Linie ausmachen, weil sie alsdenn einerley Richtung hätten.

§. 6. Man kann gerade Linien mit andern geraden Linien vergleichen, und sehen, wie vielmal eine gerade Linie in einer andern enthalten sey, denn gerade Linien sind von einander in nichts unterschieden, als in ihrer Länge. Man darf nur eine gewisse Länge einer andern geraden Linie zum Maaße oder zur Einheit annehmen, und alsdenn bemerken, wie vielmal die in der Linie, die man mit ihr vergleichen oder messen will, enthalten sey. Man kann diese auf dem Papiere durch Hülfe des geöfneten Cirkels, und wenn man große Linien auf dem Felde misset, durch Hülfe einer Kette, Stangen, Seils ꝛc. thun, worauf die Länge, die man zur Einheit annimmt, befindlich ist. Eigentlich reden wir nun hier von solchen Beschäftigungen nicht, sondern berühren sie nur. Im gemeinen Leben hat man dazu ein Maas erwählet, welches man eine Ruthe nennet und also schreibet 1°. Dieses Maas hat man wieder an vielen

Or-

Orten in 16 gleiche Theile getheilet, die man Füße nennet, und also schreibet ı'. Den Fuß hat man in 12 Theile getheilet, welche man Zolle nennet, und man schreibet einen Zoll also ı''; den Zoll in 12 **Linien**, und man schreibet eine Linie also ı''', und man kann dieses noch weiter fortsetzen, und die Linie abermals in 12 Theile theilen, welchen einen Theil davon man schreiben würde ı''''. Allein der Geometer wählet lieber Decimalmaas, das heißt, er theilet die Ruthe in 10 Theile, die er Füße nenner, den Fuß wieder in 10 Zolle, den Zoll in 10 Linien, und die Linie wieder in 10 Scrupel, welches letztere schon eine ungemein kleine Größe ist. Diese Maaßen sind nun an den mehrsten Orten sehr verschieden, und nachstehende Tabelle zeiget die Verschiedenheit der Füße verschiedener Oerter an, die wir mit dem Pariser Fuß, wenn wir ihn in 1000 Theile theilen, verglichen haben, und daraus man sehen wird, wie viel von solchen Theilchen, als der Pariser Fuß 1000 hat, ein anderer angezeigter Fuß habe Wir bemerken noch vorher, daß der Geometer darum das Decimalmaas gewählet hat, weil es ihm im Multipliciren und Dividiren viele Bequemlichkeiten machet. Er darf beym Multipliciren nur, wenn er eine gegebene Anzahl Ruthen, Füße und Zolle zur kleinsten Benennung bringen will, sie an einander setzen, und ihnen die kleinste Benennung geben; und will er eine gegebene kleinere Benennung zur größern machen, so darf er nur für jede kleinere Benennung

eine Zahl von rückwärts abstreichen, und ihr den Namen der kleinern Benennung geben, weil das durch 10 dividiren heißt, so wie das erstere durch 10 multipliciren war. Z. E. man will 54 Ruthen 9 Fuß 6 Zoll zu Zoll machen, das wäre 5496 Zoll. Man hätte 64549 Linien, und wollte wissen, wie viel das Linien, Zoll, Fuß und Ruthen wären, das wäre für jedes eine Zahl von rückwärts abgestrichen, und das überbliebene für die Ruthen gelassen 64, 5, 4, 9; 64 Ruthen 5 Fuß 4 Zoll 9 Linien, oder $64^{\circ}\ 5'\ 4''\ 9'''$ man wird dieses durch die Division auch also finden. Nun folget die Tabelle von einigen der vornehmsten Maaßen.

Wenn der Pariser königliche Fuß in 1000 Theile getheilet wird, so hat von solchen Theilchen:

Der Amsterdammer	873, 666...
Der Braunschweigische	876
Der Calenbergische	900
Der Dänische	974, 583...
Der londner	937, 5
Der Rheinländische	966, 111...
Der Schwedische	917, 888
Der Venedische	1070.

Man kann hieraus leicht durch die Proportionsregel auch das Decimalmaas mit dem Duodecimalmaaße, das ist, wo allezeit die Einheit bey dem Maas in 12 Theile getheilet ist, vergleichen. Hier hat man vorzüglich den Pariser, londner und Rheinländischen Fuß zu bemerken, weil die oft in den physikalischen und mathematischen Rechnungen vorkommen, da man denn auch zugleich bemer-

merken mag, daß 6 Pariser Fuß eine toise ausmachen, von welchem Maaße in den Schriften der Franzosen oft geredet wird.

§. 7. Eine **krumme Linie** ist solche, wovon kein Theil gerade ist, oder wenn wir uns die Erzeugung der Linie durch die Bewegung eines Punktes vorstellen wollen, wo der Punkt kein einziges Moment in einer Richtung fortgehet, sondern alle Augenblicke eine neue Richtung erhält. Dieser krummen Linien sind nun unendlich viele; reguläre, wo der sich bewegende Punkt beständig nach einerley Gesetzen alle Augenblicke seine Richtung ändert, wie z. E. die Cirkellinie, eine andere Linie, welche man die **Ellypse** nennet u. s. w. ist, oder auch irreguläre, wo der sich bewegende Punkt nicht nach solchen einerley Gesetzen gehet. Z. E. Fig. 5 AB ist eine solche krumme Linie, die nach keinem gewissen Gesetze bestimmet ist, deren es, wie man leicht einsiehet, unendlich viele geben kann; wenn man auch in A und B zwey Punkte annehmen wollte, wo endlich der sich aus A bewegende Punkt nach B hinkommen sollte. Wenn man von einem Orte nach dem andern gehet, kann man durch unendlich vielerley Arten von krummen Wegen dahin kommen, ob es schon nur einen geraden Weg dahin giebet. In der Elementar-Geometrie betrachtet man, außer den geraden Linien, nur eine krumme Linie, nemlich den **Cirkel**, von dem wir weiter unten noch genug werden zu reden haben. Die andern regulären Fig. 5.

krummen Linien gehören in die höhere Geometrie. Man wird ohne unser Erinnern und ohne Zeichnung sich auch leicht vorstellen können, daß es Linien geben kann und giebt, die aus geraden und krummen Linien vermischt sind. Man wird auch wol bemerken, daß man mehr gerade Linien, die aber nach verschiedenen Richtungen gehen, an einander setzen kann, und daß man die nicht als krumme Linien, sondern als verschiedene gerade Linien betrachten müsse.

§. 8. So wie es gerade und krumme Linien giebt, so giebt es auch gerade und krumme Oberflächen der Körper. Man hat auch hievon schon einige sinnliche Begriffe. Z. E. die Oberfläche eines Tisches, eines gewöhnlichen Spiegels, siehet man als eine gerade Oberfläche an, und die Oberfläche einer Kugel, eines Eyes u. s. w. hält jeder für eine krumme Oberfläche. Eine gerade Oberfläche, welche man eine ebene Fläche oder mit einem allgemeinen Namen eine Ebene nennet, ist eine solche, auf welcher man nach allen Punkten, die man darauf annimmt, sie mögen seyn wo sie wollen, gerade Linien ziehen kann, so daß alle Punkte dieser Linie in die Oberfläche zu liegen kommen. Man nehme, um sich dieses sinnlich zu machen, einen Spiegel, einen schlichtgehobelten Tisch, ein gerade ausgespanntes Blatt Papier. Diese Dinge können so ohngefähr eine Ebene vorstellen, im strengen mathematischen Verstande sind sie es nicht, weil sie gewiß noch Erhöhun-

höhungen und Vertiefungen haben, ob sie schon unserm Auge unmerklich sind und überhaupt kann kein menschlicher Fleiß eine im strengen Verstande vollkommene **Ebene** verfertigen. Man nehme diese Dinge, und nehme Punkte darauf an, wie und wo man will, so lassen sich von einem zum andern gerade Linien ziehen, deren Punkte alle in dieser Fläche zu liegen kommen. Das gehet auf einer krummen Fläche nicht an, und daher ist das entgegengesetzte einer ebnen Fläche eine krumme Fläche. Es läßt sich auf selbiger kein Theil, der **eben** wäre, angeben. Ein zusammengerolltes Blatt Papier Fig. 6 kann uns z. E. eine krumme Fläche vorstellen. Zwar ließe sich wol von A nach B in diesem Exempel eine gerade Linie ziehen, aber unsere Erklärung ist doch richtig, denn es wäre nur **eine** mathematische Linie, aber man mag nun da herum Punkte legen, sie mögen der Linie AB so nahe seyn als sie wollen, so wird man doch von keinem Punkte, die man in der Linie AB annähme, dahin eine gerade Linie ziehen können, und bey sehr vielen krummen Flächen gehet es auch nicht einmal an, daß sich eine solche gerade Linie darauf ziehen lässet, wie z. E. es auf der Kugel nicht angeht. Fig. 6.

Wie eine **Ebene** begränzet sey, ob sie in geraden oder mit krummen Linien eingeschlossen sey, verändert an den Eigenschaften der Ebene selbst nichts. Man mag einem Spiegel einen runden oder viereckichten Rahmen geben, der Spiegel selbst bleibt eine Ebene. Daß es aber auch Flächen giebt, welche aus

ebnen und krummen Flächen zusammen gesetzt sind, weiß jedweder, und hat jedweder ohne Zweifel vielmal gesehen. Wir werden im Anfange der Geometrie alle Punkte und Linien, die wir betrachten wollen, uns auch so vorstellen, als ob sie alle in einer Ebene liegen, und solche Betrachtungen sind der Gegenstand des Theils der Geometrie, welche man die **ebene Geometrie** (Geometria plana) nennet.

§. 9. Wir haben im 5ten Paragraphen umständlich genug von der geraden Linie gehandelt, wir wollen nun einmal zwey oder mehrere neben einander legen, und einige ihrer ersteren daher fließenden Eigenschaften bemerken. Wir wollen in einer Ebene zwey oder mehrere gerade Linien legen, die immer weiter fortgehen, aber immer gleich weit von einander bleiben sollen, wie z. E. Fig. 7. die Linien AB, CD, FE seyn sollen; solche Linien nennet man **gleichlaufende** oder Parallellinien. Nach dem Begrif, den wir davon geben, müssen sie sich weder an den einen noch andern Enden erreichen, sondern wenn sie auch noch so weit fortgezogen würden, immer sogleich weit an allen ihren Theilen aus einander bleiben, wie sie im Anfange waren. Gehen aber solche gerade Linien nach einer oder der andern Seite zusammen, und erreichen sie sich endlich, so werden sie, nachdem man sie betrachtet, **convergirende** oder zusammengehende; oder **divergirende**, aus einander fahrende Linien genennet. Wenn

Fig. 7.

man

man die Linien Fig. 8 von B nach A und von D nach C. hin betrachtet, so convergiren sie, und müssen sich einst irgendwo erreichen und schneiden. Betrachtet man sie von A nach B und von C nach D, so divergiren sie oder fahren immer weiter aus einander, §. 5. Fig. 8

§. 10. Es mögen einmal zwey gerade Linien so gegen einander gelegt seyn, daß sie endlich in einem Punkte zusammen kommen und einander erreichen, wie z. E. Fig. 9 die Linie AB und AC. Die Neigung zweyer solcher geraden Linien gegen einander, welche in einer Ebene liegen, nennet man einen **ebenen Winkel.** Man nennet die geraden Linien AB und AC, die eine Neigung gegen einander haben, die **Schenkel des Winkels**, den Ort, wo sie zusammen kommen oder sich schneiden, hier in A, den **Scheitel** des Winkels; und weil die Schenkel des Winkels gerade Linien sind, einen **geradlinichten Winkel,** zum Unterschiede **krummlinichter,** wovon wir aber hier in diesem Buche nicht reden. Will man nun solchen Winkel bezeichnen, so setzet man allezeit den Buchstaben, der an dem Scheitel stehet, in die Mitte, und zwischen die Buchstaben, die an den Enden der Schenkel stehen. Man würde diesen Winkel den Winkel BAC oder CAB nennen, oder man benennt ihn auch nur blos, wenn es keinen Mißverstand geben kann, mit dem Buchstaben, der an seinem Scheitel stehet, als hier der Winkel A, oder man setzet auch wol einen Fig. 9.

nen kleinen Buchstaben hinein, und nennet ihn darnach, als hier der Winkel n. Man muß diese Art der Benennung wohl in Acht nehmen, um nicht in Verwirrung zu gerathen, wenn mehrere gerade Linien Winkel mit einander machen, z. E.
Fig. 10. Fig. 10. Da sind drey Winkel, nemlich der Winkel EAB, der Winkel ABC, und der Winkel BCD, oder der Winkel in A, in B und C, oder auch der Winkel x, y, z.

§. 11. Man siehet es von selbst leicht ein, daß zwey gerade Linien an einander auf unendlich verschiedene Arten gelegt werden können. Wir wollen sie erst so an einander legen, daß die Linie
Fig. 11. AB auf der andern CD Fig. 11 also stehet, daß sie sich nicht nach der Seite BC mehr lenket, als nach der Seite BD. So sagt man, die Linie AB stehe auf der Linie CD senkrecht, lothrecht oder perpendikulär, oder AB wird ein Perpendikul auf CD genennet. Der Winkel ABD oder ABC, welchen alsdenn die beyden Linien mit einander machen, heißt ein rechter Winkel (angulus rectus). Man schreibet ihn oft der Kürze halber blos mit dem Buchstaben R, so ist ABD = ABC = R, oder wenn man einen Winkel allein gebrauchet, Winkel ABD = R.

Fig. 11. §. 12. Läßt man Fig. 11 die Linie AB sich mehr nach der Seite BD oder BC Fig. 11 neigen, so heißt Fig. 12 der Winkel ABD ein spitzer Winkel. Man siehet, daß er kleiner

ist,

ist, als ein rechter Winkel, oder daß die Linien, deren Neigung den Winkel ausmachen, näher zusammen sind. Denn die Winkel EBD und EBF, da wir den Schenkel mit punktirten Linien gezogen haben, sind rechte Winkel, weil EB auf BC oder BD senkrecht gezogen ist.

§. 13. Gleichfalls entstehet auch aus der Neigung der Linie über den Perpendikel EB auf der einen Seite (Fig. 12) FB, ein **stumpfer** Winkel. So ist der Winkel ABF ein **stumpfer** Winkel, und wie der Augenschein lehret, größer als ein rechter, weil zu dem rechten Winkel EBF noch der Winkel ABE hinzukommt. Wie solche Winkel errichtet werden, werden wir schon an seinem Orte lehren, jetzt bemerken wir noch, daß es unendlich viele, sowol spitze als stumpfe Winkel geben kann, weil, wie man leicht sehen kann, die Linie AB unendlich viele Lagen oder Neigungen gegen die andere haben kann, ehe beyde Linien in eine zusammenfallen. Alle Winkel, die nun keine rechte sind, sie mögen spitz oder stumpf seyn, werden mit einem allgemeinen Namen schiefe Winkel genennet.

§. 14. Wenn nun von einem Punkt B einer geraden Linie, wie CD ist, (Fig. 13) eine Linie AB gezogen wird, oder eine Linie AB auf einer andern CD stehet, so daß auf beyden Seiten nach C und D noch ein Theil der Linie sich befindet, so entstehen dadurch zwey Winkel ABD und ABC, die einen Schenkel gemeinschaftlich haben, Fig. 13.

oder

oder der beyden zukömmt, hier den Schenkel AB, und deren übrige beyde Schenkel CB und BD in einer geraden Linie liegen. Solche Winkel heißen **Nebenwinkel** (deinceps positi). Wenn der eine gemeinschaftliche Schenkel AB (Fig. 11) auf CD senkrecht steht, so sind die beyden Nebenwinkel ABD und ABC beyde rechte Winkel (§. 11), und die Nebenwinkel sind alsdenn gleich groß oder gleich. Steht dieser gemeinschaftliche Schenkel (Fig. 13) AB nicht senkrecht auf CD, also schief darauf, so sind die beyden Nebenwinkel ungleich, und heißen schiefe Winkel, und einer ist ein spitzer Winkel, der andere ein stumpfer, wie auch aus Fig. 12 erhellet. Schneiden sich aber zwey gerade Linien einander, wie Fig. 4 die Linie DC und EB, so heißen zwey Winkel, die einander entgegengesetzt sind, als n und m und x und A **Vertikalwinkel.**

§. 15. Der gesunde Verstand lehret es einen jeden, daß man mit **einer** geraden Linie keinen Platz oder Fläche einschließen und begränzen kann, ob es schon, wie wir nachher sehen werden, mit einer krummen Linie angehet. Eben so wenig wird man es auch mit zwey geraden Linien können, man mag sie an einander setzen, wie man will; es giebt einen Winkel, der immer vorne eine Oefnung behält, allein wenn man die dritte Linie dazu nimmt, und die vor die andern beyden herlegt, und sie lang genug ist, daß sie die beyden Schenkel des Winkels erreichet, so kann man schon

schon eine Fläche einschließen, und wenn man mehr als drey gerade Linien an einander legt, so ist es, wie man sich leicht vorstellen kann, eben so gut möglich, eine Fläche dadurch einzuschließen oder zu begränzen. Eine solche mit Linien begränzte Fläche heißt nun eine Figur; und solche ebene Figuren nun, die in gerade Linien als in ihre **Seiten** eingeschlossen sind, heißen **geradlinichte** Figuren. Sind aber die Seitenlinien einer Figur **krumme** Linien, so heißt sie eine **krummlinichte** Figur. Und es sind **vermischtlinichte Figuren**, wenn die Seitenlinien zum Theil aus geraden, zum Theil aus krummen Linien bestehen. Wir reden hier jetzt von geradlinichten **Figuren.** Nachdem diese nun mehr oder weniger Seiten haben, haben sie auch verschiedene Benennung. Weniger als drey Seiten können sie nicht haben, und denn heißen sie **Dreyecke, Triangel.** Haben sie vier Seiten, so heißen sie **Vierecke.** Haben sie mehr als vier Seiten, so heißen sie, nachdem sie 5, 6, 7 oder mehr Seiten haben, **Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke,** oder mit einem allgemeinen Namen **Polygone,** oder **Vielecke.** Man sollte nun billig diese Figuren nicht nach ihren Ecken, sondern nach ihren Seiten benennen. Allein, weil jede geradlinichte Figur, auch allezeit so viel Ecken als Seiten hat, indem je immer zwey Seiten, die auf einander folgen, einen Winkel machen, und die letzte Seite mit der ersten auch noch einen machet, so nennet man die Figuren nach ihren Ecken.

§. 16.

§. 16. Wir wollen nun erst eine Figur betrachten, die von drey Seiten eingeschlossen wird, und ein **Dreyeck** oder **Triangel** heißet. Daß sie drey Ecken oder Winkel habe, folget aus der Fig. 14 Figur selbst, denn (Fig. 14) wie wir schon eben §. 15 gesagt haben, so schließt die Seite BC mit der nächstfolgenden CA einen Winkel bey C ein, diese Seite CA mit der dritten Seite AB wieder einen Winkel in A, und diese dritte Seite macht, weil sich doch die Figur schließen muß, abermal mit der ersten Seite BC noch einen Winkel. Diese Triangel können wir nun in Ansehung ihrer Seiten sowol, als ihrer Winkel betrachten.

§. 17. Wenn alle Seiten eines Triangels gleich lang sind, so heißet er ein **gleichseitiger Triangel** (triangulum aequilaterum). Die Fig. 15 15te Figur stellet einen vor, wo alle Seiten gleich lang gemacht sind, und AB = BC = CA ist.

§. 18. Wenn nur zwey Seiten gleich lang sind, so heißet er ein **gleichschenklichter Triangel** (triangulum aequicrurum, oder Isosceles), Fig. wie die 16te Figur vorstellet. Da AB = BC aber 16. die Seite AC in ihrer Länge von den andern verschieden ist, die denn länger oder kürzer seyn kann. Hier ist sie kürzer.

§. 19. Ist keine Seite der andern gleich, so heißt der Triangel ein **ungleichseitiger Triangel** (triangulum scalenum), wie Fig. 17 ist. Fig. 17.

§. 20.

§. 20. Betrachten wir die Triangel in Ansehung ihrer Winkel, so nennet man sie **rechtwinklichte**, **spitzwinklichte** und **stumpfwinklichte**. Rechtwinklichte sind, welche einen rechten Winkel haben, und da die andern beyden spitz seyn müssen Fig. 18, wobey A ein rechter Winkel ist. Man nennet bey einem solchen rechtwinklichten Triangel die Seite, welche dem rechten Winkel gegen über liegt, hier die BC, die Hypothenuse, und die andern beyden Seiten die Catheti. Fig. 18.

Stumpfwinklichte Triangel sind die, welche einen stumpfen Winkel haben Fig. 19. Der stumpfe Winkel ist hier auch bey A, die andern beyden Winkel müssen gleichfalls spitz seyn, wie in der Folge bewiesen wird. Fig. 19.

Endlich spitzwinklichte Triangel sind solche, welche blos spitze Winkel haben, wie die Triangel Fig. 14, 15, 16, 17 sind. Es versteht sich von selbst, daß die Triangel sowol in Betrachtung ihrer Seiten, als ihrer Winkel nicht eben in der Lage liegen dürfen, worinn wir sie hier gezeichnet haben, genug wenn sie die Eigenschaften besitzen, die wir hier bemerket haben. Ferner kann es auch seyn, daß verschiedene Benennungen der Triangel in Ansehung ihrer Seiten auch den Triangeln in Ansehung ihrer Winkel zukommen, so kann z. E. ein rechtwinklichter Triangel gar wohl auch zwo gleiche Seiten haben ꝛc. allein hievon reden wir jetzt noch nicht. Ferner zeigen wir hier auch noch nicht die Ursachen an, warum ein rechtwinklichter Triangel nur einen rechten Winkel und die andern beyden spitz

hat, und ein stumpfwinklichter auch nur einen stumpfen Winkel hat, und die andern beyden gleichfalls spitz sind, und ein spitzwinklichter drey spitze Winkel hat. Zu seiner Zeit wird sich dieses alles zeigen, da wir denn auch lehren werden, wie die Triangel von gegebenen Winkeln konstruirt werden müssen.

§. 21. Wir wollen nun **vier** gerade Linien also an einander legen, also, daß sie keine Oeffnung einerwärts lassen, sondern eine **Ebene** umschließen. Daraus entstehet, wie man gleich selbst sehen wird, eine **vierseitige** Figur oder ein **Viereck**. Diese vierseitige Figuren können nun wieder mancherley seyn. Eine solche **vierseitige** Figur, welche **vier** gleich lange Seiten und **vier** rechte Winkel hat, heißet ein **Quadrat**, siehe Fig. 20. Fig. 20. ABCD ist ein **Quadrat**, und AB = BD = DC = CA, imgleichen die Winkel x = y = z = r = R (§. 11) oder rechte Winkel.

Sind in einer viereckten Figur zwar **alle vier** Winkel rechte Winkel, allein nur allezeit **zwey** Seiten, die einander gegen über stehen, gleich, und die andern beyden, die einander gegen über stehen, zwar auch gleich, aber von den ersten beyden verschieden, so heißet solches Viereck ein **Rechteck**, ein **Reckrangel** (rectangulum, oblongum). In der (Fig. 21) ist die Seite AB = der Seite CD, und die Seite AC = der Seite BD und u, x, y, z = R. Das ist also nach unserer Erklärung ein **Reckrangel**.

Sind in einer viereckten Figur zwar alle vier Seiten einander gleich, aber alle vier Winkel schief, so heißet sie eine **Raute** (Rhombus), die die Fig. 22 anzeiget. Hier ist AB = BD = DC = CA, aber keiner der Winkel ist ein rechter, sondern x und z sind zwey spitze, und u und y zwey stumpfe. Fig. 22.

Wenn in einer viereckten Figur nur allezeit zwey einander gegen überstehende Seiten gleich groß sind, und die andern beyden auch gleich, aber von den ersten verschieden, und die Winkel gleichfalls wie beym Rhombus schief sind, so heißt die Figur eine **länglichte Raute** (Rhomboides). In der Figur 23 ist AB = CD, und AC = BD, die von den ersten verschieden sind, und keiner der Winkel ist ein rechter, sondern x und z zwey spitze, und u und y zwey stumpfe Winkel. Man nennet alle solche vierseitige Figuren, davon zwey einander gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, mit einem allgemeinen Namen Parallelogramme. Fig. 23.

Sind bey einem Vierecke nur zwey einander gegenüberstehende Seiten einander **gleichlaufend** oder parallel §. 9, aber nicht gleich lang, und die andern beyden nicht, so heißt die Figur ein **Trapezium**; ist aber keine Seite der andern parallel, so heißt sie **Trapezoides**. Beyde heißen **ungleichseitige Vierecke**. Die 24te Figur stellet ein **Trapezium** vor, hier ist zwar AB parallel mit CD, aber nicht gleich, und Figur 25 ist ein **Trapezoides**. Die Winkel kom- Fig. 24. Fig. 25.

men bey diesen Figuren hier nicht in Betrachtung. Daher können die Trapezia und Trapezoides von sehr verschiedener Gestalt seyn. Bey Figur 24 sind bey x und y rechte Winkel.

§. 22. Wenn eine geradlinichte Figur mehr als vier Seiten hat, so heißet sie, wie wir schon erwähnet haben, ein **Vieleck** oder **Polygon** §. 15. Diese Polygonen können nun **regulär** oder **irregulär** seyn. Sie sind **regulär**, wenn in ihnen alle Seiten und alle Winkel gleich sind. Sie sind irregulär, wenn das nicht ist, wenn sie auch einige gleiche Seiten und Winkel hätten. Den Namen, wie wir schon gesagt haben, bekommen sie von ihren Seiten, oder vielmehr von ihren Ecken §. 15. Die Figur 26 stellet ein reguläres Sechseck vor. Es ist hier AB = BE = ED = DF = FF = FA, und s = z = y = x = u = t.

Fig. 26.

Fig. 27. Die Figur 27 ist ein irreguläres Sechseck, welches, so wie alle **irreguläre** Polygone, auf unendlich vielerley Art gemacht werden könnte.

Anmerkung. Die Eigenschaften, Ausmessung und Construktionen dieser Figuren werden wir an seinem Orte schon finden.

§. 23. Wir haben allgemeine Erklärungen von geradlinichten Figuren gegeben, wir wollen auch nun noch eine krummlinichte Figur betrachten, welche man in der **Elementar-Geometrie** auch gebrauchet. Es ist dieses der **Cirkel** oder der **Kreis** (circulus). Die Cirkellinie

Fig. 28. Fig. 28 ist eine krumme Linie ABDEFA, welche

eine

eine Ebene also umschließet, daß alle in dieser **Cirkellinie** befindliche Punkte von einem andern gewissen Punkte C, der sich in dieser Ebene befindet, gleich weit entfernet sind. Dieser Punkt C, wovon alle in der Kreislinie sich befindende Punkte gleich weit entfernet sind, heißt der **Mittelpunkt** oder das **Centrum** C. Die ganze Ebene, welche nun durch die Kreislinie eingeschlossen ist, heißt die **Kreisfläche** (area circuli). Die **Kreislinie** selbst ABDEFA, die nun diese Fläche begränzet, heißt die **Peripherie** oder der Umfang. Ein Stück der Peripherie, es sey groß oder klein, wie z. E. das Stück AB heißt ein **Bogen**. Jede gerade Linie, die man von einem Punkte der Peripherie nach einem andern Punkte der Peripherie ziehet, so daß sie aber auch durchs Centrum C gehet, heißet ein **Durchmesser** (Diameter). Hier sind AE und BF solche Linien. Jede gerade Linie, wie CA, CB, CE, CF, die man von dem Mittelpunkte bis an die Peripherie ziehet, heißt ein **Halbmesser** oder ein **Radius**. Eine gerade Linie von einem Punkt der Peripherie an den andern gezogen, wie die Linien BD, oder BH, oder HD sind, welche aber nicht durchs Centrum C gehen dürfen, heißt eine **Sehne** oder **Chorde** (chorda), denn wenn die Sehne durch das Centrum mit geht, so heißt sie, wie wir schon gesagt haben, ein **Durchmesser**. Ein solches Stück des Kreises, das zwischen dem Bogen eines Kreises und seiner Sehne enthalten ist, wie hier der Platz, der zwischen BD und

dem Bogen des Kreises ist, oder auch der Platz zwischen BH oder HD und dem Bogen des Kreises, heißt ein Abschnit, Segment des Kreises (Segmentum), und wenn die Sehne durch den Mittelpunkt gehet, und also ein Durchmesser wird, wie hier z. E. in AE, so heißt der Platz zwischen dem Durchmesser und Bogen ein halber Cirkel. Ein Stück der Kreisfläche, das zwischen zween Radiis und dem Bogen des Cirkels fällt, wie hier das Stück CFE ist, heißt ein Abschnitt des Kreises (Sector circuli). Wenn eine gerade Linie, IG, also an irgend einem Orte der Peripherie des Kreises hinstreichet, daß sie selbige zwar an einem Orte berühret, wie hier in E, aber sie nicht schneidet, oder etwas von ihr wegnimmt, so heißt sie eine Tangente, sie muß also ganz außer dem Cirkel fallen, und nur an dem einzigen Punkt, wo sie ihn berühret, ihn erreichen.

§. 24. Aus dieser Erklärung des Cirkels, und aus der Erklärung und Benennung seiner vornehmsten Linien und Flächen, so viel wir vors erste nöthig haben, lassen sich ein Paar Folgen ziehen, die schon in der Erklärung liegen, und die wir also nicht vorbey gehen wollen. Wir haben die Kreislinie also erkläret, daß es eine krumme Linie sey, in der alle Punkte von einem gewissen, in der Ebene, die sie umschließet, befindlichen Punkte gleich weit entfernt seyn, welcher Punkt der Mittelpunkt hies. Wenn man nun also von diesem Mittelpunkt C, nach welchem Punkt

der

der Peripherie man will, gerade Linien ziehet, so müssen die alle gleich groß seyn. Solche Linien aber sind die, wie CA, CB, und heißen Halbmesser oder Radii. Folglich alle Radii eines Cirkels sind gleich groß. Da man ferner die gerade Linie, die den Radius ausmacht, wie z. E. CA ist, verlängern, und bis an die entgegengesetzte Seite in eben der Richtung fortziehen kann, da denn CE abermals Radius wird; aber auch die ganze gerade Linie AE der Diameter des Cirkels ist; so folget ferner, daß alle Diameter eines Cirkels = zween Radiis sind: und da alle Diameter eines Cirkels = zween Radiis sind, so müssen auch alle Diameter eines Cirkels gleich groß seyn, weil alle Radii gleich groß sind, und sie aus zween solche Radiis bestehen. Fig. 28.

§. 25. Wenn mehrere Cirkel ein gemeinschaftliches Centrum haben, so heißen sie koncentrische Kreise, wie die Cirkel Fig. 29 sind, die alle den gemeinschaftlichen Mittelpunkt in C haben. Daß alle solche koncentrische Kreise, man mag sie sich klein oder groß gedenken, in einander liegen müssen, und immer einer kleiner oder größer seyn müsse, als der andere, folget von selbst. Denn wären nur zwey darunter, die völlig gleich groß wären, das ist nach der Erklärung des Kreises, da alle Punkte in der Kreislinie bey beyden gleich weit von ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte abstünden, so müßten die beyden Kreislinien in einander fallen, und nur nur eine Fig. 29.

Kreislinie ausmachen. Man siehet auch leicht ein, daß das wahr ist, wenn mehrere koncentrische Kreise gleich groß wären.

§. 26. Wenn zwey oder mehrere Kreise nicht ein gemeinschaftliches Centrum haben, sondern ihre Peripherien an einander stoßen, oder sich einander schneiden, so sind es excentrische Kreise. Die Figur 30 zeiget solche von verschiedenen Arten. Fig. 30.

Die alten Geometer haben die Kreislinie oder die Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile getheilet, welche sie **Grade** nennen. Jeden solchen Theil oder jeden Grad haben sie wieder in 60 Theile getheilet, die **Minuten** heißen, und jeden solchen Theil oder jede **Minute** abermals in 60 Theile, die heißen **Secunden**; jede **Secunde** wieder in 60 Theile, welche man **Tertien** nennet. Will man in der Folge noch weiter gehen, so ist jede Tertie wieder in 60 Theile getheilet, die man **Quarten** nennet. Weiter pfleget man in der Eintheilung nicht zu gehen, weil man die mehrste Zeit schon mit Minuten zufrieden seyn kann, und selten, als bey der Astronomie oder sehr genauen Messungen, Secunden, und noch weniger Tertien, auch wol in astronomischen Rechnungen Quarten gebrauchet. Diese Eintheilung der Peripherie des Cirkels ist völlig willkührlich gewesen, und sie hätten jede andere nehmen, und z. E. die Peripherie in 100

Theile theilen können. Allein sie haben vermuthlich diese erwählet, weil 360 eine Zahl ist, die sich durch viele Faktores gut theilen läßt, so daß sie ganz aufgeht, z. E. durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 u. s. w. wie denn die Zahl 60 eben die Eigenschaften hat. Nach den Potenzen der 10 getheilet, wäre freylich noch bequemer gewesen; allein da wir einmal diese Eintheilung haben, so wird es wol dabey sein Verbleiben haben. Man schreibet diese Eintheilungen eben so, als man die Maaßen schreibet, und es kann doch nicht leicht dadurch ein Mißverstand entstehen, weil es sich aus dem Contexte zeiget, wovon die Rede ist. 1 Grad schreibt man 1°, eine Minute 1′, eine Secunde 1″, eine Tertie 1‴; so sind 36° 40′ 20″ 35‴ = 36 Grad 40 Minuten 20 Secunden 35 Tertien. Es werden alle Cirkels also eingetheilet, sie mögen groß oder klein seyn, nur ist es sehr begreiflich, daß bey einer größern Peripherie die Theile größer fallen, als bey einer kleinern; allein das hindert in dem Gebrauch dieser Eintheilung des Cirkels nicht, weil ich gewöhnlich nicht zu wissen verlange, **wie groß** ein solcher Bogen des Cirkels ist, wenn man ein, zwey oder mehrere Grade davon nimmt. Wenn ich dieses wissen wollte, müßte ich diesen Theil des Bogens in eine gerade Linie verwandeln, das **rektificiren** heißt, sondern ich will wissen, der **wie vielste** Theil der Peripherie ein solches Stück des Bogens ist. Da man sich alle mögliche Cirkel, große und kleine, also gedenken kann, daß man sie doch in einander legen,

und ihnen ein gemeinschaftliches Centrum geben könnte, weil sie alle einerley Eigenschaften haben, und nur darinn verschieden sind, daß des einen Radius länger ist als des andern, und also seine Peripherie weiter von dem Mittelpunkt entfernt ist, als des andern, so war eine solche Eintheilung der Peripherie in Grade die bequemste, weil, wenn man von dem Mittelpunkt etwa nach einem Punkt in der Peripherie solcher in einander gelegten Cirkel eine Linie zöge, der Winkel, welcher mit dem Diamrter der Cirkel dadurch entstünde, immer eine gleiche Anzahl von Graden einschlösse. Fig. 29 sind drey in einander gelegte Cirkel. Die Linie CD ist auf den Punkt in der Peripherie gezogen, der von A an gezählet, 60 Grade enthält, also AD = 60°, aber das ist auch ad und αδ.

Fig. 29.

§. 27. Man sagt von einer Figur, sie sey einer andern ähnlich, wenn sie in nichts von ihr verschieden ist, als in ihrer Größe, so sind z. E. alle Cirkel einander ähnlich, denn sie sind in nichts verschieden, als in ihrer Größe. So sind zwey verschiedene Quadrate einander ähnlich, denn sie haben alle beyde ein jedes gleich lange Linien, und jedes hat vier rechte Winkel, sie sind in nichts als der Größe ihrer Linien, und daher auch in dem Raum, den sie einfassen, verschieden.

§. 28. Das Zeichen der Aehnlichkeit in der mathematischen Sprache ist ein liegendes S, es ist folgende Figur ∽.

§. 29.

§. 29. Sind aber Figuren so beschaffen, daß sie, wenn sie auf einander gelegt werden, die Gränzlinien der einen genau auf die Gränzlinien der andern fallen, so daß also der Raum, der in ihnen ist, genau auf den Raum des andern fällt, und nichts größer und nichts kleiner ist, so sagt man, die Figuren sind **gleich** und **ähnlich**, sie decken sich einander, sie **passen** auf einander, sie sind **kongruent**. Das Zeichen der Kongruenz ist folgendes ≅. So wären z. E. zwey Stücke Papier, die man, auf einander gelegt, zu einer Figur geschnitten hätte, **gleich** und **ähnlich** oder **kongruent**, sie **deckten** sich einander. So müssen zwey gerade Linien, auf einander gelegt, sich einander decken. So müssen zwey rechte Winkel sich auch einander decken, und kongruent seyn, weil die Neigungen ihrer Linien gleich weit von einander sind; überhaupt muß das für alle Winkel gelten, welche gleich groß sind, oder da bey **beyden** die eine Linie, welche den einen Schenkel ausmacht, gegen den andern Schenkel eben die Lage oder Neigung hat. Solche Figuren, die nun einander kongruent sind, können also völlig eine in den Raum der andern gesetzt werden, und es kann in Ansehung der geometrischen Betrachtung unter beyden gar kein Unterschied seyn.

§. 30. Hieraus wollen wir noch eine Folge in Ansehung des Kreises ziehen, welche in dieses erste Kapitel recht gut gehöret, und die wir nachher

her sehr gut nutzen werden. Der Durchmesser AD eines Kreises Fig. 31 theilet den Kreis genau in zwey gleiche und ähnliche, oder zwey kongruente Stücke. Denn man lasse die Linie AD, welches der Durchmesser ist, ganz in ihrer Lage und Größe ungeändert, und klappe nun das Stück ABD um, auf ABD, so wird also die Gränze beyder Stücke, welche durch die gerade Linie ACD gemacht wird, auf einander liegen, weil ferner alle Punkte sowol in dem Stücke der Kreislinie AbD, als in dem Stücke AbD gleich weit von C abliegen, und zwar in beyden Stücken eine gleiche Entfernung von C haben, §. 24. so müssen auch alle Punkte von ABD auf die von AbD zu liegen kommen, und da sich bey beyden Stücken diese Kreislinien in A und D endigen, und also auch die Punkte, die beyde in A und D gehören, auf einander zu liegen kommen, so muß das Stück ABDCA so groß als das Stück AbDCA seyn, folglich muß die Cirkelfläche durch den Durchmesser ACD in zwey ähnliche und gleiche Theile getheilet seyn.

Fig. 31.

§. 31. Setzet man auf den Durchmesser Fig. 31 in den Mittelpunkt des Cirkels in C eine gerade Linie CB, die mit dem Durchmesser einen rechten Winkel machet, so daß BCD = BCA ∝ R ist, §. 11. so wird die halbe Cirkelfläche ABDCA abermals durch diese Linie CB in zwey ähnliche und gleiche Theile getheilet. Denn die Linie BC ist gleich der Linie AC und auch der Linie CD, weil alle drey Radii sind. Ferner decken auch

Fig. 31.

rechte

rechte Winkel einander §. 29. also, wenn man das Stück BCD umklappet und auf das Stück BCA leget, und die Linie CB ungeändert bleibet, so wird CD und CA einander genau bedecken, und die Linie CB decket sich selber. Die Endpunkte der beyden Cirkelstücke werden in B und A auf einander fallen, und weil alle Punkte in dem Stücke der Kreislinie BD sowol als BA gleich weit von C als dem Mittelpunkte entfernet sind, so müssen auch die Stücke der Kreislinie BA und BD einander decken, also der eine Theil dieses Stücks der Cirkelfläche so groß als der andre seyn.

§. 32. Eine gerade Linie BC, die also unter einem rechten Winkel auf dem Centro im Diameter stehet, weil er allezeit dadurch gehet, theilt die halbe Cirkelfläche in zwey gleiche Theile, folglich ist der Raum, den sie mit der Kreislinie BD und dem halben Diameter oder dem Radius CD einschließet, der vierte Theil der ganzen Cirkelfläche. Fig. 31.

§. 33. Da der Diameter AD den Cirkel in zwey gleiche Theile theilet, so wird ABD die Hälfte der Peripherie, oder des ganzen Kreisbogens seyn, und da der ganze Kreisbogen $= 360°$, so muß $ABD = \frac{360°}{2}$ seyn $= 180°$; und weil ferner BC die halbe Cirkelfläche wieder in zwey gleiche Theile theilet, so muß der Bogen $BA = BD =$ dem vierten Theil der Peripherie $= \frac{360°}{4} = 90°$ Grade seyn. Fig. 31.

§. 34.

§. 34. Weil die Peripherie eines Kreises eine krumme Linie ist, die zusammen hänget, so giebt es schon die Natur der Sache, daß, wenn man einen Punkt in der Fläche des Kreises, wo man will, annimmt, und einen Punkt außer dem Kreise, und beyde Punkte durch eine gerade Linie mit einander verbindet, diese nothwendig den Kreis schneiden müsse. Fig. 31 der Punkt F ist im Kreis und der Punkt E außer ihm. Und wenn man einen Punkt im Kreise annimmt, durch welchen eine gerade Linie gehet, die aber ihre Gränzen nicht in der Kreisfläche hat, sondern nach beyden Seiten hin verlängert wird und durch den Umfang des Kreises gehet, so muß sie, ehe sie aus der Kreisfläche herauskömmt, die Kreislinie nothwendig zweymal schneiden. Denn gehet sie durch den Mittelpunkt des Kreises, so wird sie im Kreise selbst zum Diameter, der den Kreis an zwey Orten berühret §. 23. gehet sie nicht durchs Centrum, so muß sie im Kreise zur Chorde werden, welche auch den Kreis an zwey Orten berühret, §. 23.

Fig 31.

§. 35. Wenn eine Figur also in eine Kreislinie gelegt ist, daß die Kreislinie die Scheitel aller ihrer Winkel berühret, so sagt man, sie sey in einem Kreise beschrieben, oder der Kreis sey um die Figur beschrieben. Die Figur 32 ist ein im Kreise beschriebenes Quadrat. Und wenn ein Kreis also in einer Figur stehet, daß er alle Seiten der Figur berühret, oder welches einerley ist, alle Seiten der Figur den

Fig. 32.

Kreis

Kreis berühren, so sagt man, die Figur sey um den Kreis beschrieben. Die 33ste Figur ist ein um den Kreis beschriebenes Quadrat. Fig. 33.

Wir haben die mehresten der vornehmsten Erklärungen, die wir in den ersten Gründen der Geometrie gebrauchen, nebst den Hauptgrundsätzen derselben gegeben, und wir sind hiebey ziemlich weitläuftig geworden, obschon alles dieses ganz leicht ist. Allein wir werden auf diese Dinge nun weiter fortbauen, und daher war es nöthig, daß man sie recht verstand, und sich davon gründlich überzeugte. Was wir noch weiter von Erklärungen gebrauchen, werden wir so, wie sie nöthig sind, anführen.

Das zweyte Kapitel.

Von den Winkeln und einigen ihrer Eigenschaften.

§. 36.

Was ein ebener Winkel sey, nemlich die Neigung zweyer Linien neben einander, haben wir §. 10, 11, 12, 13, und Fig. 9, 10, 11, 12, 13 sattsam gesehen. Wir bemerken jetzt einige ihrer vornehmsten Eigenschaften. Man siehet von selbst ein, daß diese Winkel unendlich verschieden seyn können, aber man muß doch auch

wol

wol ein Maas haben, wodurch man ihre Verschiedenheit von einander bestimmet. Hiezu gebraucht man gewöhnlich keine gerade Linie, sondern den Cirkelbogen. Man misset die Defnungen der Winkel nach Graden, Minuten, Secunden und Tertien aus, wenn man sie so fein haben will, obschon Grade und Minuten in den mehrsten Fällen zureichend sind. Es läßt sich zwischen den beyden Linien, welche die Winkel ausmachen, doch allemal ein Cirkelbogen beschreiben; wenn man Fig. 34 die eine Spitze des Cirkels in den Scheitel des Winkels DCB setzet, den Cirkel nach Gefallen öfnet, doch nicht weiter als die Länge eines der Schenkel ist, und alsdenn zwischen den beyden Schenkeln des Winkels einen Bogen ziehet. Die beyden Schenkel des Winkels CD und CB werden dadurch gleich gemacht, weils Radii dieses Cirkelbogens werden, §. 24. und wenn man den einen Schenkel des Winkels, die CB, rückwärts nach A hin verlängert, und den Cirkel weiter fortziehet, so muß die Linie CA nach der Richtung CB fortgehen, und da der Zirkel ADB schon gezogen ist, die A erreichen, da AB ferner durchs Centrum gehet, so ist AB = Diameter, und man hat alsdenn auf dieser Linie einen halben Cirkel beschrieben, weil die gerade Linie ACB durch den Mittelpunkt gehet, §. 30. Der Bogen DB ist also ein Theil des ganzen halben Cirkels ADB, und bestimmet also, wenn man seine Anzahl von Graden und Minuten u. s. w. weis, um wie viel Grade u. s. w. die beyden

Fig. 34.

Linien

Linien CD und CB gegen einander geneigt sind. Es ist gleich viel, wie weit man den Cirkel öfnet, denn alle Bogen eines Cirkels werden eben das thun, weil ich hier nicht wissen will, wie weit die Oefnung zweyer solcher Linien, die einen Winkel einschließen, an einem bestimmten Orte, als hier in D und B, oder in d und b sey, sondern weil ich wissen will, wie überhaupt ihre Neigung gegen einander sey, und da ist es gleich viel, wie weit ich den Cirkel öfne, und die Kreislinie ziehe, weil Fig. 34 das abgeschnittene Stück des Bogens DB ein eben so großes Stück des halben Cirkels ADB, als das abgeschnittene Stück db des halben Cirkels adb ist. Finden Anfänger hiebey noch Zweifel, so wollen wir nur die gerade Linie DC, welche durch den Mittelpunkt gehet, nach E in eben der Richtung verlängern, und beyde koncentrische Cirkel noch weiter ziehen, so wird die Linie DCE oder dCe auch ein Durchmesser, also die Bogen ADB und adb sind halbe Cirkel; ferner sind nun auch die Bogen EAD und ead halbe Cirkel. Wenn man nun von jedem Bogen EADB und eadb eine halbe Kreislinie wegnimmt, nemlich die halbe Cirkellinie EAD und ead, so müssen die übrig gebliebenen Stücke db und DB jedes noch gleich große Theile von ihrem Ganzen seyn, und jedes gleich viele Grade, Minuten u. s. w. enthalten. Fig. 34.

§. 37. Man misset die Winkel oft mechanisch auf dem Papiere durch Hülfe des Trans-

porteurs, welcher ein halber Cirkel ist, der gewöhnlich in Grade und halbe Grade eingetheilet ist, und da man den Mittelpunkt, der durch eine scharfe Kante in der Linie, die den Durchmesser vorstellet, bezeichnet ist, an den Scheitel des Winkels leget, und siehet, um wie viel Grade die beyden Schenkel aus einander stehen. Man kann sich dieses Werkzeug von jedem leicht erklären lassen, und aus dem bloßen Anschaun wird man es schon selbst erklären können. Wir können uns hier nicht damit aufhalten, weil es eigentlich in die praktische Geometrie gehöret, von welcher wir nicht reden. Man misset auf dem Felde die Winkel noch auf mancherley andre Art, von der wir unserm Endzweck gemäß auch nichts erwähnen, wir reden nur eigentlich von theoretischen Gründen, wodurch die Winkel, ihre Größen und Verhältnisse bestimmet werden. Das siehet man indessen hieraus leicht ein, daß der Transporteur oder solche Art Werkzeuge, sie mögen große oder kleine Cirkels seyn, den Winkel messen können, nur daß man auf größern Werkzeugen wol noch Eintheilungen von 10 zu 10 Minuten, oder wol gar einzeln Minuten findet, obschon solche große Werkzeuge auf dem Papier nicht gut gebraucht werden können. Doch wir reden hievon eigentlich nicht.

§. 38. Im 14ten §. erklärten wir, was Nebenwinkel wären; jetzt reden wir von ihrem Maaße. Alle Nebenwinkel zusammen auf einer geraden Linie sind gleich zween rechten Winkeln, oder

oder haben 180°. Die Winkel x und y Fig. 35 sind Nebenwinkel, und unser Satz ist x + y = 180°. Denn der Winkel y wird durch den Bogen DB gemessen, und der Winkel x durch den Bogen AD; nun aber ist der Bogen AD + DB oder der ganze Bogen AB = ½ Cirkel, welcher = 180° = 2 R ist, denn die Linie ACB gehet durchs Centrum des Cirkels; also müssen die Winkel x + y = 2 R = 180° seyn. Wir wollen dieses einmal kürzer zusammen gezogen vorstellen, so wie die Geometer ihre Beweise zu führen pflegen, und nachher allezeit auf eine ähnliche Art sie führen. Fig. 35.

Satz x + y = 180°

Denn x = Bogen AD
y = Bogen DB

——————————— addirt

x + y = AD + DB
AD + DB = 180° = ½ Cirkel.

———————————

x + y = 180°.

§. 39. Ist nun einer von diesen Nebenwinkeln bekannt, so weis man auch den andern. Es sey y gegeben, so ist da x + y = 180°

x = 180° — y

wäre z. E. y = 60°, so wäre x = 180° — 60° = 120°.

§. 40. Auch aus diesem Satze §. 38. folget es, daß, wenn beyde Nebenwinkel gleich sind, auch jeder ein rechter Winkel sey. Denn Fig. 31.

$$x + y = 180^\circ$$

nun soll $x = y$ seyn
also anstatt
y die x gesetzet. $2x = 180$

$$x = \frac{180}{2} = 90^\circ = R.$$

und da $x = y$, also ist auch $y = R.$

Ferner läßt sich aus §. 38. gleichfalls schliessen, daß, wenn der eine Nebenwinkel spitz, oder kleiner als ein rechter oder als 90° ist, der andre nothwendig stumpf oder größer als 90° Grad seyn müsse, denn beyde zusammen machen 180° aus. Ist nun einer größer als die Hälfte von 180° Grad oder als 90°, so muß der andre nothwendig kleiner seyn, weil sonst mehr als 180° aus beyden zusammen herauskämen, welches doch nicht seyn soll. Man nennet einen solchen Winkel (Fig. 35.) Fig. 35. DCB, welcher mit einem andern DCA zwey rechte Winkel ausmachet, **das Complement, oder die Ergänzung zu zween rechten Winkeln.** So ist hier der Winkel DCB das Complement von DCA, und DCA ist gleichfalls das Complement von DCB zu zween rechten Winkeln. Hätte man also nur einen Winkel DCB, und man wollte sein Complement zeichnen, so könnte man das leicht thun, man dürfte nur die Linie CB rückwärts

rückwärts verlängern, um den Winkel des Complement ACD zu erhalten.

§. 41. Nicht nur zwey Nebenwinkel machen zusammen 2 Rectos = 180° aus, sondern es mögen noch so viel Winkel beysammen liegen, die alle aus einem Punkte herkommen, wenn ihre äussersten Schenkel (Fig. 36) AC und CE in einer geraden Linie liegen, so machen sie zusammen 180° aus. Wir wollen nur die drey neben einander zeichnen, man wird leicht den Beweis nachher für so viele machen können, als man will. Fig. 36.

Satz: $x + y + z = 180°$

denn $x + y + z = AB + BD + DE$ wodurch sie gemessen werden.

---

aber $AB + BD + DE = \frac{x}{2}$ Cirkel $= 180°$

---

gleiches für gleichen gesetzet, also $x + y + z = 180° = 2 R.$

Man nennet solche Winkel zwar auf deutsch auch Nebenwinkel, aber auf lateinisch, um sie von denen, wo nur zwey aus einem Punkte kamen, zu unterscheiden, die deinceps positi hiessen, nennet man diese contiguos.

§. 42. Wenn zwey oder mehr solcher Nebenwinkel nun die Summe von zweyen rechten

Winkeln ausmachen, so müssen ihre äußersten
Fig. Schenkel Fig. 37 AC und CE in gerader Linie
37. liegen, denn ist das nicht, so machen sie auch keine 180° Grad, sondern mehr oder weniger aus. Es sey das einmal nicht, und ACE wäre keine gerade Linie, aber die Winkel ACB + BCD + DCE sollten doch = 2 Rectis seyn, so verlängere man CE nach F hin, so, daß ECF eine gerade Linie wäre, so muß nothwendig noch ein Winkel ACF entstehen, und so wären nach §. 41 die Winkel ACF + ACB + BCD + DCE = 2 Rectis, und da es die ersten auch seyn sollten, so müste folglich ACB+BCD+DCE = ACF+ACB+BCD+DCE seyn, welches ein Widerspruch ist, indem der eine Theil den Winkel ACF mehr hat, als der andre Theil, und also nicht seyn kann.

§. 43. Man wird nun leicht von selbst bemerken, daß, wenn man aus einem Punkt C auf einer geraden Linie AE noch so viel andre gerade Linien, unter welchen Neigungen man will, gegen die Linie AE in einer Ebene ziehet, alle die Winkel, die sie zusammen machen, 180° seyn werden. Es folget dieses aufs genaueste aus dem 41ten §. und die Zeichnung Fig. 36 erläutert es, da man, wie man siehet, aus dem Punkt C, zwischen A und E noch unendlich viele Linien ziehen, und also Winkel machen könnte, die aber alle zu ihrem Maaße nur den Bogen AE = 180° = 2 Rectis hatten. Es ist auch dadurch gleich einleuchtend, weil man Fig. 37 den Punkt C, woraus alle diese

Linien

Linien gezogen sind, als den Mittelpunkt ansehen kann, woraus ein Cirkel gezogen werden kann, der die nach beyden Seiten hin verlängerte Linie AE nothwendig erreichen müßte, denn AE der Diameter, C das Centrum des Cirkels, der Bogen darüber bis AE ein halber Cirkel wäre, der 180° enthielte, über alle die Winkel gienge und sie alle mäße.

§. 44. Wenn man einen Punkt Fig. 38 in einer Ebene annimmt, so lassen sich aus ihm nach allen Seiten herum unendlich viel gerade Linien ziehen; die Winkel, welche alle diese Linien mit einander machen, werden aber zusammen nicht mehr und nicht weniger, als vier rechte Winkel oder 360° seyn. Denn man kann ja eine dieser Linien, welche man will, z. E. CA rückwärts nach G verlängern, und nun kömmt ein Theil der Winkel auf der einen Seite, und der andre Theil auf der andern Seite der Linie GCA zu liegen, aber alle auf einer Seite einer geraden Linie aus einem Punkt C herkommende Winkel machen zusammen nach §. 43. zwey rechte Winkel aus, also müssen die auf beyden Seiten liegende Winkel doppelt so viel oder **vier** rechte Winkel ausmachen; also alle um einen Punkt herumliegende Winkel = 4 Rectis = 360° seyn. Fig. 38.

§. 45. Wir haben eben gesehen, alle Winkel um einen Punkt herum machen zusammen 4 rechte Winkel aus. Hätte man also einen Winkel BAC

Fig. 9. BAC Fig. 9, und man nennete den einen hohlen Winkel, so stünde dem ein erhabner entgegen, denn so könnte man die Spitze desselben auf der andern Seite nennen. Wären aus dem Punkte A noch Linien nach allen Seiten gezogen, so wären die Winkel, die sie machen, noch die Ergänzung oder das Complement zu 4 Rectis, weil sie mit dem Winkel BAC solchen ausmachen würden, §. 44. sind aber keine gezogen, so bleibt doch eben die Größe des Platzes, und der erhabene Winkel kann also die Ergänzung des hohlen zu 4 Rectis oder zu 360° genennet werden.

§. 46. Die Winkel n und m, oder x und y

Fig. 39. Fig 39 sind nach §. 14. Vertikalwinkel. Von diesen behaupten wir, daß sie gleich sind, oder daß ein Vertikalwinkel so groß sey als der andere; und das wollen wir jetzt beweisen. Unser Satz ist also, daß $n = m$ und $x = y$ sey.

Satz $n = m$.

Denn $x + m = 2R$ oder 180° weil sie Nebenwinkel sind §. 38.

Ferner $x + n = 2R$ aus eben dem Grunde

folglich $x + m = x + n$

nun ist $x = x$ dieses subtrahiret.

folglich $m = n$

Eben so beweiset man, daß $x = y$ sey.

Denn

Denn $x + n = 2R$ §. 38.
$y + n = 2R$ eben daselbst

$x + n = y + n$
$n = n$ subtrahiret

$x = y$

§. 47. Hieraus folget ganz leichte, daß, wenn von Vertikalwinkeln nur einer bekannt oder gegeben sey, sie alle bekannt seyn müssen. Sein entgegen gesetzter ist gleich bekannt, denn er ist dem gegebenen gleich. Wäre n bekannt, und z. E. = 30 Grad, so wüßte man schon, daß m das auch wäre, die andern beyden müssen aber auch nun schon bekannt seyn, weil wir wissen, daß alle Winkel um einen Punkt herum = 4 Rectis oder 360 Grade sind, und man nur 2 n von 360° abziehen dürfte, um die beyden Winkel x und y zu wissen, und weil die gleich sind, diese gefundene Größe beyder Winkel nur durch 2 dividiren dürfte, um die Größe des einen zu erfahren. Die allgemeine Formel wäre also, wenn ein Winkel oder n bekannt ist, $4R - 2n = 2R - n$. Es ist nemlich Fig. 39

2

$n + x + m + y = 4$ Rectis §. 44

nun ist $n = m$ oder also $n + m = 2n$ §. 46

also $n + x + m + y - n - m = 4R - 2n$

oder $\frac{n + x + m + y - n - m = x + y}{x + y = 4R - 2n}$ nun ist

$\frac{x = y \text{ also } x + y = 2x \text{ oder } 2y}{2x = 4R - 2n} : 2$

also $\frac{2x}{2} = \frac{4R - 2n}{2}$

$x = 2R - n = y$. Dadurch bekäme man einen der übrigen Winkel x oder y, welchen man wollte.

Exempel: Es sey $n = 30°$, also m auch, so ist x oder $y = \frac{360 - 60}{2} = \frac{300}{2} = 150$

Das dritte Kapitel.

Von den Dreyecken und Parallellinien, und weitere Betrachtung der geradlinichten Figuren.

§. 48.

Wir kommen nun auf die wichtige Lehre von den Triangeln, deren Nutzen sehr allgemein ist, und sich durch die ganze Mathematik er-

erstreckt. Eine Triangel bestehet, wie uns schon bekannt ist, aus drey an einander gelegten Linien, welche drey Winkel einschließen. Es ist schon zu muthmaßen, daß die Länge und Lage dieser Linien die Gestalt des Triangels bestimmen werden, so daß dieselbe keinem andern, als solchem Triangel eigen seyn kann. Und so verhält es sich wirklich. Wenn von den sechs Stücken, nemlich den drey Winkeln und drey Linien, woraus ein Triangel bestehet, drey gegeben sind, darunter aber wenigstens allezeit eine Linie seyn muß, so läßt sich ein Triangel dadurch bestimmen, wie sich nachher zeigen wird. Der erste wichtige Satz ist, **zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel in einem Triangel bestimmen auch nur einen Triangel**, oder es läßt sich nur ein Triangel daraus machen, das ist, man kann, wenn diese Stücke gegeben sind, nur die eine, und keine veränderte Figur eines Triangels entwerfen. Der eingeschlossene Winkel ist, der zwischen zwey Linien liegt. So ist z. E. Fig. 15 der Winkel BAC, der eingeschlossene Winkel zwischen den Linien BA und AC.

Es sollen in dem Triangel BAC Fig. 15 nun die Linien BA und AC nebst dem eingeschlossenen Winkel BAC gegeben seyn, so ist auch die Lage der beyden Endpunkte dieser beyden Linien des Punkts in B und in C gegeben. Aber will man den Triangel schließen, so muß man noch die Linie BC ziehen, und weil sich zwischen zwey Punkten nur **eine** gerade Linie ziehen läßt §. 5, Fig. 15.

so

so ist auch deren Lage nun schon durch die Lage der Punkte B und C bestimmet, und es ist keine andere möglich.

§. 49. Wenn man also zwey Triangel hat, wo zwey Linien und der eingeschlossene Winkel gleich sind, so müssen diese beyden Triangel **kongruent** seyn, und sich einander decken §. 29.

So wenig Kongruenz die beyden Triangel ABC und abc Fig. 40 und 41 einem ungeübten Auge zu haben scheinen, so sind sie doch aus diesem angeführten Grunde kongruent, und decken einander, und wir haben sie aus der Absicht so gezeichnet, um unsere jungen Lehrlinge zu gewöhnen, daß sie nicht bloß darauf sehen müssen, ob zwey Triangel oder Figuren einerley Stellung haben. Denn der Winkel ABC ist gleich dem Winkel abc, weil wir ihn gleich gemacht haben, oder ex constructione.

Fig. 40 & 41.

Die Seiten $\left\{\begin{matrix} AB = ab \\ BC = bc \end{matrix}\right\}$ ex constructione.

Folglich $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Wenn man also den Triangel abc so herumdrehete, und den Punkt a auf A, b auf B legte, so würde auch c auf C zu liegen kommen, und die Triangel würden sich decken.

§. 50. Wir haben gesagt, daß es der eingeschlossene Winkel und zwey Linien seyn müßten, welche einen Triangel bestimmen, warum nicht

auch

auch zwey Linien und ein Winkel, wenn er auch nicht eingeschlossen wäre? Es gehet dieses auf gewisse Art an, alsdenn würde noch erfordert werden, daß man auch sagte, ob das Dreyeck spitzwinklicht oder stumpfwinklicht oder rechtwinklicht seyn sollte. Es sey Fig. 42 gegeben, die Linie AE und eine andere Linie AD, imgleichen der Winkel bey E, das bestimmet das Dreyeck noch nicht. Wenn man einen Cirkel in A setzet, und den Bogen BD ziehet, so ist sowol AD als AB Radius, und also gleich lang; also kann man, wie wir nur von zwey Stücken zeigen wollen, zwey verschiedene Triangel machen, davon der eine ADE von dem andern ABE sehr verschieden ist, und wo doch alle obige Bedingungen erfüllet waren. Sagte man aber, das Dreyeck soll spitzwinklicht oder stumpfwinklicht seyn, so kann die gegebene Linie AD = AB nur eine Lage bekommen, also muß alsdenn auch die DE oder BE von bestimmter Länge werden.

§. 51. Der zweyte wichtige Lehrsatz in Ansehung der Triangel ist, wenn in einem Triangel eine Seite und die beyden daran liegenden Winkel, die aber beyde zusammen weniger als 180° haben müssen, gegeben sind, so ist der Triangel bestimmet, es läßt sich nur ein einziger dadurch machen Fig. 43. Fig. 43.

Es sey gegeben, die Linie DE und die beyden anliegenden Winkel BDE und CED, so ist dadurch auch schon die Lage der Linien AD und

AE

AE gegeben, weil der Winkel die Neigung zweyer Linien gegen einander ist, diese Linien können sich also nur in einem und demselben Punkt A begegnen oder sich schneiden, und ein andrer Punkt ist nicht möglich, weil sonst die Lage wenigstens einer der Linien anders seyn müßte, welches aber wider unsere Voraussetzung ist.

Warum diese beyden Winkel zusammen weniger als 180° oder 2 R. haben müssen, wird sich an seinem Orte erweisen lassen, jetzt sagen wir nur gleichsam zum voraus, daß die Linien AB und AE sonst nicht zusammen kommen.

§. 52. Wir können hieraus die allgemeine Folge ziehen, wenn man also zwey oder mehr Dreyecke hat, welche eine gleiche Seite und zwey gleiche an der Seite liegende Winkel haben, so sind die Dreyecke selbst gleich und ähnlich, oder kongruent, sie decken sich einander. Es ist dieses sogar wahr, wenn eine Seite und zwey Winkel, sie mögen an der einen Seite liegen oder nicht, gleich sind. Doch hier können wir noch nicht davon reden, weil wir es noch nicht erweisen können.

§. 53. Der dritte wichtige Lehrsatz. Drey gegebene Seiten, wovon aber immer zwey zusammen genommen größer seyn müssen als die dritte bestimmen ein Dreyeck. Denn es mögen die drey Linien AB, CD und FE gegeben seyn Fig. 44, man nehme, welche man wolle, z. E. FE, und lege an das

Fig. 44.

Ende E die Linie AB mit ihrem Ende A oder B, und an das Ende F die Linie CD mit ihrem Ende C oder D, so kann es wegen der Länge der Linien nur einen Punkt geben über FE, wo sich beyde Linien AB und CD einander schneiden, weil sie doch also gelegt werden müssen, daß ihre Enden in einem Punkt zusammenkommen. Also wird die Lage der Linien oder die Winkel an beyden Seiten von FE schon durch die Länge der andern beyden Linien bestimmt, und der Triangel wäre auf beyde Fälle folgender Fig. 45: Legte man CD auf die andere Seite, so gäbe es doch wieder eben den Triangel, denn man darf nur den Triangel Fig. 45 umklappen, und das ändert ihn doch nicht, so giebt es den Triangel Fig. 46, da CD auf der andern Seite lieget. Eben das entstehet, wenn man CD, oder in der Figur AF als die Grundlinie annimmt, es müßten doch die beyden andern Linien auf die eine oder andere Seite daran gelegt werden, und denn würde doch eben dieser Triangel nur in einer andern Stellung erscheinen. Man sieht auch gleich, daß das bey der dritten Linie gilt. Man thut gut, um sich sinnlich zu überzeugen, daß man drey Ende Draht nimmt, wovon zwey zusammen länger sind, als das dritte, und die auf verschiedene Art an einander legt; warum aber zwey Linien länger seyn müssen, als die dritte, leuchtet schon daraus hervor, weil man sonst die beyden Linien, wenn sie nur beyde so lang wären, als die dritte, nicht auf die dritte aufrichten könnte, so daß sie eine

Fig. 45.

Fig. 46.

geschlossene Figur machten, sie würden auf die dritte auffallen, oder oben eine Oefnung geben, und noch weniger könnte es geschehen, wenn sie zusammen kürzer als die dritte wären. Man kann sich auch hievon auf eine sinnliche Art durch abgeschnittene Stücke von Draht überzeugen.

§. 54. Zwey oder mehr Triangel also, welche aus gleich langen Seiten bestehen, sind gleich und ähnlich oder decken einander, und kann einer für den andern genommen werden.

§. 55. Aus allen diesen Sätzen wollen wir nun einige Folgen ziehen. Man sagt, eine Seite sey im Triangel einem Winkel entgegengesetzt, wenn sie so gegen ihn überliegt, daß sie den Triangel schließet, so ist Fig. 46 die Seite AE dem Winkel AFE entgegengesetzt. Nun ist es gewiß, daß bey kongruenten Triangeln gleiche Seiten gleichen Winkeln entgegengesetzt sind, oder daß die Winkel, die gleichen Seiten entgegengesetzt sind, oder die Seiten, die gleichen Winkeln entgegengesetzt sind, einander gleich sind; denn wäre dieses nicht, so könnten sich die Triangel nicht einander decken, und wären nicht kongruent §. 29.

§. 56. Da drey Linien einen Triangel bestimmen nach §. 53, so wird also ein gleichseitiger Triangel schon durch eine Linie bestimmt, weil darinn alle drey Linien einander gleich sind

§. 17.

§. 17, und ein gleichschenklichter wird durch zwey gegebene Linien bestimmt, weil zwey Linien darinn gleich sind. Alles ganz leichte Folgen, die jedweder bald einsieht.

§. 57. Nach allen diesen Lehrsätzen lassen sich auch verschiedene Aufgaben auflösen, von welchen wir einige der vornehmsten hersetzen wollen. **Man soll einen Winkel konstruiren, welcher einem andern gegebenen gleich sey.** Man könnte dieses mechanisch durch den Transporteur thun §. 37, wie es denn auch oft geschiehet, da man erst den gegebenen Winkel misset, die eine Linie ziehet, und nachher den Punkt, welcher im Transporteur den Ort des Mittelpunkts anzeiget, an ihr Ende legt, so daß die Schärfe des Durchmessers im Transporteur auf die Linie kömmt, und denn den Punkt für einen eben so großen Winkel auf dem Papier bemerket. Man wird tausend Leute finden, die jeder dieses mechanisch zeigen können. Wir werden auch weiter unten lehren, wie man es genau durch Hülfe der Chorden des Cirkels thun könne. Die jetzige Auflösung gründet sich auf schon gelehrte Sätze. Es sey Fig. 47 der Winkel DAE; man soll einen gleichen construiren: 1) Man beschreibe mit einer willkührlichen Oefnung des Cirkels den Bogen BC, und dadurch wird AB = AC, weils Radii eines Cirkels sind. 2) Man ziehe eine unbestimmte gerade Linie ac Fig. 48, und nehme darauf die Länge AC oder mache AC = ac. 3) Fig. 47. Fig. 48.

Man setze den Fuß des Cirkels in c, und mache mit der Oefnung BC einen kleinen Cirkelstrich, der in der Gegend b seyn wird. 4) Setze man wieder den einen Cirkelfuß in a, und mache mit der Oefnung AB = AC abermal nach der Gegend b hin einen Cirkelschnitt, und wo sich beyde schneiden, dahin ziehe man aus a die Linie ab. Ich sage, daß alsdenn der Winkel bac dem Winkel BAC gleich seyn werde. Um dieses desto deutlicher zu beweisen, wollen wir noch die blinde Linie bc ziehen, so wie wir die blinde Linie BC gezogen haben. Es ist alsdenn

$$\left.\begin{array}{l} AC = ac \\ AB = ab \\ BC = bc \end{array}\right\} \text{alles ex constructione.}$$

folglich $\triangle ABC \cong \triangle abc$ §. 53
folglich muß auch der Winkel BAC = dem Winkel bac seyn §. 55.

§. 58. Nach den drey angeführten Sätzen von den Triangeln §. 48, 49, 51, 53 lassen sich nun auch Triangel konstruiren, wenn die gehörigen Data dazu gegeben sind. Wie ein Triangel zu konstruiren sey, wo alle drey Seiten gegeben sind, lehret schon der vorige Paragraph, denn wir konstruirten da wirklich einen Triangel aus allen drey bekannten Seiten, um den gegebenen Winkel zu konstruiren. Wäre der Triangel gleichseitig, so ist die Construktion noch leichter Fig. 15. Es sey die Linie AC gegeben, man ziehe mit eben der Oefnung des Cirkels AC einen uns

unbegränzten Cirkelbogen nach B, da die eine Spitze des Cirkels am Ende von AC in C stehet, mit eben der Oefnung des Cirkels ziehe man aus A einen unbegränzten Cirkelbogen, und an dem Ort, wo sich beyde Cirkelbogen schneiden, die Linie BC und BA; denn alsdenn sind alle drey Seiten gleich, weil alle Radii eines Cirkels gleich sind, dafür man die BC und BA ex constructione halten muß. Bey einem gleichschenklichten, wo zwey Linien nur gegeben seyn dürfen, verfähret man eben so. Es sey Fig. 16 die Länge AC und CB gegeben, so nehme man AC, und setze an ihre beyden Enden auf die gezeigte Art die Linien BC und BA, die einander gleich sind.

§. 59. Wenn man aus zwey Linien AB, CD und dem gegebenen eingeschlossenen Winkel cAe Fig. 49 einen Triangel konstruiren soll, so mache man entweder einen gleichen Winkel nach §. 57, und nehme darauf die Länge von AB und CD, da sich die dritte Linie CB von selbst findet, es ist der Triangel Fig. 50, oder wenn sich sonst keine Hinderung findet, darf man nur die Linien des Winkels cAe bis zu der erforderlichen Länge fortziehen, und alsdenn die dritte Linie ziehen. Fig. 49. Fig. 50.

§. 60. Den Triangel, wo eine Linie und die beyden anliegenden Winkel gegeben sind, zu konstruiren, setzt man nach §. 57 an die gegebene Linie Fig. 51 AB die beyden gegebenen Winkel dfe und ghi, und verlängert beyde Linien, bis Fig. 51.

sie sich schneiden, so wird man den verlangten Triangel Fig. 52 erhalten. Man kann auf mechanische Art bey dieser und der vorhergehenden Aufgabe die Winkel durch Hülfe des Transporteurs ansetzen, davon wir §. 57 schon geredet haben. Fig. 52.

Aus dem vorausgesetzten fließet auch die Auflösung der Aufgabe, wie man einen Winkel in zwey gleiche Theile theilen könne. Es sey Fig. 53 der Winkel BAC gegeben, er soll in zwey gleiche Theile getheilet werden: man setze den Fuß des Cirkels in A, und mache beyde Schenkel des Winkels einander gleich, so daß AD = AC; aus D und C ziehe man mit gleicher beliebiger Oefnung des Cirkels, nur daß sie größer sey, als die Hälfte von DC, die Stückchen des Bogens in E; man ziehe von E nach A eine gerade Linie, und ich sage, daß alsdenn der Winkel BAC dadurch in zwey gleiche Theile getheilet sey. Denn man ziehe nun noch die beyden Hülfslinien (es sind überhaupt solche Linien, die eigentlich nicht zur Figur gehören, sondern nur in der Demonstration gebraucht werden) DE und CE, so ist Fig. 53.

$$\left.\begin{array}{l} AD = AC \\ DE = CE \\ AE = AE \end{array}\right\} \text{ex constructione, oder weil wir sie gleich gemacht haben,}$$

---

also $\triangle ADE \cong \triangle ACE$ §. 53. Sie decken sich also

und folglich der Winkel $DAE = CAE$ §. 55. Und weil dieses ist, so muß jeder die Hälfte von BAC

seyn.

seyn. Man sieht leicht ein, daß man auf eben die Art den Winkel DAE nun wieder in zwey Theile theilen kann. Einer von denen, die dadurch entstünden, wäre nun $\frac{1}{4}$ von dem ganzen Winkel, und theilete man dieses $\frac{1}{4}$ vom ganzen wieder in zwey Theile, so bekäme man $\frac{1}{8}$ von dem ganzen Winkel. Also die Theilung des Winkels in 2, 4, 8, 16 ꝛc. Theile, die nach den Potenzen der zwey fortgehen, kann leicht bewerkstelliget werden. Ihn in drey Theile zu theilen, muß auf eine ganz andere Art geschehen, die schon weit mehr voraussetzet, und wovon wir hier gar nicht reden können.

§. 61. Auf eine ähnliche Art wird man die Aufgabe auflösen müssen, eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen. Man thut dieses oft mechanisch durch Versuche mit verschiedenen Oefnungen des Cirkels, jetzt wollen wir es auf geometrische Art lehren. Es sey gegeben Fig. 54 die gerade Linie AD, welche in zwey gleiche Theile getheilet werden soll. Fig. 54. Man mache aus den Endpunkten der Linie aus A und D mit beliebiger beyde mal gleicher Oefnung des Cirkels, die aber größer als die Hälfte der Linie seyn muß, Cirkelbogens in B und E, und aus den Punkten, wo sich diese schneiden, ziehe man die Linie BE, ich sage, daß dadurch AC = CD werde, oder die gerade Linie AD in zwey gleiche Theile getheilet. Den Beweis davon werden wir leicht finden.

Es ist

$$\left.\begin{array}{l} BD = AB \\ DE = AE \end{array}\right\} \text{ aus der Construktion}$$
$$BE = BE$$

folglich $\triangle ABE \cong BDE$ §. 54.

Folglich wenn der Triangel BDE auf den Triangel ABE gelegt wird, so fällt D auf A, und CD muß = AC seyn.

Anmerkung. Ist die Linie AD zu lang, als daß man den Cirkel so weit öfnen können, so nehme man von den Enden der Linie von beyden Seiten nach der Mitte gleiche Theile ab, und setze denn den Cirkel in diese beyden Punkte F und G, und verfahre auf die gelehrte Art, so wird die gerade Linie, von H und I gezogen, gleichfalls die Linie AB in zwey gleiche Theile theilen. Denn die Linie FG wird dadurch in zwey gleiche Theile getheilet, welches nach dem obigen Beweise auch bewiesen wird, und zu jeder Hälfte kommen noch gleiche Theile FA und GD zu, und gleiches zu gleichem gethan bleibt gleiches. Also ist auch auf diese Art CA = CD.

§. 62. Durch dieses Verfahren wurde auch zugleich auf der Mitte der AC ein Perpendikel BC aufgerichtet §. 11. Denn weil sich die Triangel ABC und BCD decken, so muß der Winkel x = y seyn §. 29, und weil x und y Nebenwinkel und einander gleich sind, so müssen es rechte Winkel seyn §. 40, und also BC ein Perpendikel auf AB seyn §. 11, und weil AC = CD

Fig. 54.

§. 61.

§. 61, ein Perpendikel auf die Mitte von AD seyn.

§. 63. Allein es ist nicht genug, daß man einen Perpendikel auf die Mitte einer Linie aufrichten könne, es können Punkte in der Linie selbst gegeben seyn, worauf man einen Perpendikel aufrichten soll, oder es können auch Punkte außer der Linie gegeben seyn, von welchen man einen Perpendikel auf die Linie soll herabfallen lassen. Wir reden zuerst davon, wenn Punkte in der Linie selbst gegeben sind, worauf man Perpendikel aufrichten soll. Wenn sie in der Mitte der Linie seyn sollen, davon haben wir eben geredet. Nun mögen sie auf einem andern Punkte der Linie seyn, das ist also entweder außer der Mitte oder gar am Ende der Linie. Es soll Fig. 54 auf dem Punkt C der Linie AK ein Perpendikel aufgerichtet werden. Wenn wir die Linie AK betrachten, so ist C nicht in der Mitte derselben, denn es war in der Mitte von AD, man sieht aber gleich, daß man nur nöthig hat, von dem gegebenen Punkte C nach beyden Seiten hin gleiche Entfernung in F und G zu nehmen, nachher den Cirkel weiter als CG ist zu öfnen, und aus F und G die Cirkeldurchschnitte in H zu machen, so ist, wo sich beyde Cirkelschnitte in H schneiden, daselbst der Punkt, woraus die Linie auf den Punkt C gezogen werden muß, wenn sie ein Perpendikel darauf werden soll. Denn auch alsdenn ist FH = HG; FC = CG; HC = HC; folglich Triangel FHC ≅ Triangel CHG, also x = y, und weils Nebenwinkel, = R. Fig. 54.

Sollte am Ende einer geraden Linie KC Fig. 54 in C ein Perpendikel aufgerichtet werden, so darf man nur die gerade Linie KC nach F hin verlängern, und alsdenn auf die vorige Art verfahren. Man hat noch viel mehr Methoden, am Ende einer geraden Linie ein Perpendikel aufzurichten, die wir noch nicht anführen können. Mechanisch richtet man ein Perpendikel auf einer geraden Linie durch Hülfe eines Winkelhakens auf, (welches Werkzeug jedem bekannt ist, und aus zwey Linealen, die unter einem rechten Winkel an einander gefüget sind, besteht) dessen eine Lineal man an die gerade Linie, und seinen äußersten Punkt an den Punkt leget, wo die Perpendikulärlinie soll aufgerichtet werden, alsdenn an die andere Seite herunter die Linie zieht. Die 55te Fig. 55. figur erkläret dieses sattsam, wo auf den Punkt C der geraden Linie AG ein Perpendikel soll aufgerichtet werden, und man daher an BC die Linie ziehet.

Fig. 54. §. 64. Es sey aber nun Fig. 54 der Punkt B außer der geraden Linie AK gegeben, von welchem auf die gerade Linie ein Perpendikel soll gefället werden. Man setze alsdenn den Cirkel in B, und mache mit beliebiger Oefnung desselben, die aber wenigstens so groß seyn muß, daß sie die Linie AK überschreitet, zwey Durchschnitte in A und D, man setzet mit dieser Oefnung den Cirkel in A und D, und machet unterwärts der geraden Linie zwey Cirkelschnitte in E, und ziehet durch die beyden Punkte BE die Linie BC

auf

auf AK, so wird BC perpendikulär auf AK seyn. Wenn man die Hülfslinien AB, BD, AE, DE und CF, welches die verlängerte BC ist, ziehet, so ist der Beweis eben derselbe als §. 61.

§. 65. Daß aus einem Punkte C auf einer geraden Linie AK nur ein Perpendikel kann errichtet werden, und aus einem Punkte B über der Linie AK auch nur ein Perpendikel auf die gerade Linie kann gefället werden, lehret schon die Natur der Sache. Denn es wären z. E. zwey Perpendikel möglich, so müßte doch jeder eine andere Neigung gegen die Linie AK haben, beyde sollten rechte Winkel mit ihr machen, also müßten zweyerley Art rechter Winkel seyn, welches aber ein Widerspruch, also unmöglich ist.

§. 66. Wir gehen noch zu einigen andern Sätzen, die mit diesen theils eine Verwandtschaft haben, theils daraus folgen. Wir bemerken erstlich, daß in einem jeden **gleichschenklichten** Triangel die Winkel an der Linie, worauf die beyden gleichen Schenkel stehen, auch gleich sind. Es sey Fig. 56 der Triangel ABC ein gleichschenklichter Triangel, so daß AC = BC. Die Linie, worauf AC und BC stehen, oder die Linie AB wollen wir die **Grundlinie** nennen. Wir sagen, daß der Winkel x alsdenn = y sey. Man theile die Grundlinie AB in zwey gleiche Theile, und ziehe aus der Spitze C auf den Punkt D, wo die Mitte der Linie AB ist, die Linie CD, so Fig. 56.

ist der Beweis gleich zu führen. Denn alsdenn ist

AC = CB, weils ein gleichschenklichter Triangel ist.

AD = DB, weil wir sie gleich gemacht,

CD = CD

---

folglich △ACD ≅ △CDB §. 53.

Und also muß x = y seyn, weil sich die Triangel nun decken können, aber auch daher o = n, und r = s.

§. 67. Also wenn von der Mitte der Grundlinie eines gleichschenklichten Triangels eine gerade Linie in die Spitze desselben hier in C gezogen wird, so theilet sie den Winkel in der Spitze in zwey gleiche Theile.

§. 68. Ferner eine gerade Linie aus der Spitze eines gleichschenklichten Triangels auf die Mitte der Grundlinie gezogen, ist ein Perpendikel auf diese Grundlinie, denn weil r = s und r und s Nebenwinkel sind, so müssen es rechte Winkel seyn §. 40; also auch umgekehrt ein Perpendikel aus der Spitze eines gleichschenklichten Triangels auf seine Grundlinie theilet sie in zwey gleiche Theile, oder kömmt auf ihre Mitte zu stehen, wie jeder aus den vorhergehenden §§ auf ähnliche Art leicht wird erweisen können.

§. 69. Da man einen gleichseitigen Triangel in allen Lagen als einen gleichschenklichten betrachten kann, man mag zur Grundlinie nehmen welche Linie man will, weil die beyden darauffstehenden, immer jede so lang als die dritte Grundlinie, also auch beyde gleich lang sind, und bey jedem gleichschenklichten Triangel die Winkel an der Grundlinie gleich sind, so müssen daher in einem gleichseitigen alle drey Winkel gleich seyn, weil immer zwey davon zu Winkeln an der Grundlinie können genommen werden, und die also, wie aus dem vorigen erhellet, einander gleich sind.

§. 70. Wir haben gesehen, daß in einem gleichschenklichten Triangel die Winkel an der Grundlinie gleich waren, und in einem gleichseitigen alle drey Winkel, das läßt uns schon muthmaßen, daß die Verschiedenheit der Länge der Linien in ein und eben demselben Triangel auf die Größe der Winkel einen Einfluß haben müsse, und so ist es auch würklich. In einem Triangel sind die größern Seiten den größern Winkeln, und die kleinern Seiten den kleinern Winkeln entgegen gesetzet. Ehe wir aber diesen Satz beweisen, wollen wir erst die Wahrheit eines andern darthun, worauf sich dieser gründen soll. Es ist folgender Fig. 57. **Wenn in einem Triangel ABC eine Seite BC verlängert wird, so ist der Winkel ACD außerhalb des Dreyecks größer, als jeder von beyden inwendigen**

dinen Winkeln des Dreyecks BAC oder ABC, welche diesem auswendigen Winkel des Dreyecks oder dem Winkel ACD entgegen stehen. Um dieses zu beweisen, theile man die Linie AC in zwey gleiche Theile. Dieser Theilungspunkt sey in E, man ziehe aus der Spitze B die Hülfslinie BE von B nach E, verlängere sie in eben der Richtung bis F, so daß EF so groß sey als BE, und ziehe denn aus der Ecke des Triangels C die Linie CF, und nun wollen wir den Beweis bald finden. Es ist in denen Dreyecken AEB und FCE der Winkel $x = y$, weil sie Vertikalwinkel sind § 46. Ferner die Linie $AE =$ EC, weil wir sie gleich gemacht haben, und aus eben dem Grunde $BE = FE$, wenn aber in zwey Dreyecken zwey Linien und der eingeschlossene Winkel gleich sind, so sind sie **kongruent** §. 49. also Triangel BAE $\cong$ Triangel EFC, folglich $n = m$ §. 54. weil, wenn man nun diese Triangel auf einander leget, sie sich decken werden. Da nun der Winkel ACD, welcher die beyden Winkel $n + r$ ausmachet, größer als ECF oder $n + r > n$ alleine, so muß auch $ACD > BAE$ seyn, oder $n + r > m$, weil n alleine $= m$ war, oder Beweis in Zeichen:

Win,

Winkel x = Winkel y
BE = EF ex construct.
AE = EC ex construct.

△BAE ≅ △EFC

Winkel n = m

Winkel n = r > Winkel m.

Aber ACD ist auch größer als ABC, denn wenn man AC nach G verlängert, und nun BC in zwey gleiche Theile theilet, und übrigens wie bey diesem Beweise verfähret, so kann man auf eben die Art beweisen, daß BCG größer als ABC sey. Wir wollen es durch eine eigene Figur zeigen. Es sey Fig. 57 der Triangel ABC ≅ dem Triangel abc Fig 58, und man verfahre übrigens mit ihm auf die vorhergehende Art, so ist Fig. 57. Fig. 58.

be = ec
ae = ef
x = y

△abe ≅ △ecf

---

n = m

---

n + r > m

Weil nun aber in beyden Triangeln der Winkel bcg = BCG, da sie beyde kongruent gemacht sind, und BCG und ACD Vertikalwinkel, also gleich

sind

sind, so muß also auch Winkel ACD größer als Winkel ABC seyn, und ist also unser Satz bewiesen.

§. 71. Nun können wir zu dem Beweise fortschreiten, daß in jedem geradelinichten Triangel die größern Seiten in den größern Winkeln, und die kleinern Seiten den kleinern Winkeln entgegen gesetzet sind. In dem Triangel ABC Fig. 59 sey die Seite AC größer als die Seite AB, man nehme die Länge AB auf der Linie AC, und diese Länge ist AD; und da AB=AD, also der Triangel ABD gleichschenklicht ist, so ist der Winkel x=y §. 66, nun ist ohne Zweifel x+n>x, also auch x+n>y. Da nun der Winkel y als ein auswendiger Winkel an der verlängerten Seite des kleinen Triangels BDC betrachtet werden muß, und also laut vorhergehenden §. größer ist als der Winkel in C, so muß nothwendig um so vielmehr noch der Winkel ABC oder x+n größer als C seyn, denn x+n war schon größer als y. Dem Winkel in C stehet aber die Seite AB entgegen, die kleiner ist als die Seite AC, also der größern Seite AC stehet ein größerer Winkel entgegen, als der kleinern Seite AD; und auch umgekehrt dem größern Winkel stehet eine größere Seite entgegen, und dem kleinern Winkel eine kleinere. In Zeichen:

Fig. 59.

AB = AD ex constr.

Winkel x = Winkel y §. 66.

Winkel x + n > y

Nun ist

Winkel y > Winkel DCB §. 70

Winkel x + n > Winkel DCB

Seite AB < AC ex constr.

---

§. 72. Wir nähern uns der wichtigen Lehre von Parallellinien, wir müssen aber noch einen wichtigen Satz vorausschicken. Er ist folgender: In jedem Triangel sind allezeit zwey Winkel zusammen kleiner als 180° oder als zwey rechte Winkel. Es folget dieser Satz aus dem vorhergehenden. Denn Fig. 57. §. 70. fanden wir, daß, weil durch die Construktion der Triangel ABE = Triangel FEC, auch der Winkel n = m wäre, nun ist

n < n + r

---

folglich auch da n = m

m < n + r

---

zu beyden s addiret

m + s < n + r + s aber n + r + s = 2R. §. 41.

---

das substituiret

m + s < 2R oder als 180°.

Man nehme nun welche zwey Winkel man will in einem Triangel, so kann man, wenn man die

Linien

Linien darnach verändert, auf eben die Art diesen Satz beweisen. Fig 58 könnte man auf eben die Art beweisen, daß m + s kleiner als zwey rechte Winkel wären.

§. 73. Hieraus aber folget abermal die sehr natürliche Folge, daß also zwey an die Endpunkte einer Linie gesetzte Linien nie zusammen kommen können, wenn die beyden Winkel zusammen, welche sie mit der Linie machen, nicht kleiner als zwey rechte Winkel oder als 180° sind, aber auch, daß sie zusammen kommen, wenn die Winkel kleiner als 180° sind. Denn es mögen mal Fig. 15 die Winkel BAC und BCA entweder gleich 180° oder gröFig. 15. ßer als 180° seyn; kämen unter diesen Bedingungen die Linien BA und BC zusammen, so müsten sie mit der Linie AC, worauf sie gesetzt wären, einen Triangel ABC ausmachen, aber wir haben eben bewiesen, daß in jedem Triangel allezeit zwey Winkel zusammen kleiner als 180° sind. Also ist es ein Widerspruch wider unsern vorigen Satz §. 72. daß die Winkel BAC und BCA gleich oder gröSer als 180° seyn, und doch die Linien BC und AB zusammen kommen könnten, und also unmöglich.

§. 74. Wir kommen auf die wichtige Lehre von den **Parallellinien** und ihren Eigenschaften. **Parallellinien** sind solche Linien, welche, wenn man sie auf beyden Enden unendlich verlängert, doch niemals zusammen stoßen, wie wir schon §. 9 gesagt haben, und Fig. 7 solche vorstellet. Wann zwey solcher Parallellinien Fig. 60 AB und Fig. 60. CD

CD durch eine dritte EF unter welcher Lage es auch sey durchschnitten werden, so heißen die Winkel x und y oder m und n die **innern Winkel**, die Winkel s und r und t und u die **äußern Winkel**, und solche Winkel als x und n, ferner m und x heißen **Wechselswinkel**, anguli alterni.

Wir behaupten nun, 1) daß, wenn zwey Parallinien AB, CD durch eine dritte EF, es sey unter welcher Lage es wolle, durchschnitten werden, daß zwey solcher inwendigen Winkel zusammen, als $x + y$ oder $n + m = 2R$ oder 180° sind. 2) Daß die Wechselwinkel einander gleich sind, also daß $y = n$ und $m = x$. 3) Daß die äußern Winkel den ihnen entgegengesetzten innern gleich sind. So ist also $r = y$ oder $u = x$, wie auch $s = m$ und $t = n$. Diese drey Sätze wollen wir nun beweisen.

§. 75. Der erste Satz $x + y = 180°$. Entweder $x + y$ ist kleiner als 180°, oder es ist größer als 180°, oder es ist $= 180°$, ein vierter Fall ist unmöglich. Wäre $x + y$ kleiner als 180°, so würden die Linien AB und CD nach der Seite von B und D hin irgend einerwärts zusammen stossen, nach dem §. 73, allein das ist wider unsere Erklärung von Parallellinien. Wäre $x + y$ größer als 180°, so müsten die beyden Winkel $n + m$ kleiner als 180° seyn, denn alle viere zusammen machen vier rechte Winkel aus §. 38. Wenn man nun mehr als $180° = 2R$ davon nähme, so müste der Rest kleiner als 180° seyn. Wäre also $x + y$

größer als 180, folglich n + m kleiner als 180, so würden die Linien nach der Seite AC hin irgendwo zusammen kommen, und einen Triangel formiren, nach §. 73, und nach der Seite B und D hin würden sie aus einander gehen, allein das ist allemal wider unsere Erklärung von Parallellinien, und wider die Voraussetzung. Es bleibt also nichts übrig, als daß, wenn AB und CD parallel sind, die innern Winkel x + y, oder n + m = 180 sind.

§. 76. Der zweyte Satz y = n oder m = x.

Denn x + y = 180 voriger §. 75.
n + x = 180 weils Nebenwinkel §. 38.
——————— folglich
x + y = n + x
x = x
——————— x abgezogen
y = n

Eben so n + m = 180 voriger §. 75.
n + x = 180
———————
n + m = n + x
———————
m = x

§. 77. Der dritte Satz r = y

Denn x + y = 180 §. 75.
r + x = 180 §. 38.
———————
x + y = r + x
x = x
———————
y = r

Auf

Auf eben diese leichte Art kann man beweisen, daß $u = x$, $n = t$ und $s = m$ sey, welches wir also nicht weiter berühren. Daß auch $s = u$ sey, folget ferner daraus, weil $s = m$ und u und m Vertikalwinkel sind, die einander gleich sind §. 46. also da $m = u$, auch $s = u$. Eben so zeiget es sich, daß auch $t = r$ sey, weil $t = y$ ist, und nach dem vorhergehenden $y = r$.

§. 78. Aus diesen bewiesenen drey Sätzen folget auch das umgekehrte derselben, nemlich, wenn zwey Linien AB, CD, also von einer dritten durchgeschnitten werden, daß 1) die innern beyden Winkel $x + y = 180°$, oder 2) die Wechselswinkel $y = n$, oder auch 3) die äußern Winkel den entgegengesetzten innern gleich, also $r = y$, daß alsdenn die Linien AB, CD parallel oder gleichlaufend sind. Es ist auch nur nöthig, daß man einen einzigen von diesen dreyen Sätzen als wahr findet, so sind die Linien gleichlaufend, weil, wenn einer von diesen dreyen wahr ist, die andern daraus gefolgert werden können. Wir bemerken noch, daß das Zeichen des Parallelismus zweyer oder mehrerer Linien oder Flächen folgendes sey $/\!/$.

§. 79. Es wird einem jeden von selbst in die Augen fallen, daß, wenn auch mehr als zwey Parallellinien gegeben sind, alle diese hier angeführte Sätze an ihnen wahr seyn werden, denn man kann ja allzeit zwey davon, welche man will,

Fig. 61. zusammen betrachten. Es sind Fig. 61. α. die α drey Parallelen, AB, CD, EF, weil AB ∥ CD ist, so ist also r = w, t = r, aber CD ist auch ∥ EF, also m = x, auch weil alle drey unter sich parallel sind, also auch AB ∥ EF m = w, also m = x = r = w = t, und aus eben den Gründen n = y = s = v = u, oder auch u = s = n u. s w. wie man denn das leicht einsiehet. Ferner wenn zwey Linien AB und EF einer dritten CD parallel sind, so sind sie auch unter einander parallel. Dieses fällt bald in die Augen. Denn man ziehe die gerade Linie Hl unter welcher Lage man will, durch zwey Parallelen, hier durch AB und CD, sie wird alsdenn auch durch die dritte mit CD parallele Linie durchgehen, weil nun nach der Voraussetzung AB ∥ CD, so ist r = w; ferner war nach der Voraussetzung CD ∥ EF, also auch m = r, folglich ist statt r die m, weils gleiche Dinge sind, gesetzet, m = w, also ist AB ∥ EF, §. 76. welches wir beweisen wollten.

§. 80. Aus diesen Sätzen folget es nun leicht, wie man Parallelen zu konstruiren hat. Fig. 60. Wenn man Fig. 60 eine dritte Linie EF, unter welcher Lage man will, ziehet, und auf derselben zwey Punkte annimmt, wo die Parallellinien durchgehen sollen, und alsdenn x = u oder y = r machet §. 77 und beyde Linien in ihrer Richtung verlängert, so sind sie parallel. Hieraus läßt sich der mechanische Handgrif erklären, wie man Parallellinien durch Hülfe eines Lineals, und eines hölzernen oder elfenbei-

fenbeinern rechtwinklichten Triangels ziehet. Es sey Fig. 61 β die Linie AB gegeben, mit welcher man durch den Punkt C eine Parallele ziehen soll. Fig. 61. β Man lege an die Linie AB eine Seite des rechtwinklichten Triangels CDE, und an die Hypotenuse EC dieses hölzernen rechtwinklichten Triangels ein Lineal GF, welches man veste hält, so daß es in seiner Lage unbeweglich bleibt, und nun bewege man den hölzernen Triangel so weit herauf, bis die Schärfe CD an den Punkt C kömmt, wodurch man die Parallele mit AB ziehen soll, und ziehe denn an die Schärfe CD diese Linie, so muß CD mit AB parallel seyn; denn weil die Linie, die man an dem Lineal FG gedenken kann, immer in der Lage blieb, weil man das Lineal vest hielt, und durch die Bewegung des hölzernen Triangels von AB also eben das geschahe, als ob sich die Linie AB in eben der bleibenden Neigung gegen FG nach C heraufbewegte, so mußte auch der Winkel, den diese Linie mit FG machte, beständig einerley bleiben, weil ein Winkel die Neigung zweyer Linien gegen einander ist, also wenn nun CD würklich gezogen war, $x = y$ seyn, welches eine Eigenschaft der Parallellinien ist § 77.

78. Die mechanische Konstruirung der Parallellinien mit dem Parallellineal, welches ein jeder leicht kennet, und von jedem gezeigt werden kann, beruhet auf ähnlichen Gründen, welches Lineal wir, um nicht zu weitläuftig zu seyn, nicht ferner erklären, da überdem, wenn die Löcher in den Gelenken desselben weiter werden, welches durch den

öftern Gebrauch leicht geschiehet, man keine genaue Parallellinien damit mehr ziehen kann, und also diese Methode vorzuziehen ist.

§. 81. Daß Fig. 60 durch einen gegebenen Punkt A mit einer andern Parallellinie CD nur eine Parallellinie AB gezogen werden könne, folget von selbst schon daraus, daß, wenn noch eine andere möglich wäre, sie auch nothwendig in einer andern Lage als AB liegen müßte, die Winkel würden also nicht mehr dieselben bleiben, sondern größer oder kleiner werden, folglich das nicht mehr von ihnen eintreffen, was §. 75. 76. 77. bewiesen ist. Da das aber bey Parallellinien seyn muß, so ist es unmöglich, durch eben den Punkt noch eine oder mehrere Parallellinien zu ziehen.

§. 82. Aus diesen Betrachtungen lassen sich viele wichtige Folgen ziehen, deren einige wir jetzt anführen wollen. Wir haben schon §. 21 erkläret, was ein **Parallelogram** sey, nemlich ein Viereck, worinn jede zwey entgegengesetzte Seiten, als Fig. 20, 21, 22, 23, gleich sind, als AB = CD und
Fig. 62. AC = BD. Eine gerade Linie, wie BD Fig. 62. welche von einem entgegengesetzten Winkelpunkte des Parallelograms zu dem andern gezogen ist, heißt die Diagonale desselben Fig. 62. DB ist die Diagonale des Parallelograms DABC. Wir behaupten von selbiger, daß sie das Parallelogram in zwey gleiche Theile theilet. Denn

weil AB = CD
AD = CB
DB = DB

so ist △ADB ≅ △CDB §. 54.

Sie decken sich also, und folglich ist jeder die Hälfte vom Parallelogram. Es gilt dieses für alle Parallelogramma, und ist leicht darauf zu appliciren.

§. 83. Decken sich aber diese beyden Triangel einander, so ist auch der Winkel x = y und n = m; und ist dieses, so ist auch DC ∥ AB und weil n = m AD ∥ CB §. 74. 78. Also **wenn in einem Viereck diese zwey gegen einander stehende Seiten gleich sind, so sind sie auch parallel.**

§. 84. Gleichfalls gilt es auch umgekehrt, wenn unter den vier Seiten eines Vierecks je zwey gegen einander stehende Seiten parallel sind, so sind sie auch gleich. Denn es sey nun DA ∥ CB, und DC ∥ AB, und man ziehe die Diagonale DB, so muß kraft §. 74, 76. alsdenn y = x und n = m oder die Wechselswinkel gleich seyn; weil nun die Linie DB sich selber gleich ist, und n = m auch y = x ist, also alsdenn beyde auf beyden Seiten liegende Winkel auch gleich sind, so muß §. 51, weil eine Seite und die beyden daran liegenden Winkel den Triangel bestimmen, Triangel DCB = Triangel ADB, also DA = CB

und AB = DC. Also überhaupt **Parallellinien zwischen Parallellinien sind gleich.**

§. 85. Aus allen diesen Lehren von den Parallellinien folget auch noch, daß in jedem Parallelogram die Summe zweyer an einer Seite liegenden Winkel, als Fig. 62, DAB und ADC, oder s und n + y zusammen = 2 R oder 180° seyn. Denn wäre dieses nicht, so wären auch die Linien DC und AB nicht parallel, sind sie aber parallel nach §. 82 so mögen sie von einer dritten, dafür man hier die eine Seite des Vierecks die CD nehmen kann, unter jeder Lage geschnitten werden. So müssen die beyden innern Winkel, als hier s und n + y, zusammen = 2 R seyn. Das gilt für Quadrat, Recktangel, Rhombus und Rhomboides, wie man leicht einsehen wird.

Ist daher in einem Parallelogram nur ein Winkel ein rechter Winkel, als hier Fig. 62 der Winkel s, so müssen alle andere auch rechte Winkel seyn, denn s und n + y zusammen müssen = 2 R seyn, laut vorhergehenden, also da s = R, so muß es n + y auch seyn.

Ist nun in einem Parallelogram Fig. 22 ein Winkel schief, so müssen sie auch alle schief seyn, denn wenn nach dem vorhergehenden x + u = 2 R und u oder x größer als ein Rectus, so muß der andere nothwendig kleiner seyn.

§. 86. In jedem Parallelogram sind die Winkel, die einander diagonaliter (das heißt, nach

nach der Richtung der Diagonale) entgegengesetzt sind, gleich. Denn Fig. 62, wenn nach §. 81 Triangel DAB ≅ Triangel DCB, so muß auch t = s seyn, weil sich die Triangel decken, und wenn sie sich decken, der Winkel t auf s zu liegen kömmt. Wenn man auch noch solch schiefes Parallelogram als Rhombus und Rhomboide zeichnet, und es zur Erleichterung mit den Buchstaben Fig. 62 bezeichnet, so kann man eben den Beweis dafür gebrauchen, und sich also auch auf alle einzelne Fälle davon überzeugen.

§. 87. Auf diesen Gründen, die wir jetzt vorgetragen haben, beruhet die Verzeichnung der Parallelogramme. Wenn man Parallelogramme verzeichnen soll, so darf bey einem Quadrat nur eine Seite CD Fig. 20. gegeben seyn, weil alle Seiten gleich sind, und der Winkel auch bekannt = R. Beym Rhombus Fig. 22 muß außer der einen Seite BD auch einer der Winkel, als der Winkel x gegeben seyn. Beym Oblongo oder Recktangel Fig. 21 müssen zwey Seiten BD und AB gegeben seyn, der Winkel ist, wie bekannt, = R. Beym Rhomboides Fig. 23 müssen nicht nur zwey Seiten BD und AB, sondern auch einer der Winkel als der Winkel x gegeben seyn. Wir wollen nun einen Rhomboides zeichnen, der andern Parallelogramme Zeichnung wird man daraus leicht lernen. Es ist gegeben Fig. 63 die Seite A, die Seite B, und der Winkel c, man soll daraus ein Parallelogram verzeichnen. Man neh- Fig. 63.

me, welche Linie man will oder soll, zur Grundlinie, hier sey es die Linie AB, sie sey = der Linie A, man setze an A den Winkel C nach §. 57. und machte alsdenn AC = der gegebenen Linie B; man setze den Cirkel, dem man die Oefnung AB = A gegeben hat, mit dieser Oefnung mit dem einen Schenkel in C, und mache ein Stück vom Kreisbogen in der Gegend D; man nehme die Länge AC mit dem Cirkel, setze den einen Schenkel in B, und mache ein Stück vom Kreisbogen auch in der Gegend D, wo sich beyde Kreisbogen schneiden, da ziehe man von C und B Linien hin, so ist das verlangte Parallelogram verzeichnet. Sollte man ein Quadrat von der gegebenen Seite A = AB machen, so darf man nur auf AB eine eben solche Seite rechtwinklicht setzen, und übrigens wie vorhin verfahren.

Beym Recktangel, wo zwey Seiten A und B Fig. 62 gegeben sind, setzet man B gleichfalls auf A rechtwinklicht, und verfährt übrigens wie vorhin.

Beym Rhombus oder der Raute darf nur eine Seite A, und der Winkel c gegeben seyn, man setzet auf die Seite AB = A die gleich lange Seite unter dem gegebenen Winkel c, und verfähret auch übrigens, wie wir vorhin gesagt haben.

§. 88. Wir entwickeln noch einige wichtige Folgen, die wir aus der Lehre von den Parallellinien herleiten können, und die uns in der Lehre von den Triangeln ein groſses Licht anzünden wer-

werden. Wir haben §. 72 gesehen, daß die Summe zweyer Winkel in einem Triangel allezeit kleiner sey, als 2 R, allein dadurch haben wir noch nicht erfahren, wie groß denn die Summe aller drey Winkel in einem geradlinichten Dreyecke sey. Jetzt können wir dieses bestimmen. **In jedem geradlinichten Dreyecke ist die Summe aller drey Winkel, oder es sind alle drey Winkel zusammen, genau gleich zween rechten Winkeln, oder 180°.** Wir sagen, in einem geradlinichten Dreyecke, denn in einem sphärischen können alle drey Winkel mehr ausmachen, aber davon reden wir jetzt nicht. Der Beweis unsers Satzes wird gar nicht schwer seyn. Man nehme Fig. 64 ein Dreyeck, von welcher Art man will, und mache eine seiner Seiten, welche man will, hier AB zur Grundlinie, so daß die Schenkel AC und BC darauf stehen; ziehe durch die Spitze des Dreyecks C, wo die beyden Schenkel zusammen kommen, mit der Grundlinie AB eine Parallele EF, und bezeichne alle dadurch entstehende Winkel, und auch diejenigen, die sich im Dreyecke befinden, so ist, weil AB ∥ EF, $y = m$ und $x = n$ §. 76. $z = z$ oder sich selber gleich. Nun ist $n + z + m = 2R = 180°$ §. 41. Man substituire anstatt des n und m die ihnen gleiche Winkel x und y, also $x + z + y = 2R = 180°$. Fig. 64.

§. 89. Auch diese Wahrheit ist sehr reich an wichtigen Folgen. Wenn in einem Dreyecke

zwey

zwey Winkel gegeben sind, so sind sie alle gegeben, denn der dritte ist alsdenn noch so groß, als das, was diesen beyden gegebenen zusammen noch an 2R fehlet, oder er ist das Complement zu 2R. Ist x und y bekannt, so wären sie also = $x + y = 2R - z$ und z daher

$$z = 2R - (x + y.)$$

Es sey x und y zusammen = 140, so ist z = 180 − 140 = 40.

§. 90. In einem gleichseitigen Triangel sind alle Winkel gleich §. 69, folglich muß jeder = $\frac{180}{3} = 60$ seyn.

In einem gleichschenklichten Triangel darf nur ein Winkel gegeben seyn, um sie alle drey zu wissen. Denn weil zwey davon gleich sind §. 66, so ist entweder der gegebene einer von den beyden gleichen, oder nicht, ist er einer von den beyden gleichen, und man verdoppelt ihn, und zieht diese Summe von 180 ab, so hat man den dritten Winkel. Z. E. Fig. 16 ist ein gleichschenklichter Triangel, da x = y ist. Es sey x oder y gegeben, einer davon sey = 70, so ist z = 180 − 2.70 = 180 − 140 = 40. Man findet eben so leicht die beyden gleichen Winkel oder einen davon, wenn der ungleiche gegeben ist; man zieht nemlich von 180 Grad den gegebenen Winkel ab, so hat man die Summe der beyden gleichen, der Rest durch 2 dividiret giebt einen dergleichen Winkel, z. E. es sey z gegeben = 40, so ist x +

Fig. 16.

y

$y = 180° - 40° = 140°$, und also x oder $y = \frac{140°}{2} = 70°$.

§. 91. Hätte man daher einen gleichschenklichten Triangel, wo einer der Winkel = R wäre, wie Fig. 65 der Triangel ABC, da AB = BC und x = R, so ist y oder z = jeder = 45°, denn beyde zusammen sind das Complement zu zwey Rektis. Fig. 65.

§. 92. Sind daher in zwey Triangeln eine Linie und zwey Winkel gleich, die Winkel mögen beyde an einer Seite liegen oder nicht, so sind sie doch kongruent. Denn der dritte Winkel in dem einen muß alsdenn dem dritten Winkel in dem andern auch gleich seyn, weil in jedem dieser Triangel die dritten Winkel gleiche Complemente zu zwey rechten Winkeln sind; folglich nach dem Lehrsatze §. 52 eine Seite und beyde an der Seite liegende Winkel in beyden Triangeln gleich sind. Es sey Fig. 66 in den Triangeln ABC und abc, die Seite AB = ab, und $x = \alpha$, und $z = \gamma$, so muß auch $y = \beta$ seyn, also da AB = ab, und die beyden Winkel x und α und y und β in beyden Triangeln gleich sind, so müssen die Triangel sich decken §. 52. Fig. 66.

§. 93. Aus allen diesen werden wir nun auch ferner die Folge ziehen, daß in jedem Triangel nicht mehr als ein rechter Winkel, und um so viel mehr nicht mehr als ein stumpfer statt finden

den könne. Denn weil alle drey Winkel zusammen 180° ausmachen, und einer davon ist schon $= R = 90°$, so sind die andern beyden zusammen nur noch 90 Grad, also konnte nur ein rechter Winkel im Triangel seyn. Da ein stumpfer Winkel $> 90°$ ist, so konnte um so viel mehr nur ein stumpfer Winkel sich im Triangel befinden.

§. 94. Wir haben §. 71 gesehen, daß in jedem Triangel die größern Seiten den größern Winkeln entgegengesetzt sind, in jedem rechtwinklichten Triangel Fig. 65 ABC wird also die Seite AC oder die Hypotenuse größer, als jede der übrigen Seiten seyn, weil sie dem Winkel $x =$ R entgegengesetzt ist, und die andern beyden Winkel jeder nothwendig kleiner als ein rechter seyn müssen. Dieses hilft uns noch, eine Anmerkung vom Perpendikel zu machen, die wir, weil wir davon handelten, noch nicht sagen konnten, weil wir noch keinen Beweis davon hatten. Der Perpendikel HM auf eine Linie AB Fig. 67 ist die kürzeste Linie, welche Fig. 67 von einem gegebenen Punkt H auf diese gerade Linie AB gezogen werden kann. Denn laßt uns annehmen, es sey noch eine andere gerade Linie auf einer oder der andern Seite von HM möglich, welche kürzer sey, es sey HL oder HP, so ist auf beyde Fälle, die Linien HL oder HP mögen nahe oder weit von M liegen, weil $x = y = R$, ist die Linie HL oder HP eine Hypotenuse des Triangels HLM oder HMP

Fig 65.

Fig 67.

HMP, also größer als HM, weil in jedem △ die größte Linie dem größten Winkel entgegengesetzt ist, und wenn ein Rektus darinn ist, kein Winkel darinn größer seyn kann, wie wir eben gezeigt haben, folglich muß der Perpendikel HM wol die kürzeste Linie auf dem Punkt H auf die Linie AB seyn. Die Entfernung zweyer Parallellinien wird also eine gerade Linie seyn, welche auf beyden Parallellinien perpendikular stehet, wie Fig. 68 die Linie IH zwischen den Parallelen NM und RS vorstellet, und nach einiger Betrachtung wird man auch bald einsehen, daß es keine andere Linie nie seyn kann. Denn weil die wahre Entfernung zweyer Dinge von einander nothwendig der nächste Weg seyn muß von einem zu dem andern, so muß der Perpendikel IH nothwendig die wahre Entfernung der NM und RS seyn. Weil, da die Linien immer gleich weit von einander bleiben, jede andere aus I auf die Linie RS gefällte Linie, dergleichen Ip ist, länger wäre (voriger §. 93). Fig. 68.

§. 95. Wir haben die wichtigen Folgen aus den Parallellinien noch lange nicht erschöpft, wir führen noch ein Paar an, die auch ihren Nutzen sehr weit verbreiten. **In jedem Triangel ABC Fig. 69 ist der äußere Winkel an einer verlängerten Seite** (hier der Winkel x) **gleich den beyden innern ihm entgegengesetzten Winkeln zusammen** z und y. **Unser Satz ist also** $x = z + y$. **Den Beweis wollen wir leicht finden.** Fig. 69.

Denn

Denn $x + n = 2R$ nach §. 38, ferner ist
$z + y + n = 2R$ nach §. 88,
also
$x + n = z + y + n$
$n =$ n subtrahiret
$x = z + y$ welches der Satz war, den wir beweisen wollten.

§. 96. Hieraus folgt von selbst, daß, wenn also der äußere Winkel an der verlängerten Seite gegeben ist, so sind nicht nur die beyden innern zusammen oder ihre Summe, sondern der dritte n auch gegeben, weil $x + n = 2R$, so muß, wenn x bekannt ist, n das Complement zu zwey Rektis seyn §. 39. Sehr oft weis man durch den gegebenen äußern Winkel auch jeden der innern. Denn n ist gleich durch x bekannt. Fig. 69. Wäre nun z. E. der Triangel ABC ein gleichschenklichter Triangel, so daß AC und AB also gleich wären, so wüßte man den Winkel y, welcher gleich dem Winkel n, und z wäre, als ihr Complement zu 180° oder zwey rechten Winkeln.

§. 97. Wir erklären noch einen Satz, der mit aus den Parallellinien folgt, in Ansehung der Winkel, weil er sehr leicht daraus fließet, und doch zuweilen vorkommt. Es ist folgender Fig. 70. Wenn man einen Winkel n zwischen zwey Parallellinien AB und CD macht, so daß seine Schenkel EF und EG an die Parallellinien

nien

nien stoßen, und daselbst mit den Parallellinien auch zwey Winkel x und y machen, so ist n so groß als x und y zusammen, oder der Winkel n ist die Summe der beyden Winkel x und y, man verlängere den einen Schenkel FE noch bis an die Parallellinie CD, also hier bis H, und bezeichne den daraus entstehenden Winkel, so wird man den Beweis hievon leichtlich führen können.

Unser Satz war $n = y + x$.

Nun ist $n = z + y$ weils der auswendige Winkel an der verlängerten Seite des Triangels EHG §. 95.

Ferner ist $z = x$ nach 76, weil es Wechselwinkel

——— also anstatt z die x

$n = x + y$.

Wir werden nun die hauptsächlichsten Stücke erkläret, bewiesen und erläutert haben, welche die Aufschrift dieses dritten Kapitels versprach, wir gehen nun zum vierten Kapitel fort.

Das vierte Kapitel.

Die Verwandlung der bisher betrachteten geradlinichten Figuren in andere ihnen völlig gleiche.

§. 98.

Wir erklären erstlich nun die Verwandlung geradlinichter Figuren, um uns dadurch

zu noch wichtigern Betrachtungen den Weg zu bahnen. Daß jedes Viereck, die Trapezia und Trapezoides ausgenommen, durch die Diagonale in zwey gleiche Triangel verwandelt wird, haben wir im 82ten § schon bewiesen, und dabey auch einen Begrif von der Diagonale gegeben. Nun läßt sich auch ein jedes Trapezium und Trapezoides durch die Diagonale in zwey Theile theilen, aber diese Theile sind nicht gleich. Ueberhaupt lassen sich alle Vielecke oder jede geschlossene geradlinichte Figuren, sie mögen regulär oder irregulär seyn, durch Diagonallinien in verschiedene Triangel eintheilen, die aber darum nicht gleich sind. Es läßt sich aber jedes Polygon durch Diagonallinien, die sich einander nicht durchkreuzen, in **so viel Triangel theilen, als es Seiten hat, weniger zwey, und es lassen sich in selbigem so viel Diagonallinien ziehen, als es Seiten hat, weniger drey.** Z. E. Fig. 71 und 72. ABC, DEF sind zwey Sechsecke, eins irregulär, das andere regulär, beyde haben sechs Seiten, also müssen sie sich nach unserer Angabe in 6 — 2 Triangel, oder in **vier** Triangel theilen lassen, wenn sich die Diagonalen nicht durchkreuzen, und es müssen 6 — 3 oder 3 Diagonallinien, die sich nicht durchkreuzen, darinnen können gezogen werden, und man wird auch dieses bey der Betrachtung der Figuren finden. Die Diagonalen sind BF, BE, BD, woraus denn mit den Seiten der Figuren die Triangel entstehen. Man hätte die Diagonalen anders ziehen kön-

Fig. 71 & 72.

können, aber mehr würde man nicht, ohne daß sie sich nicht durchkreuzt hätten, herausgebracht haben. Man versuche es mit andern Vielecken, und man wird eben das finden. Der Beweis liegt schon darinn, weil jeder Triangel drey Seiten hat, und also bey jedem Vieleck, hier bey den Sechsecken, zwey Seiten, die an den äußern Enden liegen, hier BC und CD und AB und AF, mit zu den Triangeln genutzt werden, da man von allen übrigen Seiten als FE, ED nur eine in den Triangeln gebraucht, weil die Diagonalen die übrigen Seiten der Triangel ausmachen. Also muß jedes Polygon nothwendig zwey Triangel weniger haben, als es Seiten hat. Ein Viereck, es sey also regulär oder irregulär, wird sich in 4 — 2 oder in zwey Dreyecke theilen lassen, und es werden sich 4 — 3 Diagonalen oder 1 Diagonale dadurch ziehen lassen u. s. w.

§. 99. Hieraus wird sich nun auch leichtlich folgern lassen, wie groß die **Summe aller Winkel überhaupt** in einem Vielecke oder jeder geradlinichten geschlossenen Figur sey, ob man schon dadurch allein noch keinen einzigen Winkel bestimmen kann. Die Summe aller Winkel in einem Vieleck wird so **vielmal** 180° oder 2 R seyn, als Triangel sich darinnen befinden, weil jeder Triangel 180° enthält §. 88. Also in einem Sechsecke, worinn sich vier Triangel befinden, müßte die Summe aller Winkel = 8°. 4 = 720° oder = 8 Rektis seyn, es sey regulär oder irregulär. In einem Viereck, es sey regulär oder

irregulär, wäre also die Summe aller Winkel = 180°. 2 = 360° = 4 Rektis, und wenn wir allgemein das Vieleck von n Seiten annehmen, so hat es also n — 2 Triangel, und wird also überhaupt (n — 2). 180° Winkel haben, oder (n — 2) 2 R.

Man sieht auch daraus, daß in irregulären und regulären Figuren, wenn in beyden einerley Anzahl Seiten sind, auch einerley Summe von Winkeln statt findet, obschon die Winkel unter sich selbst höchst verschieden seyn können.

§. 100. Wir verwandelten jetzt alle geschlossene geradlinichte Figuren in eine gewisse Anzahl von Triangel, und alle diese Triangel zusammen müßten freylich wol die ganze Größe der Figur vorstellen. Nun möchte man wol auch fragen, ob sich denn alle solche Triangel zusammen nicht in **eine** geradlinichte Figur, z. E. Dreyeck, Viereck, oder was man wollte, verwandeln ließen, die aber eben so groß wäre, und nicht mehr und nicht weniger Oberfläche enthielte? Allerdings, und wir wollen davon auch reden, wenn wir noch erst einige Sätze, die Verwandlung der Figuren betreffend, erkläret und bewiesen haben.

§. 101. Wir berühren unserer Absicht gemäs nur die vornehmsten Stücke in jeder, also auch in dieser Lehre. Jedes Quadrat läßt sich in ein Reckrangel verwandeln, das eben so groß ist, von welchem auch die Länge ei-

ner

ner Seite gegeben seyn kann. Es sey Fig. 73 das Quadrat ABCD gegeben, welches in ein Fig. 73. Recktangel soll verwandelt werden, dessen eine Seite die Linie n seyn soll. Man zeiche nun, wie Fig. 74 geschehen, dieses Quadrat ABCD Fig. 74. hin, und verlängere die eine Seite des Quadrats bis E, so daß BE die Länge der gegebenen Linie n wird; eben so verlängere man die Seite AC des Quadrats, daß auch AF = der gegebenen Linie n. Man verlängere unbestimmt die Seiten CD und AB des Quadrats nach H und G hin, und ziehe durch EF mit AB und CD eine Parallele nach I hin, ferner ziehe man von E durch A eine Linie, und verlängere sie, bis sie die verlängerte CD irgendwo erreichet, hier ist es in G, man ziehe aus dem Punkte G abermal eine Parallele mit ED und FC, hier die GI, welche Parallele aus G die verlängerte AB und FE in H und I schneiden wird. Ich behaupte nun, daß das Recktangel AHIF gleich oder eben so groß sey, als das Quadrat ABCD. Das wollen wir nun beweisen.

Satz: $\square ABCD = \square AHIF$.

Denn $\triangle EGD \cong \triangle EGI$.

---

weil $EG = EG$ oder sich selber gleich.

ferner $IE = GD$ } Denn Parallelen zwischen Parallelen sind gleich §. 84 und ist $ED \parallel IG$, weil wir sie $\parallel$ gemacht, und $IE \parallel GD$ aus eben dem Grunde.
und $IG = ED$ }

Folglich $\triangle EGD \cong \triangle EGI$ §. 54.

Nun ist ferner $\triangle HAG \cong AGC$ } weil HAGC ein Parallelogram, da $HA \parallel GC$ und $HG \parallel AC$ und AG eine Diagonale §. 82.
aus eben den $\triangle FAE \cong EAB$ }
Gründen

---

also gleiches von gleichem abgezogen, bleibet gleiches } $\triangle EGD - \triangle AGC - \triangle EAB =$ $\triangle EGI - \triangle HAG - \triangle FAE$

---

zieht man aber von beyden Seiten das wirklich ab, so bleibt } $\square ABCD = \square AHIF$.

Und unser Satz ist also bewiesen.

Wäre das Quadrat ABCD Fig. 73 ein Rhombus gewesen, und es wäre n die Länge ei-

ner

ner Seite eines Rhomboides gegeben worden, so würde man auf eben die Art einen Rhombum in ein Rhomboides verwandelt haben, und es würde auch eben dieser Beweis dafür gelten. Man wird leicht diese Figur nach den Angaben des vorigen §. 100 zeichnen können, und wird auch eben den Beweis dafür gebrauchen können.

Anmerkung. Durch Rechnung ließe es sich nun weit schneller noch verwandeln, welches wir aber hier nicht vortragen können, weil wir die Ausmessung der Figuren noch nicht gehabt haben.

§. 102. Allein auch jedes Recktangel läßt sich in ein Quadrat verwandeln. Der §. 100 zeigte nur überhaupt, daß dieses wahr sey, weil das Recktangel IHFA = dem Quadrate ABCD, allein die Verwandlung von einem Recktangel zum Quadrat zeigte er noch nicht. In der Lehre vom Cirkel §. 246 werden wir dieses auf eine leichte Art zeigen, und also diesen Satz nachholen. Dort werden wir die geometrische Construktion erklären, aber schon im folgenden Kapitel von der Ausmessung der Figuren, im §. 124 wird man schon sehen, wie es sich sehr leicht durch Rechnung bewerkstelligen läßt.

§. 103. Wenn wir die Figur 73 nochmal genau betrachten, so werden wir auch einsehen, daß, weil Fig. 73 IGED auch ein Parallelogram ist, man, wenn man z. E. Fig. 73 eine Dia-

gonale EG zieht, und darauf einen Punkt, wo man will, hier ist er in A, annimmt, man hiedurch mit den andern Seiten Parallellinien, nemlich HB und FC zieht, man dadurch vier Parallelogramma bekömmt, davon die beyden, wodurch die Diagonale nicht geht, gleich sind, wie wir das §. 100 bewiesen haben. Nähme man
Fig. auf der Diagonale EG jeden andern Punkt, z. E.
77. M an, und zöge PN und RS parallel mit den andern Seiten, so würden wieder die beyden Parallelogramme, wodurch die Diagonale nicht gienge, gleich seyn, und man könnte es auf eine ähnliche Art beweisen, es wäre alsdenn □MNSD = □RMIP.

§. 104. Auf die Art §. 100 kann man jedes Recktangel in ein anderes Rektangel von gegebener Höhe verwandeln, und man verfähret eben so, wie da gelehret ist, wenn das Quadrat ABCD Fig. 73 auch ein Rektangel wäre.

§. 105. Ehe wir weiter gehen, schicken wir eine Erklärung voraus, welche wir hier gebrauchen. Wenn man eine Seite einer Figur, auf welcher die andern Seiten derselben stehend vorgestellet werden, ihre **Grundlinie** nennet, so ist eine Linie, welche von ihrer obersten Seite auf die untere **perpendikular** gezogen wird, dann ihre Höhe. So ist z. E. Fig. 74 die Linie FA die Höhe des Rektangels lFHA, wenn HA als seine Grundlinie betrachtet wird. Beym Triangel ist die Höhe eine Linie, die von seiner Spitze

auf

auf die Grundlinie, das ist, auf die Linie, darauf die andern beyden Seiten stehen, **perpendikular** gezogen wird. Fig. 75. Beym Triangel ABC die Linie AD, wenn BC als seine Grundlinie betrachtet wird. Fig. 75. Ist der Triangel schief Fig 76 α, daß also diese Perpendikularlinie AD nicht in den Triangel fallen würde, so muß man seine Grundlinie verlängern, bis sie darauf kann gezogen werden. Fig. 76 α. So ist also Fig. 76 AD die Höhe des Triangels ABC, wenn BC als seine Grundlinie betrachtet wird. Man kann übrigens zur Grundlinie annehmen, welche Seite man will. So hätte man Fig. 76 α auch AC zur Grundlinie annehmen, und aus B einen Perpendikel auf AC können fallen lassen, so wäre BN die Höhe des Triangels gewesen.

§. 106. Dieses leitet uns auf einen wichtigen Satz, **Parallelogramme von einer Grundlinie und einer Höhe sind gleich**, wenn auch eines davon noch so schief ist. Wir wollen rechtwinklichte Parallelogramme Fig. 76 α, 77, 78 verzeichnen, und andere schiefwinklichte, die aber gleiche Höhe haben, daran legen, und von allen Fällen unsern Satz beweisen. Dieser Fälle aber sind drey möglich. Da wir gesagt haben, daß die Grundlinien gleich seyn müssen von den Parallelogrammen, so wird man auch die Grundlinien so auf einander legen können, daß eine nicht länger ist als die andere. Sind die Höhen gleich, so müssen beyde Parallelogrammen zwischen zwey Parallelen stehen, wel-

che jetzt bey uns beyde die verlängerte Grundlinie und die ihr gegenüber stehende verlängerte Linie eines rechtwinklichten Vierecks seyn soll, weil das Parallelen sind §. 84. Leget man die beyden Grundlinien der Parallelogramme, die man mit einander vergleichen will, auf einander, so können drey Fälle entstehen. 1) Fig. 76 β das Parallelogram EBCF, welches so groß ist als das ABCD, kann solche Winkel haben, daß, wenn die Grundlinien BC beyder Parallelogramme auf einander gelegt sind, die eine Seite EB sich zwischen D und A in E endiget, also ganz ins rechtwinklichte Parallelogram ABCD fällt. 2) Kann es auch seyn, daß, wie bey Fig. 77 der Winkel des schiefen Parallelograms so beschaffen ist, daß, wenn beyder Grundlinien CD auf einander gelegt werden, die eine Seite BC des schiefen Parallelograms eben die Diagonale von dem rechtwinklichten ausmacht, und 3) Fig. 78 kann auch diese Seite BC so liegen, daß ihr Ende B ganz ausser der Linie DF kömmt. Mehr Lagen sind nicht möglich. (Denn wenn zwey Parallelogramme wären, wo alle Seiten auf einander fielen, da zweifelt ohnedem niemand, daß die gleich sind.) Von diesen drey Fällen wollen wir nun unsern Satz beweisen.

Fig. 76 β.

Fig. 77.

Fig. 78.

Also Fig. 76 β. Satz □ABDC = □EBFC.

Denn

Denn AD = BC nach der Erklärung des Pa:
ferner EF = BC rallelogr. §. 21,

folglich

AD = EF weil beyde einer dritten BC
ED = ED gleich sind.

AD − ED = EF − ED gleiches von gleichem abgezogen,

das ist aber

AE = DF.

Nun ist ferner AB = DC } aus der Erklärung des
und EB = FC } Parallelogr. §. 21,
und wie wir AE = DF
eben gezeiget,

folglich

△ABE ≅ △DCF
also da doch EBDC = EBDC oder sich seber
auch das gleich ist,
Stück

so ist folglich △ABE + EBDC = DCF + EBDC

oder welches einerley □ABDC = □EBFC.

Dieses ist der Beweis des ersten Falls. Nun des zweyten.

Also Fig. 77. Satz □ABCD = □BCDF.

Denn

Denn $\left.\begin{matrix} AB = CD \\ BF = CD \end{matrix}\right\}$ §. 21.

$AB = BF$

weil ferner $AC = BD$
und $CB = DF$ §. 21.
und aus dem obigen $AB = BF$

so ist $\triangle ABC \cong \triangle BDF$
weil nun auch $\triangle BCD = \triangle BCD$ oder sich selber gleich,

so ist der $\triangle ABC + \triangle BCD = BDF + BCD$

oder in der Figur $\square ABCD = \square BCDF$.

Dieses ist der Beweis des zweyten Falls. Nun des dritten.

Also Fig. 78. Satz $\square ACDF = \square BCEF$.
Denn $\left.\begin{matrix} AD = CF \\ BE = CF \end{matrix}\right\}$ §. 21.

$AD = BE$
ferner $DB = DB$ oder sich selber gleich

folglich $AD + DB = BE + DB$ weil gleiches zu

oder in der Figur $AB = DE$ gleichem addi-
da nun ferner $AC = DF$ ret ist.
und $CB = FE$

so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Nun

Nun ist ferner △DBN = △DBN od. sich selber gleich
also △ABC — △DBN = △DFE — △DBN gleiches
das ist in der Figur ACND = BNFE zu gleich. addiret.
ferner da △CNF = △CNF od. sich selber gleich
ACND + △CNF = BNFE + △CNF so ist gleiches zu
das ist in der Figur □ACDF = □BCEF gleichem addirt.

Welches der Beweis des dritten Satzes ist.

§. 107. Man siehet hieraus, daß man ein jedes noch so schiefwinklichtes Parallelogram in ein rechtwinklichtes von **gleichem** Inhalt oder gleich großer Oberfläche verwandeln könne. Man darf nur ein rechtwinklichtes aufrichten, welches eine gleiche Grundlinie und Höhe mit ihm hat. Die Höhe von dem Parallelogram BCFE Fig. 78, ist, wie wir schon gesagt, die Linie DF, oder jeder zwischen den beyden Parallelen AE und CG gezogener Perpendikel. Gleichfalls erhellet es auch hieraus, daß man jedes rechtwinklichte Parallelogram in ein schiefwinklichtes, von welchen Winkeln man will, verwandeln kann. Fig. 79 zeiget Parallelogrammen an, die alle einander gleich sind, und alle gleich dem Parallelogram ABCD. Fig. 79.

Ueberhaupt wird man leicht einsehen, daß, wenn auch schon die Parallelogrammen nicht in solcher Lage stehen und man nur beweisen kann, daß sie einerley Grundlinie,

linie, und einerley Höhe haben, so sind sie gleich.

§. 108. Nicht nur alle Parallelogrammmen, die einerley Grundfläche und Höhe haben, sind einander gleich, sondern auch alle **Dreyecke, die einerley Grundlinien und Höhe haben, sind einander gleich**, so wenig man es auch aus dem ersten Anblick mancher solcher zwey oder mehrern Dreyecke schließen sollte. Daß man jedes Parallelogram durch die Diagonallinie in zwey gleiche und ähnliche oder kongruente Dreyecke verwandeln kann, ist uns schon bekannt §. 82. Man wird auch sich leicht daher vorstellen können, daß, wenn man nun zwey Dreyecke hat, die kongruent sind, und man sie also an einander setzet, daß zwey gleiche Seiten einander entgegen kommen, daraus ein Parallelogram werden müsse. Durch Hülfe dieser Betrachtungen wollen wir unsern Satz beweisen Fig 80. Die Linien HB und CD sind zwey Parallellinien, zwischen welchen die Dreyecke MNP und MNQ stehen sollen. Weil sie gleiche Grundlinien haben, so decken die beyden Grundlinien einander genau, und daß sie einerley Höhe haben, erhellet daraus, weil sie zwischen Parallellinien stehen. Es ist also unser Satz Fig. 80.

Fig. 80.

$$\triangle MNP = \triangle MNQ.$$

Man ziehe aus N nach E die Linie NE parallel mit PM, so wird $PE = MN$, weil Parallelen zwischen Parallelen gleich sind nach §. 84, so hat

man

man das Parallelogram PMNE. Gleichfalls trage man MN aus der Spitze des Triangels MNQ von Q nach F, so daß MN = QF und ziehe die NF, die parallel mit QM seyn wird, so hat man wieder ein Parallelogram MQNF. Diese sind gleich nach dem §. 106, weil sie beyde gleiche Grundlinie und Höhe haben, also werden auch wol ihre Hälften gleich seyn, aber die Hälfte des Parallelograms PMNE ist der Triangel PMN, weil PN die Diagonale dieses Parallelograms ist, welche sie in zwey gleiche Theile theilet §. 82. Und weil eben das die Linie QN mit dem Parallelogram QMNF thut, so muß auch der Triangel MNQ die Hälfte von diesem Parallelogram seyn. Folglich da die Hälften dieser Parallelogramme gleich sind, so muß Triangel PMN gleich seyn Triangel MNQ, welches der Satz war, den wir beweisen wollten.

§. 109. Daß hieraus folge, daß also ein jedes Parallelogram doppelt so groß sey als ein Dreyeck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, siehet man bald ein. Das Parallelogram MNQF ist doppelt so groß als der Triangel MNQ, beyde haben gleiche Grundlinie und Höhe.

Daß unter zwey Dreyecken, die gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen haben, dasjenige das größte sey, welches die größte Höhe habe, und wenn sie gleiche Höhe haben, aber ungleiche Grundlinien, dasjenige das größte sey,

wo-

welches die größte Grundlinie hat, ist so leicht einzusehen, daß es jedem in die Augen fällt, denn nur auf den Fall wären sie ja gleich, wenn ihre Grundlinien und Höhen einerley wären.

§. 110. **Es lassen sich aber auch alle Dreyecke in Parallelogrammen verwandeln,** die gleich groß als die Dreyecke sind, ja sogar in solche Parallelogrammen, von welchen **eine Seite** und ein Winkel gegeben ist. Wir wollen erst überhaupt zeigen, wie aus einem Dreyeck ein Parallelogram entstehen könne, das mit dem Dreyecke gleiches Inhalts sey.

Fig. 81. Es sey Fig. 81 der Triangel ABC gegeben, welchen man in ein Parallelogram verwandeln soll. Man ziehe mit seiner Grundlinie BC eine Parallele AM durch seine Spitze, hiedurch wird die Höhe des Triangels ABC nun bestimmet; man theile die Grundlinie des Triangels in zwey gleiche Theile in E, und ziehe aus E eine Perpendikularlinie auf die Parallele oder die ED auf NM; man ziehe eine gleiche Linie aus C auf die AM, dadurch entstehet das Recktangel DEFC, denn weil bey E und C rechte Winkel, so ist DE ∥ FC, nun war DF schon ∥ EC, und Parallelen zwischen Parallelen sind gleich. Ich behaupte jetzt, daß das Recktangel DEFC = dem Triangel ABC. Dieses zu beweisen, ziehe man noch aus der Hälfte der Grundlinie des Triangels ABC aus E nach seiner Spitze A die Linie EA, so wollen wir den Beweis bald geben.

Also

Also unser Satz □ DEFC = △ ABC.

Denn △ AEC = ½ □ DFEC nach §. 109. weils mit dem Triangel gleiche Höhe und Grundlinie hat.

Ferner △ AEC = △ ABE nach §. 108. weil EC = BE und die Höhen beyder △ gleich.

folglich △ ABE = ½ □ DFEC

multipliciret mit 2.

folglich 2△ ABE = □ DFEC also auch

aber

2△ ABE = △ ABC

△ ABC = □ DFEC welches wir beweisen wollten.

Man hätte auch anstatt des rechtwinklichten Parallelograms, das wir erwählet haben, ein schiefwinklichtes nehmen können, und der Winkel DEC hätte können gegeben seyn, man hätte eben die Konstruktion machen können, und FC wäre denn ∥ DE gezogen. Es würde auch eben der Beweis dafür gegolten haben, weil nach §. 106. ja Parallelogramme von einerley Grundlinie und Höhe gleich sind.

§. 111. Aber man kann auch ein Dreyeck in ein Parallelogram von gleicher Oberfläche verwandeln, davon nicht nur der eine Winkel des Parallelograms, sondern auch eine Seite gegeben

ist. Es sey Fig. 82 der Triangel ABC gegeben, Fig. 82. die Seite m, welches die eine Seite des Parallelograms seyn soll, und das Parallelogram soll ein Recktangel seyn, also seine Winkel alle rechte Winkel. Man verlängre BC unbestimmt, und ziehe mit dieser Linie eine unbestimmte Parallele durch die Spitze A des Triangels; man theile, wie im vorigen §. 110. BC in zwey gleiche Theile in E; setze darauf eine senkrechte Linie ED, und mit der eine andere Parallele, also auch senkrechte Linie aus C, die Linie CF; man verlängere die DE aus E, um die gegebene Länge m, also bis G; man ziehe mit der BC abermal eine Parallele unbestimmt aus dem Punkte G, welche auf GD auch unter einem rechten Winkel stehen wird, weil DEC = Recto gemacht wurde §. 79. man verlängere auch FC, bis sie die Parallele erreichet, also bis H, und also wird EG = CH; man ziehe durch G und C eine Diagonale, die man verlängert, bis sie die verlängerte AF irgendwo schneidet, hier ist es in I, und ziehe aus I nun die Linie IK, gleichfalls ∥ mit FH oder DG. Ich behaupte, daß nun das Recktangel CHLK = dem Triangel ABC. Denn wenn man erst das Parallelogram DGKI alleine betrachtet, und den bewiesenen Satz §. 103. betrachtet, so muß das Parallelogram DFEC gleich seyn dem Parallelogram CHLK, weil unter den dortigen Umständen die beyden Parallelogrammen, welche die Diagonale nicht berührte, einander gleich waren.

Also

Also erstlich ist
□CHLK = □DFEC aber
□DFEC = △ABC nach vorhergehendem §. da man den Beweis noch wiederholen kann.

so ist
□CHLK = △ABC also weil hier zwey Dinge dem dritten gleich sind, und also unter einander gleich seyn müssen.

welches wir beweisen wollten.

Wenn man einen Winkel gegeben hätte, welchen das Parallelogram CHLK hätte haben sollen, so hätte man nur dürfen den Winkel DEC konstruiren, und übrigens auf die gelehrte Weise verfahren, so würde eben ein so großes Parallelogram für den gegebenen Triangel entstanden seyn, und auch dieser Beweis wäre dafür gültig. Allein wir wissen auch schon aus §. 107. wie man jedes rechtwinklichte Parallelogram in ein schiefwinklichtes vom gegebenen Winkel verwandeln kann.

§. 112. Man möchte fragen, ob man denn auch nicht viele gegebene Dreyecke in ein Parallelogram verwandeln könnte? O ja, und es geschiehet auf eben die Weise, wie man eine jede geradlinichte Figur aus vielen Seiten, und wenn sie auch noch so irregulär ist, in ein Parallelogram verwandelt. Wenn man jede geradlinichte Figur in so viele Dreyecke durch Diagonalen, die sich

nicht schneiden, vertheilet, so kann man diese Figur in Parallelogram, wie man will, verwandeln, indem man jeden Triangel erst in ein Parallelogram von einer bestimmten Seite und Winkel verwandelt, und denn alle diese Parallelograme an einander setzet. Es sey die geradlinichte Figur ABCDE Fig. 83 gegeben, welche in ein Parallelogram soll verwandelt werden. Man theile die Figur erst durch die Diagonallinien in Dreyecke BCD, EBD und ABE; nun mache man von dem Triangel BCD nach §. 111. ein Parallelogram von einem bestimmten Winkel und Seite. Wir wollen ein Recktangel dazu nehmen, und es mag das Parallelogram FGHI seyn, dessen Seite FH bestimmt seyn mag. Von eben solcher einer Seite, als FH ist, verwandle man den Triangel BED auch in ein Parallelogram, und das mag das Parallelogram KLMN seyn, da KL = FH. Eben so mache man es mit dem dritten Triangel BAE, und in dem daraus entstandenen Parallelogram sey OP = FH. Weil alle diese aus den drey Triangeln entstandene Parallelogramme zwey gleich lange Seiten haben, indem FH = GI = KL = MN = OP = QR, auch aller Parallelogrammen Winkel gleich sind, so kann man sie ja also an einander schieben, daß ein einziges Parallelogram daraus wird, dessen zwey gegen einander überstehende Seiten die Länge FH = QR, und die andern beyden die Länge FG + KM + OQ = HI + LN + PR hätten. Daraus wird also das Parallelogram FHQR entstehen, worinn jede dieser

Fig. 83.

ser einzelnen Parallelogramme mit punktirten Linien bezeichnet sind. Man hat also die geradlinichte Figur ABCDE Fig. 82 in ein Parallelogram verwandelt. Wären auch die Triangel nicht in der Figur, sondern jeder alleine gewesen, so siehet man, daß man eben so hätte verfahren müssen, sie in ein Parallelogram alle zu verwandeln, und daß man das hätte thun können, wenn man auch noch so viel Triangel gehabt hätte.

§. 113. Wären die Triangel alle gleich, so dürfte man nur einen davon in ein Parallelogram verwandeln, und so viel Parallelogramme von dieser Größe so vielmal an einander setzen, als man Triangel hätte. oder wenn z. E. das Parallelogram FGHI, Fig. 83 aus einem Triangel entstanden wäre, so dürfte man nur eine Seite desselben FG so vielmal an einander setzen, als man Triangel hätte, und an dieser Seite, die dadurch entstünde, und an der Seite FH das neue Parallelogram, das alle Triangel enthielte, errichten.

§. 114. Wir bemerkten §. 82. beym Parallelogram, daß es durch die Diagonale in zwey gleiche Theile getheilet wurde, die einander **kongruent** waren. Es sey Fig. 84 ABCD ein solches Parallelogram, und AC seine Diagonale, wenn man diese Diagonale wieder in E in zwey gleiche Theile theilet, und durch diesen Theilungspunkt E eine gerade Linie, unter welcher Lage man immer will, ziehet, hier sey es die FG, so wird durch diese Linie das Parallelogram in Fig. 84.

zwey **Trapezia** getheilet, die beyde gleich groß sind, oder gleich viel Oberfläche haben. Diesen Satz wollen wir nun auch beweisen. Er ist folgender. Trapez. FBAG = Trapez. FCDG. Denn es ist $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ nach §. 82.

ferner $\triangle FEC \cong \triangle AEG$ denn bey E sind x und y Vertikalwinkel §. 46, und der Winkel n = m, weils Wechselwinkel, da BC ∥ AD §. 76, und EC = AE, weil wir es gleich gemacht, also nach §. 51. die beyden Triangel kongruent.

folglich

gleiches subtrahiret $\triangle ABC - \triangle FEC = \triangle ACD - \triangle AEG$

das ist in der Figur Trapez. FBAE = Trapez. GDCE.

wieder die beyden gleichen $\triangle$

$\triangle AEG = FEC$ addiret

also

$FBAE + \triangle AEG = GDCE + \triangle FEC$

das ist in der Figur Trapez. FBAG = Trapez. FCDG, welches wir beweisen wollten. Man hätte die Linie FG durch den Theilungspunkt E der Diagonale AC mögen gelegt haben, wie man gewollt hätte, so würde man diesen Beweis auf eben die Art haben führen können; da es aber der Lagen der Linien FG durch den Theilungspunkt E unendlich

viele

viele geben kann, so wird man also leicht auch einsehen, daß sich ein Parallelogram auf die Art immer in unendlich verschiedene Trapezia theilen lasse, welche gleich sind.

§. 115. Wir haben gelernet, wie man eine jede geradelinichte Figur in Dreyecke, diese wieder in Parallelogramme, gerade und schiefwinklichte, und die Parallelogramme in Quadrate verwandeln könne, und wie man also überhaupt eine jede geradlinichte Figur in eine andere von gleichem Inhalt verwandeln könne. Nun müssen wir noch untersuchen, ob man wol zwey oder mehrere Quadrate in eines verwandeln könne? Auch diese Frage beantworten wir mit ja, und kommen nun auf den berühmten Lehrsatz, welchen man das pythagorische Theorem nennet, und welcher den größten Einfluß in alle Wissenschaften der ganzen Mathematik hat, und daher auch öfters der Magister Matheseos genennet wird. Was ein rechtwinklichter Triangel sey, und daß diejenige Seite von ihm, welche dem rechten Winkel entgegen gesetzt ist, die Hypotenuse heiße, haben wir schon §. 20 erklärt. Wenn man einen solchen rechtwinklichten Triangel ABC Fig. 85, 86 aufrichtet, und auf alle seine Seiten ein Quadrat setzet, nemlich auf AB, BC, AC, so daß jedes die Seite eines Quadrats wird, wie hier in den Figuren geschehen ist, so ist das Quadrat der Hypotenuse AC so groß als die andern beyden Quadrate der Cathetorum, oder der andern beyden Seiten zusammen. Also Fig. 85 & 86.

das Quadrae ADCF ist so groß als die Quadrate BCHG + KIBA, welches man kürzer ausdrücket ACq = BCq + ABq, oder auch $AC^2 = BC^2 + AB^2$.

Um diesen wichtigen Satz zu beweisen, muß man einige Hülfslinien ziehen. Man ziehe aus dem Punkte B eine Parallellinie mit der einen Seite des Quadrats der Hypotenuse mit CF, dadurch wird das Quadrat der Hypotenuse in zwey Parallelogrammen getheilet, wovon das eine ADLE dem Quadrate, das auf AB stehet, gleich seyn soll, und das andere LCEF soll dem Quadrate, das auf BC stehet, gleich seyn. Wenn wir das werden bewiesen haben, so wird unser Lehrsatz ganz richtig seyn, denn der Beweis gilt von allen Quadraten aller möglichen rechtwinklichten Triangel. Um durch die vielen Hülfslinien keine Verwirrung zu verursachen, haben wir Fig. 85 und Fig. 86 zwey **kongruente** Triangel aufgerichtet, davon also die Quadrate gleicher Seiten auch gleich groß sind, und auch die Parallelogrammen, die in dem Quadrate der Hypotenuse befindlich sind. Von Fig. 85 wollen wir beweisen, das Quadrat ABIK sey = dem Parallelog. ALDE, und von Fig. 86 das Quadrat BCHG sey = dem Parallelog. CLFE, weil beyde Parallelogrammen das Quadrat der Hypotenuse ausmachen, so wird alsdenn der Satz richtig seyn. Also um den Satz Fig. 85 zu beweisen, ziehe man noch die Hülfslinien KC und die Diagonale KB, imgleichen auch die DB und die Diagonale DL. Man siehet aus der Figur, wo-

hin

hin sie müssen gezogen werden. Und nun Fig. 85
1) ABq = Parallelog. ADLE.

Denn x = y = Recto, weils Winkel in Quadraten sind §. 21.

z = z addiret

---

x + z = y + z

ferner KA = AB weils Seiten eines und eben desselben Quadrats §. 21.

AC = AD aus eben dem Grunde

---

folglich △ACK = △ADB weil in jedem zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich §. 49.

nun ist ferner

△KAB = △ACK weil IC ∥ KA und △ zwischen Parallelen und von gleicher Grundlinie gleich sind §. 108, diese haben die Eigenschaften, weil KA von beyden die Grundlinie

ferner ist

△ADB = △DAL aus eben dem Grunde, denn AD ∥ BE, weil bey D und E Rekti, und AD ist beyder △ Grundlinie

also anstatt △ACK und △ADB die ihnen gleiche △ substituiret

so ist △DAL = △KAB

aber △DAL = ½ ADLE, weil DL eine Diagonale §. 82

und △KAB = ½ ABIK aus eben dem Grunde,

also 2△DAL = 2△KAB

2△DAL = Parallelogr. ADLE, aber

2△KAB = Quadrat KAIB oder AB^2 und

also Parallelogr. ADLE = ABq.

Nun der zweyte Satz. 2) BCq = Parallelogr. LCEF Fig. 86.

Denn x = y = Recto
z = z

x + z = y + z

ferner AC = CF, weils Seiten eben desselben Quadrats

CG = BC aus eben dem Grunde,

folglich △ACG = △FBC, denn in jedem sind zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich.

Nun

Nun ist ferner
$\triangle ACG = \triangle BCG$, weil sie beyde gleiche Grundlinie CG haben, und auch gleiche Höhe, indem CG ∥ HA, wozwischen sie stehen, und die müssen parallel seyn, weil bey C und B rechte Winkel sind.

Eben so ist
$\triangle FBC = \triangle FLC$ aus eben dem Grunde beyder Grundlinie ist FC, und sie haben gleiche Höhe, weil sie zwischen EB und FC stehen, die ∥ sind, per constructionem.

Also anstatt $\triangle ACG$ und $\triangle FBC$ das gleiche substituiret,

so ist $\triangle BCG = \triangle FLC$, aber

$\triangle BCG = \frac{1}{2} BCHG$ und $\triangle FLC = \frac{1}{2} LCEF$ { weil BG und LF Diagonalen sind

$2\triangle BCG = BCHG$
$2\triangle FLC = LCEF$ da nun

$\triangle BCG = FLC$ aus dem vorhergehenden, so würden

$2\triangle BCG = 2\triangle FLC$

das ist aber dafür das ihnen gleiche substituiret

BCHG oder BCq = Parallelogr. LCEF.

Wir

Wir haben also aus 1) ABq = Parallelogr. ADLE
und aus 2) BCq = Parallelogr. LCEF

also addirt ABq + BBq = Par. ADLE + LCEF

das ist in der Figur ABq + BCq = ACq
und dieses war der Satz, den wir beweisen wollten.

Dieser Satz ist ungemein wichtig und fruchtbar, und wir werden seinen häufigen Nutzen öfters finden.

§. 116. Wollte man einen mechanischen Beweis, der aber nur auf einen Fall passet, finden, so setze man Fig. 87 zwey Linien AB und BC rechtwinkicht auf einander, und theile die AB in drey gleiche Theile, und setze eben solcher vier Theile auf BC von B an, und ziehe die Linie AC, so ist also $AC^2 = AB^2 + BC^2$, und weil $AB = 3$ und $BC = 4$, folglich $AC^2 = 3^2 + 4^2$, und das wirklich quadriret $AC^2 = 9 + 16 = 25$, so muß $\sqrt{AC^2}$ oder $AC = \sqrt{25}$ seyn, oder $\sqrt{25} = 5$, also $AC = 5$, welches auch eintreffen wird, wenn man AC mit eben solchen Theilen messen will.

Fig 87.

§. 117. Wir wollen nun uns noch ein Paar Folgen aus diesem Satze entwickeln, die diesem Kapitel zum Theil unmittelbar angeben. Man sieht hieraus, daß man zwey Quadrate, sie mögen auch noch von so verschiedener Größe seyn, ganz leicht in eins verwandeln kann, man

darf

darf nur des einen seine Seite rechtwinklicht an die Seite des andern setzen, und die Hypotenuse ziehen, so ist die Hypotenuse die Seite des Quadrats, welches so groß ist als beyde zusammen, z. E. Fig. 88 AB ist die Seite des einen Quadrats und BC die Seite des andern, so ist AC die Seite des dritten, das so groß ist alle beyde, weil Fig. 88.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

Hätte man der Quadrate drey, die alle zu einem Quadrate werden sollten, so nimmt man die gefundene Seite AC wieder zu einer Seite in einem rechtwinklichten Triangel, und setzet daran wieder die Seite des dritten Quadrats, und zieht abermals die Hypotenuse, so hat man wieder die Seite eines Quadrats, das so groß ist, wie alle drey zusammen, und so verfährt man immer weiter, wenn man noch mehrere Quadrate hätte, die alle zu einem Quadrate werden sollten.

Man pflegt zur Abkürzung nicht die Quadrate selbst hinzuzeichnen, sondern nur die Seiten des rechtwinklichten Triangels, weil man sich die Quadrate selbst leicht vorstellen kann.

§. 118. Man kann das, was wir eben §. 117 gelehret haben, auch noch auf eine kürzere Art bewerkstelligen. Es mögen folgende vier Quadrate ABCD, EFGH, IKLM, NOPQ Fig. 89, 90, 91, 92 gegeben seyn, woraus ein Quadrat soll gemacht werden. Man lege die Seiten zweyer Quadrate rechtwinklicht zusammen, es sey des Quadrats AD und EH, und diese bey- Fig. 89. 90. 91. 92.

Fig. 93. beyden Seiten mögen Fig. 93 AD und DC seyn, man ziehe die Hypotenuse AC, so hat man die Seite des Quadrats, das so groß ist als beyde, also die Quadrate Fig. 89 und Fig. 90 sind schon in eins verwandelt, wir wissen nemlich seine Seite. An A setze man rechtwinklicht die Seite des dritten Quadrats Fig. 91, diese sey AE, und ziehe die Hypotenuse CE, so hat man die Seite von einem Quadrate, welches so groß ist als alle drey. An E setze man wieder rechtwinklicht eine Seite des vierten Quadrats Fig. 92, es sey hier die EF, und ziehe die Hypotenuse FC, so hat man die Seite eines Quadrats, welches alle viere in sich enthält, wie aus der Construktion selbst erhellet, und aus dem vorhergehenden §. 117 erläutert wird.

§. 119. Daß es daher leicht sey, ein Quadrat zu verdoppeln, wird jeder bald einsehen. Wenn bey einem rechtwinklichten Triangel Fig. 88 die Seite BA = BC wäre, so wäre AC die Seite eines Quadrats, das so groß wäre als beyde, und man hätte also das Quadrat, das gegeben war, verdoppelt. Aber man kann hiezu ganz kurz kommen. Wenn man ein Quadrat, das gegeben ist, verdoppeln soll, z. E. das Quadrat ABCD Fig. 89, so darf man nur darinn eine Diagonale BC ziehen, so ist das die Seite eines Quadrats, das doppelt so groß ist, als das Quadrat ABCD, denn weil bey D ein rechter Winkel, so ist

BDq + DCq = CBq, aber BD = DC, also
BDq + BDq = CBq

2BDq = CBq, und also BC ist die Seite eines doppelt so großen Quadrats.

§. 120. Man kann aber auch nicht nur die Summe zweyer Quadrate durch das pythagorische Theorem finden, sondern auch die Differenz zweyer Quadrate, das heißt, wenn man zwey Quadrate hat, welche beyde ungleich groß wären, und man will wissen, wie viel das eine größer ist als das andere, so kann man durch den pythagorischen Lehrsatz ein Quadrat machen, das so groß ist, als die Differenz dieser beyden Quadrate, oder das so groß ist, als das eine Quadrat größer war, wie das andere. Man hat Fig. 89 und 92 die beyden Quadrate ABCD und NOPQ; man will ihre Differenz wissen. Man nehme Fig. 94 ihre Seiten, welche F und E seyn mögen; man ziehe eine gerade Linie EA unbestimmt, und setze an ihrem Ende E die kleinste der Seiten beyder Quadrate, also hier die Linie E, rechtwinklicht auf, welches EB seyn mag. Nun nehme man die Linie F, als die Seite des größten Quadrats, zwischen dem Cirkel, setze die eine Spitze in B, und mache mit der genommenen Weite F, als dem Radius, einen Cirkelbogen, wo der die Linie EA schneidet, hier ist es in D, ziehe man die Linie BD. Dieses ist nun die Hypotenuse dieses rechtwinklichten Triangels, und = der Fig. 94.

Linie

Linie F = der Seite des größten beyder Quadrate.
Nun ist BDq = EDq + BEq

---

also auch BDq − BEq = EDq
aber BDq war = Fq = dem größten Quadrate unter beyden, die man vergleichen sollte, und BEq war = Eq, oder auch dem kleinsten Quadrate unter beyden, die man vergleichen sollte; von dem größten Quadrate nun das kleinste abgezogen, giebt die Differenz beyder Quadrate; das ist in der Gleichung geschehen, und da findet sich dieses = EDq, also ED ist die Seite eines Quadrats, welches die Differenz zwischen beyden ist, oder welches so groß ist, als der Ueberschuß des größern Quadrats über das kleinere.

§. 121. Wir können die Lehre von der Verwandlung der geradlinichten Figuren beschließen. Wir haben das vornehmste davon angezeigt. Mat hat gefunden, wie sich jede geradlinichte Figur in Quadrate, Parallelogramme, Recktangel, Dreyecke und mehrere alle in ein Quadrat verwandeln lassen.

Das fünfte Kapitel.

Von der Ausmessung der bisher betrachteten geradlinichten Figuren.

§. 122.

Wir sagten §. 6, wie man eine gerade Linie ausmesse. Es geschahe, indem man ihre Länge mit einer andern willkührlich angenommenen Länge, die aber nun durch den Gebrauch größtentheils festgesetzt ist, verglich, und welche willkührliche Länge man nach Linien, Zollen, Füßen und Ruthen zu benennen pflegte. Daß sich auf die Art keine Fläche wird können ausmessen lassen, wird man nach einiger Ueberlegung bald einsehen. Wie könnte man eine Fläche mit einer Linie vergleichen, da eine Linie gar keine Ausdehnung in der Breite hat §. 4, welches aber eine Haupteigenschaft einer Fläche ist. Man wird also etwas ähnliches wählen müssen, womit man eine Fläche vergleichet; also wol wiederum eine Fläche, die man willkührlich groß annehmen könnte, und wobey man zu sehen hätte, wie vielmal diese angenommene Fläche in derjenigen, die man damit vergleichen will, enthalten sey, oder wie vielmal man sie darauf herumlegen könnte, bis die andere Fläche nachgerade davon ganz bedeckt

deckt wäre. Die Geometer haben dazu die Quadratfläche gewählet, weil sich doch alle geradlinichte Figuren in Quadrate verwandeln lassen. Diese haben sie nach der Größe ihrer Seiten eine **Quadratlinie**, einen **Quadratzoll**, einen **Quadratfuß**, eine **Quadratruthe** u. s. w. genennet. Wir wollen dieses jetzt etwas weitläuftiger erklären, ob wir schon nicht gewillet sind, Lehren und Vortheile der praktischen Geometrie vorzutragen, welches wider die Absicht unserer Schrift wäre, welche nur die vornehmsten Lehren der reinen Mathematik erklären soll. Wir werden das vornehmste von demjenigen beybringen, was sich aus den vorhergehenden Betrachtungen folgern und erläutern läßt.

§. 123. Wir haben §. 6 gesehen, daß man im Decimalmaaße eine Ruthe in 10 Fuß, diesen Fuß wieder in zehen Zolle, und den Zoll wieder in zehen Linien eintheilet. Wir wollen Fig. 95. mal annehmen, daß Fig. 95 AC der zehnte Theil einer Ruthe, oder ein Fuß seyn soll, so ist AB wieder der zehnte Theil davon, oder ein Zoll, und Fig. 96. eine solche Fläche Fig. 96, wie ABCD, welche ein Quadrat ist, und deren Höhe AB = 1 Zoll, wie AB auf der Linie ist, und weil sie ein Quadrat ist, deren Breite AD auch = AB, oder deren Seiten alle = AB, heißt ein **Quadratzoll**. Nähme man die Seiten des Quadrats einen Fuß lang, so würde der von den vier Seiten eingeschlossene Raum ein **Quadratfuß** heißen. Wä-

re

re sie eine Ruthe lang, so hieße er eine **Quadratruthe**, und wäre sie uur eine Linie lang, so hieße der eingeschlossene Raum eine **Quadratlinie**. Daß ein Quadratzoll eine gewisse Anzahl Quadratlinien, ein Quadratfuß eine gewisse Anzahl Quadratzoll u. s. w. in sich enthalten müsse, ist auch leicht begreiflich, weil ja die Seiten eines Quadratzolls in Linien, eines Fußes in Zolle und einer Ruthe in Füße können eingetheilt werden. Man wird auch leicht finden können, wie viel jeder von einer höhern Größe in Flächenmaaße Einheiten des nächst niedrigern Flächenmaaßes enthalte, wie viel also z. E. ein Quadratzoll, Quadratlinien u. s. w. in sich fasse.

Wenn man Fig. 97 bey einer Quadratfläche ABCD, es mag eine Ruthe, Fuß oder Zoll seyn, jede Seite AC und CD in zehen gleich große Theile eintheilet, und alsdenn ein kleines Quadrat abcd macht, welches zu seiner Seite einen dieser Theile hat, so sieht man, daß man dieses kleine Quadrat abcd von C nach D zehnmal hinlegen kann; oder wenn man zehen solcher kleinen Quadrate hätte, so würden sie neben einander gelegt, eben in der Länge CD Platz haben, weil cd eben der zehnte Theil von CD ist. Eben so könnte man auch zehen solcher kleinen Quadrate von C nach A an einander legen, weil ac oder bd gleichfalls der zehnte Theil von AC ist. Man könnte auf die Art zehen solcher Reihen kleiner Quadrate, als abcd, neben einander legen, in welcher jeden Reihe zehen Quadrate wären, wie Fig. 97.

das aus der Figur erhellet, und dem Verstande einleuchtend genug seyn wird. Da 10.10=100, so müssen sich also 100 gleich große kleine Quadrate in dem Quadrate ABCD befinden. Dieses könnte man geschwind finden, wenn man nur die Seite CD, die in zehen Theile getheilt war, mit der Seite AC, die in eben solche zehen Theile getheilt war, multiplicirte, oder nur eine Seite mit sich selbst multiplicirte.

§. 124. Es wird also eine Quadratruthe hundert Quadratfuß, ein Quadratfuß hundert Quadratzoll, und ein Quadratzoll hundert Quadratlinien in sich enthalten. Hieraus läßt sich auch leicht finden, wie viel nun ein jedes dieser Dinge in den kleineren und kleinsten Maaßen enthalte. Da eine Quadratruthe 100 Quadratfuß hat, und ein Quadratfuß 100 Quadratzoll, so wird sie 100.100=10000 Quadratzolle, und 10000.100=1000000, oder eine Million Quadratlinien in sich enthalten.

Ein Quadratfuß hat 100 Quadratzoll, und 100.100=10000 Quadratlinien.

Ein Quadratzoll hat 100 Quadratlinien, und wenn man die Linie noch in zehen Theile theilt, die man **Scrupel** nennt, 100.100=10000 Scrupel.

Dieses ist die Eintheilung der quadratischen Messung nach **Decimalmaas**. Man erhält hiedurch den Vortheil, daß man im Multiplici- ren und Dividiren große Bequemlichkeiten das-

durch

durch hat. Wenn man z. E. Quadratruthen zu Quadratfüßen machen soll, darf man den erstern nur zwey Nullen anhängen; z. E. 63 Quadratruthen wären 6300 Quadratfuß, und 630000 Quadratzoll u. s. w. Hat man eine Menge niedriger Einheiten von dieser Art, so hat man nur nöthig, von der rechten Hand nach der linken zwey Zahlen abzustreichen, und die mit dem Namen der niedrigern Einheiten zu benennen, und was an der linken Hand überbleibt, als die größesten Einheiten zu benennen. So sind z. E. 3456789 Quadratlinien gleich also zu höhern Benennungen gebracht: 3°, $45'$, $67''$, $89'''$, oder 3 Ruthen, 45 Fuß, 67 Zoll, 89 Linien Decimalquadratmaas. Es ist dieses leicht begreiflich, wenn man bedenkt, daß dieses Abstreichen eben das sey, als wenn man die Größe immer durch 100 dividiret, weil jede Einheit der höhern Ordnung allhier 100 Theile der nächst niedrigen enthält, wodurch ebenfalls dieses herausgekommen wäre.

§. 125. Nimmt man aber Duodecimalmaas, so daß die Ruthe 12 Fuß, der Fuß 12 Zoll, und der Zoll 12 Linien hat, und die Linie 12 Scrupel, so hat aus obigen Gründen eine Duodecimalquadratruthe 144 Quadratfuß, 20736 Quadratzoll, und 2985984 Quadratlinien.

Eine Quadratruthe = 12.12 = 144 Quadratfuß. Da nun jeder Quadratfuß 144 Quadratzoll hat, so hat eine Quadratruthe 144.144

= 20736 Quadratzoll; ein Quadratzoll hat 144 Quadratlinien, also eine Quadratruthe 20736.144 = 2985984 Quadratlinien.

Ein Duodecimalquadratfuß hat 144 Quadratzoll, 20736 Quadratlinien, und 2985984 Quadratscrupel.

Ein Duodecimalquadratzoll hat 144 Quadratlinien, und 20736 Quadratscrupel.

§. 126. Wir können nun zur wirklichen Ausmessung der geradlinichten Figuren schreiten. Wie eine wirkliche Quadratruthe oder Quadratfuß und Zoll ausgemessen wird, wissen wir schon §. 123, 124. Man legt nemlich das kleine Quadrat abcd Fig. 97 so vielmal darinn herum, als es sich will herum legen lassen, und weil das in Ansehung der Höhe CA, und auch in Ansehung der Breite CD gleich vielmal geschehen kann, weil die Seiten gleich sind, so darf man nur die in Füßen, Zollen oder Linien gegebene Seite des Quadrats mit sich selber multipliciren, um den quadratischen Inhalt des Quadrats in solchen quadratischen Maaßen zu wissen, als man Längenmaas von einer seiner Seiten hat. Gesetzt aber das Quadrat Fig. 97 wäre kein völliger Quadratschuh, oder Zoll ꝛc. sondern größer oder kleiner, darum es doch ein sehr richtiges Quadrat seyn kann, wie ein jeder einsieht, so wird doch die Länge seiner Seite eine gewisse Anzahl Füße, Zolle oder Linien haben. Nun so multiplicire man diese Länge mit sich selbst, so hat man seinen

Ins

Inhalt, und hätte die Seite nicht blos Füße oder Zolle oder Linien allein zur Länge, sondern von allen/dreyen etwas, so wird es leicht seyn, alle diese Maaßen durch die Multiplikation zur kleinsten Benennung zu bringen, mit sich selbst zu multipliciren, und nachher durch die Division nach §. 124, 125 den quadratischen Inhalt der Figur zu wissen. **Wir wollen hier beständig Decimalmaas gebrauchen**; z. E. es wäre eine Seite des Quadrats ABCD Fig. 97 2 Fuß, 7 Zoll, 8 Linien, so ist das zur kleinsten Benennung gebracht, durch die Multiplikation mit 10, und Addition der kleinern Größen = 278 Linien. Nun multiplicire man das mit sich selbst, oder 278.278 = 77284 Quadratlinien, und das nach §. 124 = 7 Fuß, 72 Zoll, 84 Linien Quadratmaas.

§. 127. Man wird nun auch schon muthmaßen, wie man ein Recktangel ausmessen muß. Es sey Fig. 98 das Recktangel ABCD auszumessen. Es fällt gleich wieder in die Augen, daß man das kleine Quadrat abcd, welches man als eine quadratische Einheit angenommen hat, so vielmal darinn herum legt, als es sich will thun lassen. Hier ist die Seite CD des Recktangels eben 7 mal so groß, als eine Seite des Quadrats abcd; es ließe sich also 7 mal in die Länge CD an einander legen, und weil die Seite AC eben 4 mal so groß ist, als die Seite des Quadrats abcd, so ließen sich solcher kleinen Quadrate vier Fig. 98.

auf einander legen, solcher 7 Reihen an einander gäbe 4.7 = 28 solcher kleinen Quadrate, welche in ABCD Platz hätten, und es genau ausfüllten. Man hätte aber dieses auch gleich gewußt, wenn man nur die Länge der Seite CD mit der Länge der Seite AC multiplicirt hätte. Man wird also den quadratischen Inhalt eines Recktangels erfahren, wenn man seine Grundlinie CD mit seiner Höhe AC multiplicirt. Man muß nun freylich die Grundlinie sowol als die Höhe eines Recktangels in solchen Maaßen annehmen, die an beyden Seiten gleich sind. Ich will mich erklären. Es hätte z. E. Fig. 98 CD 3 Fuß, 5 Zoll Länge, und die Höhe des Recktangels oder AC wäre 2 Fuß, 1 Zoll, 5 Linien, so ist es sehr begreiflich, daß man beydes in Linien verwandelt. Es wäre also die Grundlinie 350 Linien, und die Höhe 215 Linien, also 350.215 ist der quadratische Inhalt = 75250 Quadratlinien = 7′ 52″ 50‴ oder 7 Fuß, 52 Zoll, 50 Linien Quadratmaas.

Fig 98.

§. 128. Wenn man sich erinnert, daß Parallelogrammen von gleicher Grundlinie und Höhe gleichen Inhalts sind §. 106, und folglich, daß man jedes noch so schiefe Parallelogram als ein rechtwinklichtes ansehen kann, welches mit ihm von gleicher Grundlinie und Höhe ist; wenn man sich ferner aus §. 94 erinnert, was die Höhe einer Figur sey, nemlich ein Perpendikel zwischen denen mit der Grundlinie gezogenen Parallellinien, so wird man gleichfalls schon einsehen,

daß

daß auch jedes noch so schiefe Parallelogram ausgemessen wird, wenn man seine Höhe mit seiner Grundlinie multiplicirt, oder daß sein quadratischer Inhalt das Produkt aus seiner **Grundlinie** in seine Höhe ist. Z. E. Fig. 99 ABCD ist ein Rhomboides, seine Grundlinie ist BC, sie sey 3 Fuß, 5 Zoll, seine Höhe ist AE, sie sey 2 Fuß, 3 Zoll, so ist sein Inhalt 35 . 23 = 805 Quadratzoll, 8 Fuß, 5 Zoll Quadratmaas. Auf eben die Art wird auch ein Rhombus ausgemessen. Fig. 99.

§. 129. Im §. 108 bemerkten wir, daß ein jeder Triangel als die Hälfte eines Parallelograms könnte betrachtet werden, das einerley Grundlinie und Höhe mit ihm hat, und daß man aus jeden zwey gleichen gehörig an einander gelegten Triangeln ein Parallelogram machen könnte. Nun wird man auch gleich gedenken, wie man jedes Dreyeck wird ausmessen können. Man darf ja nur seine Grundlinie und Höhe messen, und beyde mit einander multipliciren, so hätte man den Inhalt eines Parallelograms von der Grundlinie und Höhe als das Dreyeck ist, allein das Dreyeck ist nur halb so groß; nun so darf man dieses Produkt nur durch 2 noch dividiren, um den Inhalt des Dreyecks zu wissen. Wenn man also die Grundlinie AB eines Dreyecks Fig. 100. = a nennete, seine Höhe CD = b, so wäre sein Flächeninhalt $\frac{a \cdot b}{2}$. Denn a . b wäre der Flächeninhalt Fig. 100.

des Parallelograms ABCE, das mit diesem Triangel gleiche Grundlinie AB, und gleiche Höhe CD hat, aber der Triangel ist nur halb so groß, also muß sein Flächeninhalt seyn $\frac{ab}{2}$.

Man siehet auch hieraus, daß alle noch so verschiedene Triangel, wenn sie einerley Grundlinie und Höhe haben, am Flächeninhalt völlig gleich sind, wie wir schon §. 108 Fig. 80 zeigten, und nur hier wiederholen. Man wird es auch nun begreifen, wie es möglich, daß man mit einer Quadratfläche die spitzen Ecken in einem Triangel oder schiefen Parallelogram ausmessen könne, und alles dieses wird keinen Schwierigkeiten mehr unterworfen seyn. Exempel hievon; Es sey die Grundlinie des Triangels ABC = 8 Zoll, seine Höhe CD = 1 Fuß 9 Zoll = 19 Zoll, so ist also in der Formel $\frac{ab}{2}$ a = 8 und b = 19, also die Formel in Werthen ausgedrückt $\frac{8 \cdot 12}{2} = 76$ Quadratzoll, welches der Flächeninhalt des Dreyecks ABC wäre.

§. 130. Man siehet nun leicht ein, daß sich alle geradlinichten Figuren durch Dreyecke ausmessen lassen, weil sie sich alle in eine bestimmte Anzahl Dreyecke, wovon keine Linie die andre durchschneidet, theilen lassen, §. 98 und es wird jedem von selbst einfallen, daß die Summe des Inhalts aller dieser Dreyecke, die sich in einer solchen geradlinichten Figur befinden, auch der ganze Inhalt

halt der Figur selbst sey. Z. E. es sey Fig. 101 das irreguläre Achteck ABCDEFGH auszumessen, man hat es durch die Diagonalen HB, BG, BF, BE, CE, in 6 Dreyecke getheilet. Es wäre gleichviel, welche Seite man von jedem Dreyecke zur Grundlinie erwählte. Diese Dreyecke mögen nun Fig. 102 folgende seyn, welche wir hier konstruiren wollen, und welche sich sehr leicht werden konstruiren lassen, wenn wir die Seiten der Figur und die Diagonalen derselben gemessen hätten, und uns also von jedem Triangel alle drey Seiten bekannt waren. Es mögen nun diese Triangel seyn, 1) Triangel ahn, dessen Grundlinie bn = 1 Fuß 6 Zoll, seine Höhe ab, weil er rechtwinklicht, = 2 Fuß; 2) der Triangel hb, hgb, dessen Grundlinie hg = 1 Fuß 8 Zoll, seine Höhe bk = 2 Fuß 7 Zoll; 3) der Triangel bgf, seine Grundlinie gf = 1 Fuß 9 Zoll, seine Höhe bl = 3 Fuß 6 Zoll; 4) der Triangel bfe, seine Grundlinie fe = 2 Fuß 1 Zoll, seine Höhe bm = 3 Fuß 6 Zoll; 5) der Triangel bec, seine Grundlinie bc = 2 Fuß 3 Zoll, seine Höhe en = 2 Fuß 6 Zoll; 6) der Triangel ced, seine Grundlinie ed = 1 Fuß 4 Zoll, seine Höhe co = 2 Fuß, so werden nach §. 129 nach der Formel ab, wenn man nun die Füße zu Zollen im

2

Decimalmaaße nimmt, die Triangel folgenden Flächeninhalt haben.

Fig 101.

Fig 102

1) $\triangle ahb = \frac{20 \cdot 16}{2} = 160.$

2) $\triangle hgb = \frac{27 \cdot 18}{2} = 243.$

3) $\triangle bgf = \frac{36 \cdot 19}{2} = 342.$

4) $\triangle bfe = \frac{36 \cdot 21}{2} = 378.$

5) $\triangle bec = \frac{26 \cdot 23}{2} = 299.$

6) $\triangle ced = \frac{20 \cdot 14}{2} = 140.$

1462 Quadratzoll.

Diese durch 100 dividiret, oder nach § 124 nur abgestrichen, giebt 14 Fuß 62 Zoll Quadratmaas, und das ist der Inhalt des irregulären Achtecks Fig. 101, weil es der Inhalt aller seiner Triangel ist. Wir erwähnen nichts von manchen Vortheilen, die man in der praktischen Ausübung sich machen könnte, weil wir keine praktische Geometrie schreiben, und nur unsere Lehrsätze erläutern wollen.

Anmerkung. Wie reguläre Vielecke leicht ausgemessen werden, werden wir weiter unten in der Lehre vom Cirkel, dahin wir auch die Lehre von den Polygonen versparen, bemerken.

Fig. 103. §. 131. Daß man ein Trapezium Fig. 103 ausmessen könne, wenn man es durch eine Diagonals

nallinie in zwey Triangel theilet, muß uns aus den vorhergehenden Betrachtungen schon einleuchtend genug seyn. Allein, man kann es auch noch auf eine andere Art ausmessen, welche wir jetzt noch anzeigen wollen, welche aber auch freylich auf die Ausmessung durch Triangel mit hinaus läuft, nur daß man sich einen kleinen Vortheil dabey machen kann. Es ist Fig. 103 ABCD ein Trapezium; da es zwey parallele Seiten §. 21, hier AB und CD hat, so wird die Entfernung dieser beyden Seiten ein Perpendikel seyn, welches von einer Seite auf die andere gefället wird. Wir wollen es aus C auf die Seite AB fällen, es wird die Linie CE seyn. Nun wollen wir das Trapezium noch durch seine Diagonallinie, die wir gleichfalls aus C nach B ziehen wollen, in zwey Triangel theilen, nemlich in den Triangel ABC, und den Triangel CDB. Wenn man bey diesen beyden Triangeln, bey dem einen die Linie AB und bey dem andern die CD, welches beydes die Parallellinien sind, zu Grundlinien annimmt, so siehet man gleich, daß EC die Höhe von beyden Triangeln anzeiget, denn beyde Triangel stehen zwischen Parallelen. Da nun der Inhalt eines Triangels ausgemessen wird, wenn man seine Grundlinie mit der halben Höhe multipliciret, §. 129 so darf man nur von beyden Triangeln die beyden Grundlinien, hier beym Trapezio die beyden Parallellinien, mit der halben Länge von EC, oder mit der halben Höhe des Trapeziums multipliciren. Der Inhalt des Trapezii würde

also

also seyn $= AB. \frac{1}{2} EC + CD. \frac{1}{2} EC$, und weil $\frac{1}{2} EC$, hier ein gemeinschaftlicher Faktor $= (AB + CD) \frac{1}{2} EC = \frac{(AB + CD) EC}{2}$, welches uns folgenden Lehrsatz giebet. Der Inhalt eines Trapeziums wird ausgemessen, wenn man die Summe seiner parallelen Seiten mit seiner Höhe multipliciret, und das Produkt durch zwey dividiret, oder der Inhalt eines Trapeziums ist die Summe der parallelen Seiten, multipliciret in die halbe Höhe.

Exempel: es sey $AB = 5' 2'' = 52$ Zoll; es sey $CD = 3' 9'' = 39$ Zoll, und $EC = 2' 4'' = 24$ Zoll, so ist der Inhalt des Trapeziums $ABCD = \frac{(52 + 39) 24}{2} = 91. 12 = 1092$ Quadratzoll = 10 Fuß 92 Zoll Quadratmaas §. 124.

Anmerkung. Dieses, was wir bisher in diesem Kapitel gesagt haben, ist das vornehmste, welches aus den vorhergehenden Betrachtungen fließet, und mag für dieses Kapitel genug seyn, da wir uns auf keine praktische Betrachtungen einzulassen gewillet sind, sondern nur überhaupt die ersten Grundsätze der reinen Mathematik berühren.

Anmerkung. Aber auch die Ausmessung geradlinichter Figuren giebt uns Gelegenheit, sie leicht in andere ihnen völlig gleiche dem Inhalte nach zu verwandeln, wenn nur bey manchen Fällen etwas von ihnen gegeben ist. Es geschiehet durch

durch Rechnung oder vielmehr durch eine leichte Gleichung. Wir wollen dieses durch ein paar Exempel erläutern, die anstatt des Unterrichts dienen können. Es soll z. E. ein Triangel in ein Quadrat verwandelt werden. Wir wissen, daß wir bey einem Quadrate nur die Seite zu wissen nöthig haben, und daß durch deren Multiplikation mit sich selbst der Flächeninhalt des Quadrats uns bekannt wird. Der Inhalt eines Triangels wurde durch folgende Exempel §. 129 ausgedrücket $\frac{ab}{2}$. Dieser sey nun bekannt, und die Seite des zu suchenden Quadrats unbekannt. Es soll aber das Quadrat eben von dem Inhalte seyn. Also $\frac{ab}{2} = x^2$ folglich $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} = x$ oder die Seite des Quadrats wäre bekannt. Exempel in Zahlen: Es war §. 129 der Inhalt eines Triangels = 76 Quadratfuß. Man will ein ihm völlig gleiches Quadrat verfertigen

also $76 = x^2$

$\sqrt{76} = x = 8,71 \ldots$ Dieses ist die Seite eines gleichen Quadrats, zwar nicht völlig genau, weil der $\sqrt{76}$ eine Irrationalgröße ist; aber man kann sich doch ihm so weit nähern, als man will, $8,71 \cdot 8,71$ giebt nur $75,86 \ldots$ Quadratfuß.

Wollte man einen Quadrat durch Rechnung in einen Triangel verwandeln, so muß von dem Triangel entweder die Höhe oder die Grundlinie

gege-

gegeben seyn, weil, wenn beydes willkührlich wäre, man unendlich viele Triangel konstruiren könnte, welche alle dem Quadrate gleich wären. Es soll §. 126 das Quadrat, welches 77284 Quadratlinien enthält, in einen Triangel verwandelt werden, dessen Grundlinie 3 Fuß 2 Zoll oder 320 Linien wäre. So wäre die Höhe unbekannt, und also = x, folglich der Inhalt des Triangels, welcher dem Quadrate gleich seyn sollte,

$$= \frac{320 . x}{2} = 77284$$

also $320 . x = 77284 . 2 = 154568$

folglich $x = \frac{154568}{320} = 483{,}025$ Linien, oder 4 Fuß, 8 Zoll, 3,025 Linien. Dieses wäre die Höhe des Triangels, also $\frac{320 . 483{,}025}{2}$ muß = 77284 Quadratlinien seyn, welches man auch finden wird.

Wollte man eine Figur, deren Inhalt man auch weis, in ein Recktangel verwandeln, so muß auch entweder die Höhe oder Grundlinie des Recktangels gleichfalls gegeben seyn, und man siehet schon hieraus, wie man die Rechnung anzustellen hat. Sollte z. E. §. 130. die Figur 101, welche 1462 Quadratzoll enthält, in ein Recktangel verwandelt werden, dessen Höhe 84 Zoll wäre,

so

so darf man nur seine Grundlinie suchen, und diese sey = x also $84 . x = 1462$

$$x = \frac{1462}{84} = 17,4 \text{ Zoll, oder}$$

17 Zoll 4 Linien, und 174 Linien multiplicirt mit 840 Linien, giebt 146160 Quadratlinien oder 1461,6 Quadratzoll. Es ist nicht genau, weil 84 in 1462 nicht ganz aufgehet, und der angehängte Bruch $\frac{1}{10}$ in einen Decimalbruch verwandelt ist, den wir nicht schärfer als in die Zehntels gesucht haben.

Wir führen von dieser Materie nichts mehr an, dieses wird zureichen, sie zu erläutern.

Das sechste Kapitel.

Von der Vergleichung des Flächeninhalts geradlinichter Figuren und von der Aehnlichkeit derselben, vorzüglich von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 132.

Die Ausmessungen geradlinichter Figuren bringen uns sehr natürlich auf die Vergleichung derselben in Ansehung ihres Flächeninhalts, woraus wir denn die andern Stücke, die wir in diesem Kapitel abhandeln wollen, herleiten wer-

den. Wenn wir geradlinichte Figuren mit einander vergleichen wollen, so wollen wir untersuchen, in welchem geometrischen Verhältniß die gegen einander in Ansehung ihres Flächeninhalts stehen. Man erinnere sich hiebey, was wir im 9ten und 11ten Kapitel der Arithmetik von den Verhältnissen und Proportionen sagten, um hievon richtige Begriffe zu erhalten. Wir fangen von der Vergleichung der Parallelogrammen an.

§. 133. Einer der wichtigsten Lehrsätze in Ansehung der Parallelogrammen ist: daß Parallelogrammen, die gleiche Höhen, aber verschiedene Grundlinien haben sich unter einander wie ihre Grundlinien verhalten, und haben sie gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen, so verhalten sie sich unter einander wie ihre Höhen. Wir setzen hiebey zuerst voraus, daß die Verhältnisse rational seyn müssen, daß eine Linie, welche man mit der andern vergleichet, so in der andern enthalten sey, daß sich das Verhältniß durch endliche bestimmte Größen ausdrücken läßt, welches was es sey, uns aus dem Begrif der Rationalität und Irrationalität aus der Arithmetik noch bekannt seyn wird. Es mögen die beyden Parallelogrammen Fig. 104 ABCD und BEDF mit einander in Ansehung ihres Flächeninhalts verglichen werden sollen. Sie sollen beyde gleiche Höhe haben, und sich also beyde zwischen Parallellinien AE und CF befinden, oder doch dazwischen gelegt werden können.

Fig. 104.

nen. Ferner das Verhältniß ihrer Grundlinien sey **rational**, also daß ein gewisses Maas, welches in DF einigemal genau enthalten ist, und diese Linie ausmisset, auch in GD einigemal genau enthalten sey, oder daß diese Linie auch genau damit könne ausgemessen werden, alsdenn ist unser

Satz: Parallelog. ABGD : BEDF = GD : DF.

Denn Parallelog. ABCD = GD . BD nach §. 127. und Parallelog. BEDF = DF . BD nach eben dem §. 127. Wenn man nun gleiches für gleiches setzet, und also eine identische Proportion machet, so wird

ABCD : GD . BD = BEDF : DF . BD

oder nach §. 270. der Arithmetik ist auch

ABGD : BEDF = GD . BD : DF . BD

und nach §. 271. der Arithmetik lassen sich beyde hintersten Glieder durch BD dividiren

ABGD : BEDF = GD : DF

welches der Satz war, den wir erweisen wollten, weil GD und DF die Grundlinien beyder Parallelogramme sind. Das Verhältniß beyder Grundlinien war rational, der Theil der Grundlinie FG des Parallelograms war in DF dreymal enthalten, und in DG zehnmal, oder es war DF 3 solcher Theile, als DG 10 hatte. Das Verhältniß des Flächeninhalts beyder Figuren war also wie 3 : 10 oder beyde Glieder durch 3 dividirt wie 1 : $3\frac{1}{3}$, also das große Parallelogram war $3\frac{1}{3}$ mal größer als das kleine.

Man kann auf eine ähnliche Art auch beweisen, daß Parallelogrammen von verschiedenen Höhen,

aber von gleichen Grundlinien sich wie ihre Höhen verhalten, und wir können eben diese Figur dazu gebrauchen. Man betrachte sie also, daß AG die Grundlinie des Parallelograms ABGD, und seine Höhe GD sey, ferner daß BD die Grundlinie von BEDF, und DF seine Höhe sey.

Es ist nun BD = AG, weil AE und GF ∥ und AG und BD auch ∥ seyn sollen, also nach §. 84. BD = AG, man kann also auch eines für das andre setzen, weils gleiche Dinge sind. Wir können nun eben den Satz beweisen, als vorher, nemlich daß ABCD : BEDF = : GD : DF, und man kann eben den Beweis gebrauchen, weil man nur BD und DF als die verschiedenen Höhen betrachtet.

§. 134. Wenn aber auch das Verhältniß zwischen den Grundlinien oder Höhen der Parallelogramme nicht rational wäre, nemlich daß man keinen Theil von DF, wenn man ihn auch sehr klein annehme, zu einem gemeinschaftlichen Maaße von DF und GD annehmen könnte, so daß er in beyden **genau** einigemal enthalten sey; so kann man dennoch wol den Satz des vorigen 133 §. als wahr annehmen. Man nimmt alsdenn seine Zuflucht zu unendlich kleinen Theilen, welche man **Elemente** nennet. Und wenn man mit solchen unendlich kleinen Theilen beyde Linien DF und CD misset, so wird zwar wol das Verhältniß ausgedrücket, doch nicht rational, weil man eine irrationale Größe nie genau erreichet, aber der Fehler

kann

kann doch auch unendlich klein werden, welches man ausdrücket, er werde geringer als jede Größe, die man angeben kann, und also kann man den Satz des vorigen §. 133 als allgemein annehmen und betrachten.

§. 135. Eben diese Betrachtungen gelten auch von den Dreyecken. **Dreyecke von gleichen Höhen, aber verschiedenen Grundlinien verhalten sich wie ihre Grundlinien, und Dreyecke von gleichen Grundlinien, aber verschiedenen Höhen verhalten sich wie ihre Höhen.** Es ist dieses auch leicht begreiflich, weil man nur überlegen darf, daß jedes Dreyeck als die Hälfte eines Parallelograms angesehen werden kann, das durch die Theilung des Parallelograms durch die Diagonale entstanden ist, und was also in der Proportion von dem ganzen gesagt ist, auch von seiner Hälfte gesagt werden könne. Denn ist der Satz des 133 §. richtig Fig. 104.

$$ABCD : BEDF = GD : DF$$

so ist nach §. 271 der Arithm.

$$\frac{ABCD}{2} : \frac{BEDF}{2} = GD : DF$$

oder da $ABGD = \triangle GBD$ weil BG eine Diagonale.

und $BEDF = \triangle EDF$ aus eben den Gründen

so ist

$$\triangle CBD : \triangle EDF = CD : DF$$

gleiches für gleiches gesetzt

welches unsern Satz auf beyde Fälle ausdrücket.

§. 136. Wenn aber beydes die Höhen und Grundlinien der Parallelogrammen verschieden sind, so ist das Verhältniß ihres Flächeninhalts ein zusammengesetztes Verhältniß, welches aus dem Verhältniß ihrer Grundlinien und ihrer Höhen zusammengesetzet ist. Was ein zusammengesetztes Verhältniß sey, wissen wir aus §. 276 Arithm. Es mögen Fig. 105 die Parallelogrammen ABCD und EFGH also verschieden seyn. Sie sollen beyde rechtwinklicht seyn, damit wir gleich eine ihrer Seiten als ihre Höhe annehmen können; wäre sie schiefwinklicht, so wissen wir, wie wir nach §. 105 ihre Höhe finden. Es sey CD die Grundlinie des einen Parallelograms, und AC seine Höhe, also sein Flächeninhalt ist CD . AC nach §. 127. folglich Parallelogram ABCD = CD . AC.

Fig. 105.

AC. Ferner des kleinen Parallelograms Grundlinie = GH, und seine Höhe EG, also sein Flächeninhalt = GH.EG, also Parallelogram EFGH = GH.EG. Folglich verhielten sich beyde Parallelogramme gegen einander, wenn man in der Proportion für jedes Parallelogram seinen Flächeninhalt durch seine Ausmessung setzet:

ABCD : CD.AC = EFGH : GH.EG.

Welches eine identische Proportion ist, da die beyden ersten Glieder völlig einerley und die beyden letztern auch sind. Man kann diese Proportion nach §. 270 Arithm. also versetzen: ABCD : EFGH = CD.AC : GH.EG, aber CD.AC und GH.EG ist zusammengesetzet aus den Verhältnissen

CD : GH welches die Verhältnisse der Grundlinien sind

und AC : EG welches die Verhältnisse der Höhen sind.

---

denn daraus folget CD.AC : GH.EG.

§. 137. Weil man jeden Triangel als die Hälfte eines Parallelograms ansehen kann, so gilt auch der Satz für die Triangel, daß nemlich das Verhältniß ihres Flächeninhalts aus den Verhältnissen ihrer Grundlinien und Höhen zusammen gesetzet sey. Weil ABCD : EFGH = CD.AC : GH.EG, so ist auch $\frac{ABCD}{2} : \frac{EFGH}{2} = CD.AC : GH.$

GH . EG; und weil $\frac{ABCD}{2} = \triangle BCD$ und $\frac{EFGH}{2} = \triangle FGH$, so ist auch $\triangle BCD : \triangle FGH = CD . AC : GH . EG$. Man pflegt diese Sätze auch wol so auszudrücken, **Parallelogrammen und Dreyecke verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.**

Wir wollen doch dieses durch ein Exempel erläutern. Es sey die Grundlinie CD = 7 Zoll und die Höhe BD = 5 Zoll, so wäre der Inhalt des Parallelograms ABCD = 5 . 7 = 35 Quadratzoll. Es sey ferner die Grundlinie GH = 5 Zoll, und EG = 3 Zoll, so ist der Inhalt des Parallelograms EFGH = 5 . 3 = 15 Quadratzoll, und nun also statt der Linien die Werthe gesetzet, so verhält sich

ABCD : EFGH = 35 : 15 dieses Verhältniß läßt sich noch durch die Divis. kleiner machen.
——— : 5
= 7 : 3

Würde man beyde Zahlen des Verhältnisses noch durch 3 dividiren, so wäre das Verhältniß wie $2\frac{1}{3} : 1$, also das große Parallelogram ist $2\frac{1}{3}$ mal größer als das kleine, oder das kleine ist $2\frac{1}{3}$ mal darin enthalten. Eben das gilt für die beyden Dreyecke BCD und FGH. Sie verhalten sich gleichfalls wie 7 : 3. Man kann sich auch gleich sinnlich davon durch ihre Ausmessung überzeugen. Das große Dreyeck $BCD = \frac{ABCD}{2} = {}^{3}_{2}{}^{5} = 17\frac{1}{2}$ Quadratzoll. Das kleine $FGH = \frac{EFGH}{2} = {}^{1}_{2}{}^{5} =$

$= 7\frac{1}{2}$ Quadratzoll, aber $7\frac{1}{2}$ ist in $17\frac{1}{2}$ auch $2\frac{1}{3}$ mal enthalten, welches man gleich finden wird, wenn $17\frac{1}{2}$ durch $7\frac{1}{2}$ dividiret.

§. 138. Sind es Quadrate, welche man mit einander vergleichen will, so verhalten sie dieselben, wie das **doppelte Verhältniß ihrer Seiten**, oder wie das Quadrat ihrer Seiten, denn weil alle ihre Seiten gleich lang, und daher ihre Grundlinie und Höhe einerley ist, so darf man, wie uns schon aus §. 126 bekannt ist, nur eine ihrer Seiten mit sich selbst multipliciren, um ihren Flächeninhalt zu wissen. Es wären also zwey Quadrate, das eine heiße Q, das andere q. Die Seite des Quadrats Q sey $= L$, und die Seite des Quadrats $q = l$, so wird sich der Flächeninhalt beyder Quadrate also verhalten:

$$Q : q = L^2 : l^2.$$

Hier ist offenbar das Verhältniß $L^2 : l^2$ aus den Verhältnissen $L : l$ und $L : l$ zusammen gesetzet, und weil beydes Verhältniß gleich ist, ein doppeltes Verhältniß von $L : l$.

Exempel: Es habe das Quadrat Q zur Seite $L = 10$ Zoll, und da Quadrat q zur Seite $l = 5$ Zoll, so wird sich verhalten:

$$Q : q = 10^2 : 5^2$$
$$= 100 : 25$$
$$= 4 : 1$$

wenn nemlich die beyden letzten Glieder der Proportion beyde durch 25 dividiret werden. Hier

war die Seite des einen Quadrats halb so groß als die andere, und wir fanden, daß alsdenn das Quadrat von einer nochmal so langen Seite viermal mehr Flächeninhalt hatte. Allein dieses ist auch auf alle Fälle wahr. Denn wenn wir ganz allgemein die Seite des Quadrats $Q = 2a$, und die Seite des Quadrats $q = a$ nennen wollen, so gilt aus obigen Grundsätzen die Proportion

$$Q : q = (2a)^2 : a^2$$
$$= 4a^2 : a^2$$
$$\text{---------} : a^2$$
$$= 4 : 1.$$

§. 139. Da man alle geradlichte Figuren in Triangel theilen § 98, und alle diese Triangel zusammen in ein Parallelogram oder Quadrat verwandeln kann §. 112, so wird man leicht hiedurch einsehen, wie man alle geradlinichte Figuren in Ansehung ihres Flächeninhalts mit einander vergleichen könne.

§. 140. Die Vergleichung des Inhalts der geradlinichten Figuren führet uns ganz natürlich auf ihre Aehnlichkeit. Man nennt das **ähnlich** einer Sache, was von ihr in nichts weiter verschieden ist, als in der Größe, und sonst eben die Einrichtungen hat. **Aehnliche** geradlinichte Figuren müssen also in nichts von einander verschieden seyn, als in Ansehung der Größe, und die **Anzahl** ihrer Seiten, die **Lage** und Größe ihrer Winkel, das **Verhältniß** der Seiten muß bey beyden gleich seyn. Z. E. Fig. 106 die Fi-

Fig. 106.

guren

guren ABCDEF und abcdef sind einander ähnlich, sie sind in nichts verschieden, als in der Größe; die Zahl der Seiten sind gleich, die Winkel gleich und in gleicher Ordnung, die Seiten, welche die gleichen Winkel bey beyden einschließen, haben auch gleiche Verhältnisse alle unter einander, oder wie man sich ausdrückt, sie sind einander **proportional**. Man nennt nun in solchen zwey oder mehr Figuren, die einander **ähnlich** sind, diejenigen Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, **gleichnamichte** Seiten. So sind z. E. in diesen beyden Figuren die Seiten FE und fe, ED und ed gleichnamichte Seiten. **Aehnlicke Dreyecke** sind also auch solche Dreyecke, die, wie wir gesagt haben, in nichts von einander verschieden sind, als in der Größe, und wo alle die Seiten des einen Dreyecks gegen alle Seiten des andern Dreyecks einerley Verhältniß haben, und da Größe und Lage ihrer Winkel gleich sind. Der Triangel FAE ist ähnlich dem Triangel fae, in beyden gleiche Winkel und in gleicher Ordnung, und in beyden also gleiche Neigung der Seiten gegen einander, und in beyden auch gleiche Verhältniß. Hier verhält sich jede Seite des Triangels FAE zu jeder Seite des Triangels fae, wie 2:1. Doch von allen diesen Dingen werden wir noch weiter unten mehr anführen, wodurch sie recht deutlich werden. Wir bemerken noch vorher, daß das Zeichen der Aehnlichkeit folgendes sey ∽. Wir fangen die Sache von den ersten Grundsätzen an.

§. 141.

§. 141. Wenn man in einem Dreyecke ABC Fig. 107 mit einer der Linien, welche man zur Grundlinie annimmt, eine Parallellinie zieht, (hier sey sie mit AB gezogen, und sie sey DE) so sind die durch diese Parallellinie abgeschnittene Stücken des Triangels unter einander proportional, also daß die auf einer Seite befindliche zwey Stücke CD und DA eben ein solches Verhältniß unter einander haben, als die auf der andern Seite als CE und EB, oder es ist alsdenn CD: DA = CE: EB. Dieses wollen wir nun beweisen. Wir wollen noch die Hülfslinien DB und EA und FE ziehen, diese FE wollen wir bey F unter einem rechten Winkel auf CA fallen lassen. Wenn man nun den Triangel EDA betrachtet, so ist seine Grundlinie DA, und seine Höhe FE §. 105. Ferner kann der Triangel CDE auch also betrachtet werden, daß er zu seiner Grundlinie die CD bekömmt, da denn FE auch seine Höhe ist. Also haben die △△CDE und DEA gleiche Höhe FE, aber verschiedene Grundlinien §. 135, folglich gilt der Schluß △CDE: △DEA = CD: DA. 2) Wenn wir die Triangel DEA und DEB betrachten, so sind die gleichen Inhalts, denn man kann bey beyden eine gemeinschaftliche Grundlinie DE annehmen, und sie haben auch gleiche Höhe, weil sie zwischen Parallelen DE und AB stehen, ex constructione, also Triangel DEA = Triangel DEB. Folglich kann man anstatt Triangel DEA den Triangel DEB setzen, es gilt also auch der Schluß △CDE: △DEB = CD: DA. 3)

Fig. 107.

Weil

Weil man aber auch betrachten kann, daß die beyden Triangel CDE und DEB so angesehen werden können, als ob sie zu ihren Grundlinien die CE und EB, die beyde in einer geraden Linie liegen, und zu ihrer Höhe den von beider gemeinschaftlichen Spitze herab gelassenen Perpendikel DG hätten §. 105, so gilt nach §. 135 auch der Schluß $\triangle CDE : DEB = CE : EB$, also da

4) $\triangle CDE : \triangle DEB = CD : DA$

ferner $\triangle CDE : \triangle DEB = CE : EB$

also beyde Varhältnisse dem dritten gleich sind, so sind sie auch unter einander gleich, und es gilt daher

$$CD : DA = CE : EB$$

welches der Satz war, den wir beweisen wollten.

§. 142. Wenn man die Figur 107 nochmal betrachtet, so wird man finden, daß durch die mit der Grundlinie gezogene Parallele DE es komme, daß man nun zwey Triangel betrachten kann, nemlich erst den großen CAB, und den durch die Parallellinie entstandenen CDE. Auch von diesen beyden Triangeln kann man nun behaupten, daß jede zwey Seiten des einen jeden zwey Seiten des andern proportional sind, also daß die Schlüsse gelten, $CD : CE = CA : CB$, oder auch $CE : DE = CB : BA$.

Wir wollen eine ganz gleiche Figur mit Figur 107 zeichnen, um unsere Leser nicht durch viele Linien, die sich in der Figur 107 schon finden, und wozu jetzt noch eine käme, zu verwirren. Es ist Fig. 108.

Fig. 108.

Wir

Wir hatten im vorigen §. 141 es bewiesen, daß CD:DA=CE:EB also gilt auch §. 270 Arithm.

CD:DA+CD=CE:EB+CE oder welches einerley

CD:DA=CE:CB also auch

CD:CE=CA:CB.

2) Wenn man CA als die Grundlinie des Triangels betrachtet, und damit eine Parallele aus dem Punkt E, hier die EH zieht, so galt nach dem vorigen § der Schluß

BE:EC=BH:AH also auch

BE+EC:EC=BH+AH:AH.

Weil aber AH=DE, indem AH ∥ DE und EH ∥ DA, und Parallelen zwischen Parallelen gleich §. 84, so kann man, wo man es nöthig befindet, anstatt AH auch die DE setzen; es ist gleiches für gleiches. Es gilt also auch der Schluß BE+EC:EC=BH+AH:DE

oder BC:EC=BA:DE, also gilt auch

EC:DE=BC:BA Arithm. §. 270,

welches wir beweisen wollten.

§. 143. Man wird sich hiebey leicht erinnern, und es auch begreifen, daß sich aus diesen Verhältnissen noch andere addendo, subtrahendo &c. machen lassen, wie wir solches §. 270 der Arithm. finden, doch wollen wir diese nicht so weitläuftig berühren. Nur z. E. wir hatten

CD:AD=CE:EB §. 142,

also müßte auch

CD

$CD + DA : DA = CE + EB : EB$ gelten oder $CA : DA = CB : EB$ u. s. w. Indessen sind die drey angeführte nur in beyden vorigen §§ bewiesene Proportionen

$$CD : DA = CE : EB$$
$$CD : CE = CA : CB$$
$$EC : DE = CB : BA$$

oder auch $CD : DE = CA : AB$

die Hauptproportionen, worauf sich alle andern gründen.

§. 144. Aus allen diesen wird man nun auch ferner von selbst den Schluß ziehen, daß, wenn diese angeführten Proportionen bey einem Triangel statt finden, alsdenn auch die Linie DE ∥ AB oder EH ∥ CA seyn müsse, weil bloß unter dieser Bedingung obige Schlüsse galten, und bewiesen wurden, daher auch dieser umgekehrte Satz von selbst seine Richtigkeit haben muß.

§. 145. Wenn wir Fig. 109 auch mit der Grundlinie eines Triangels ABC noch mehr Parallelen ziehen wollten, als wir in der vorigen Figur gethan haben, so wird uns auch nun schon von selbst einfallen, daß die dadurch abgeschnittene Stücke der Seiten des Triangels nach §. 142 einander proportional werden müssen. Diese Parallellinien mit BC sollen af, bg, ch, di, kl, nm seyn, dadurch entstehen nun verschiedene Stücke der Seiten des Triangels ABC, und man mag nun eine Parallellinie nehmen, welche man will, so werden die über ihr liegende Seiten des Trians- Fig. 109.

Triangels ABC mit den unter ihr liegenden Seiten proportional seyn, welches aus §. 142 folget, indem hier eben die Gründe statt finden. Z. E. man nehme die Linie af, so würde gelten

Aa : aB = Af : fC. Allein weil die Linie bg auch parallel mit BC, mit welcher auch af parallel war, so muß auch bg mit af parallel seyn, und man könnte also auch, wenn man den Triangel Abg allein betrachtete, schließen

Aa : ab = Af : fg.

Wir haben hier nun zwey Proportionen, in welchen zwey gleiche Glieder sind, und die man durch Versetzungen (§. 270 Arithm.) also setzen könnte

Aa : Af = aB : fC

und Aa : Af = ab : fg.

Folglich muß auch gelten, weil beyde Verhältnisse einem dritten gleich sind,

ab : fg = aB : fC.

Eben so würde man auch zeigen können,

bc : gh = bB : gC.

Also auch diese abgeschnittene Stücke sind einander proportional. Da

ab : fg = aB : fC, und also auch

ab : aB = fg : fC, so gilt also auch §. 270 Arithm.

ab : aB − ab = fg : fC − fg oder

ab : bB = fg : gC, welches wieder eine andere Art des Verhältnisses ist, das hieraus richtig folgt, und auch bey den andern abgeschnittenen Stücken der Seiten dieses Triangels kann angewendet werden.

§. 146.

§. 146. Aus diesen angeführten Sätzen wollen wir ein Paar Auflösungen nützlicher Aufgaben herleiten. Wir wollen erstlich lehren, wie man eine gegebene Linie in so viel gleiche Theile, als gefordert werden, sehr leicht eintheilen könne. Es sey Fig. 110 die gegebene Linie AB, welche in sechs gleiche Theile soll getheilt werden. Man ziehe an einem ihrer Endpunkte A eine andere noch unbestimmte Linie, unter welchem Winkel man will, nur thut man gut, wenn man ihn nicht zu spitzig, noch zu stumpf nimmt, blos um der Bequemlichkeit wegen. Es sey diese an AB gezogene Linie die AC, man theile AC in die geforderten sechs gleiche Theile, da man den Cirkel beliebig öfnen, und sechs gleiche Theile mit unveränderter Oefnung darauf tragen kann. Durch den Punkt C, wo sich der Endpunkt des letzten Theils befindet, ziehe man nach dem Endpunkt der Linie AB eine Linie, hier die CB, und durch alle Theilungspunkte der AC, die mit der CB parallelen Linien en, dm, cr, bq, at, alsdenn wird dadurch die Linie AB auch in die verlangten sechs gleichen Theile getheilt. Es wird uns dieses nicht schwer zu beweisen fallen. Es ist nach vorigem Paragraphen, weil alle diese Linien paralel mit CB sind: Fig. 110.

Aa : ab = At : tq, ferner auch
ab : bc = tq : qr, ferner
bc : cd = qr : rm und so weiter mit allen Theilen. Aber weil Aa = ab = bc = cd = 1 ist, so wäre also:

$$1 : 1 = At : tq = tq : qr = qr : rm$$

oder alle die Theile At, tq, qr, qm, u. s. w. verhalten sich alle gegen einander, wie 1 : 1, das ist, sie sind gleich, und die Linie AB ist also in die verlangten gleichen Theile getheilt.

§. 147. Man kann aber auch auf eben die Art eine gegebene Linie AB Fig. 111 in Theile theilen, die eben ein solches Verhältniß haben, wie die gegebenen Theile einer andern Linie AC. Es sollen die gegebenen Theile der Linie AC die AE, EF und FC seyn. Man verfährt auf eben die Art, wie vorher, und setzt die AC an die AB an, und zieht mit dem durch die Punkte C und B gezogene Linie die Parallelen Fg und Eh, so haben die Theile Ah, hg und gB eben ein solches Verhältniß unter einander, als die Theile AE, EF FC, denn nach §. 141, 142, 143, 144 gelten alle folgende Schlüsse:

Fig. 111.

$$AE : EF = Ah : hg$$
$$EF : FC = hg : gB$$

und auch

$$AE : FC = Ah : gB$$

daß also alle Theile der Linie AB eben das Verhältniß bekommen haben, als die Theile der Linie AC hatten. Man sieht leicht, daß sich das auch auf mehrere Theile anwenden, und eben die Art des Beweises führen läßt.

§. 148. Man kann aber auch nach diesen angeführten Grundsätzen die Geometrie auf die Arith-

Arithmetik anwenden. Es ist uns noch aus der Arithmetik bekannt, wie man zu drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl findet, welches die gewöhnliche Regel Detri ist. Nun lassen sich alle Zahlen auch als Linien vorstellen, denn es ist nur nöthig, daß die Längen dieser Linien eben solches Verhältniß unter sich haben, als die Zahlen. Wenn man nun drey Zahlen oder drey Linien hat, so läßt sich zu diesen allezeit die **vierte** Proportionalzahl oder Linie finden.

Es mögen Fig. 112 die drey Linien CD, EF und GH gegeben seyn, zu welchen man die vierte Proportionallinie finden soll. Man ziehe die Linie CD, und setze die EF unter einem beliebigen Winkel daran, hier ist die CD in der Figur die cd, und die EF in der Figur die df, alsdenn verlängere man die cd, bis man die Linie cg bekömmt, welche so lang, als die GH ist. Man ziehe durch die Punkte c und f eine andere Linie, und mit der df alsdenn aus g eine Parallele, welche die unbestimmt durch c und f gezogene Linie einerwärts, hier in h, schneiden wird. Diese gh ist die vierte Proportionallinie zu diesen dreyen gegebenen Linien. Denn weil gh ∥ df, aus unserer Construktion, so ist nach §. 142

Fig. 112.

$$cd : df = cg : gh$$

und also gh wäre $= \frac{cg \cdot df}{cd}$, das ist, wenn man das Produkt der zweyten und dritten mit dem Wer-

the der ersten gegebenen Linie dividirt, so hat man die vierte Proportionallinie, welches ein Exempel aus der Regel Detri ist. Wäre z. E. die CD = 3 Zoll, die EF = 2 Zoll, und die GH = 6 Zoll, so wäre die gh oder die vierte Proportionallinie = 4 Zoll; oder um mich noch deutlicher erklären, es mögen die drey Größen Fig. 112 GH, EF und CD gegeben seyn, es mag nun in Linien oder Zahlen seyn, so ziehe man eine unbestimmte gerade Linie die cg, setze darauf 1) die CD = cd an d die EF = df, unter welchem Winkel man will; nun verlängere man die cd = CD, bis sie gleich wird der GH = cg, und ziehe denn die Cf an den Endpunkt der df, verlängere sie, und ziehe die gh ∥ mit df, so ist gh das vierte Glied in der Proportion. Wir könnten noch einige andere Methoden anführen, allein es ist uns nach der Absicht dieses Buchs hinreichend, diese eine gezeigt zu haben. Auf diese Betrachtungen gründet sich das Verfahren mit einer Linie, welche man auf einem mathematischen Werkzeuge, das man den Proportionalcirkel nennt, findet, wovon wir aber nach der Absicht dieses Buchs nichts erwähnen. Wie man die mediam proportionalem geometricam bey einer kontinuirlichen Proportion findet, werden wir im folgenden Kapitel in der Lehre vom Cirkel anzeigen, als wohin diese Lehre eigentlich gehört.

§. 149. Aus den obigen Grundsätzen läßt sich auch noch eine merkwürdige Lehre herleiten, welche

welche wir jetzt anführen wollen. Wir wissen aus §. 60, wie man einen Winkel in zwey gleiche Winkel durch eine Linie theilen soll. Hier sey nun Fig. 113 der Winkel ABC durch die BD in zwey gleiche Theile getheilt, und man ziehe die Linie AC durch die beyden äußersten Punkte der Schenkel des Winkels, welche Schenkel beyde ungleich sind, so werden sich die Abschnitte der Linie AC, die durch die Theilungslinie BD entstehen, verhalten, wie die Schenkel des Winkels oder AB : BC = AD : DC. Um dieses zu beweisen, wollen wir ein Paar Hülfslinien ziehen. Man verlängere also die AB in ihrer Richtung, bis der verlängerte Theil BE gleich sey der BC, oder dem andern Schenkel des Winkels, und ziehe alsdenn noch die CE; auf solche Art hat man einen gleichseitigen Triangel BCE erhalten, darinn BC = BE, und daher die Winkel n und m gleich sind §. 66. Nun wollen wir den Beweis unsers Satzes bald finden.

Fig. 113.

Der Winkel ABC = n + m weils der äußere

da n = m re Winkel an der verlängerten Seite des △CBE §. 95.

---

so ist der Winkel ABC = 2m

nun ist ferner ABC = 2ABD weil der Winkel in zwey gleiche Theile getheilet ist, davon ABD einer ist.

---

also 2ABD = 2m

ABD = m

Also muß DB parallel CE seyn, nach §. 78 von den Parallellinien, weil der äußere Winkel dem innern gleich ist. Wenn aber DB ≠ CE ist, so gilt der Schluß:

AB : BE = AD : DC §. 142.

Nun ist aber BE = BC, denn wir haben es gleich gemacht, also in der Proportion statt BE die BC gesetzt, so gilt

AB : BC = AD : DC

welches der Satz war, den wir beweisen wollten. Wenn man also einen Triangel, welcher es auch sey, hat, wie hier ABC, wovon man beweisen kann, daß einer seiner Winkel, hier bey B, durch eine gerade Linie in zwey Theile getheilt sey, oder daß der Winkel ABD = DBC, so gilt allezeit der Schluß, daß seine Schenkel sich verhalten, wie die Stücke der getheilten Grundlinie, welches Verhältniß zu vielen Absichten sehr nützlich zu gebrauchen ist.

§. 150. Was die Aehnlichkeit der Dreyecke sey, haben wir schon §. 27, 140 vorläufig erklärt. Wir bestimmen es jetzt genauer durch die Entwickelung der verschiedenen Eigenschaften, welche ähnliche Dreyecke mit einander gemein haben. Wir bemerken, daß, wenn in zwey Dreyecken alle Winkel einander gleich sind, so sind die Dreyecke einander ähnlich, und die Seiten, welche in beyden einerley Winkeln entgegengesetzt sind, sind auch einander proportional, es mögen übrigens die Dreyecke in Ansehung ihrer Größe auch

noch

noch so sehr von einander verschieden seyn. Es sey in den beyden Dreyecken Fig. 114 der Winkel B = dem Winkel b, der Winkel A = dem Winkel a, und der Winkel C = dem Winkel c; so sind diese beyden Dreyecke einander ähnlich. Sie sind in nichts verschieden, als in Ansehung ihrer Größe, weil die Lage ihrer Seiten gegen einander, welche durch ihre Winkel bestimmt wird, einander völlig gleich ist, obschon der eine viel größer ist, als der andere. Beyder Seiten sind auch einander proportionel. Denn man kann sie Fig. 115 auf solche Art in einander setzen, daß die Seite ab parallel AB wird. Denn da der Winkel c = C ist, so wird, wenn man die Seite bc auf die Seite BC ans Ende legt, der Winkel C und c einander decken, und die Linie ac auf die Linie AC zu liegen kommen, wie solches Fig. 115. 1 zeiget, und weil der Winkel a = A, der Winkel b = B, so folgt aus der Lehre von den Parallellinien §. 78, daß AB ∥ ab sey, und daß also nach §. 142 alle die Schlüsse gelten, welche wir dort machten. Eben so hätten wir den Winkel a auf den Winkel A legen können, und es würde Fig. 115. 2 herausgekommen seyn, da bc ∥ mit BC ist, weil die Winkel b und c den Winkeln B und C gleich sind. Auch hätten wir den kleinen Triangel so legen können, daß der Winkel b auf B gekommen wäre, da denn die Lage Fig. 115. 3 entstanden wäre, wo abermal ac ∥ AC wäre. Man wird also bey beyden Triangeln die Schlüsse machen können:

Fig. 114.

Fig. 115.

AB : BC = ab : bc, oder auch folgenden
BC : AC = bc : ac, oder auch daher
AB : AC = ab : ac.

§. 151. Allein es ist nicht einmal nöthig, daß man beweise, daß in zwey Dreyecken alle drey Winkel gleich sind, um obige Proportionen geltend zu machen. Sie gelten schon, wenn man nur beweisen kann, daß zwey Winkel in beyden Triangeln einander gleich sind. Denn alsdenn sind sie auch alle drey einander gleich. Es wird dieses jedem gleich einleuchtend seyn, wenn man bedenket, daß jeder Triangel, er sey groß oder klein, 180° in allen drey Winkeln habe §. 88, und daß also, wenn zwey Winkel in verschiedenen Triangeln gleich sind, der dritte bey beyden einerley Complement oder Ergänzung zu 180° = 2 Rektis sey, folglich auch der dritte Winkel in beyden Triangeln gleich sey. Es ist fast überflüssig, noch zu erinnern, daß nicht nur zwey, sondern auch viele Triangel alle unter einander ähnlich seyn können, wenn sie auch alle in ihrer Größe sehr verschieden sind, wie dieses aus dem vorhergehenden deutlich genug erhellet. Wir bemerken noch, daß man in solchen ähnlichen Dreyecken die Seiten, die gleichen Winkeln entgegengesetzt sind, **gleichnamigte** Seiten oder latera homologa nennet.

§. 152. Daß man also auch, wenn bey zwey ähnlichen Triangeln drey Seiten gegeben

sind, die vierte durch die Regel Detri finden könne, folgt auch schon von selbst durch den Schluß des §. 148. Es sind wahre geometrische Proportionen, und das vierte Glied davon wird auf die uns bekannte Art gefunden. So wäre also

$$AB : ab = BC : bc \text{ und } bc = \frac{ab \cdot BC}{AB}$$

ferner $BC : bc = AC : ac$ und $ac = \frac{bc \cdot AC}{BC}$ u. s. w.

Z. E. (§. 150 am Ende) $bc = \frac{ab \cdot BC}{AB}$, die $ac = \frac{bc \cdot AC}{BC}$ und gleichfalls auch die $ac = \frac{ab \cdot AB}{AB}$.

Und wie man jedes Glied (nach §. 270 Arithm.) zum vierten machen kann, so läßt sich auf die Art aus den drey bekannten Seiten die vierte finden, und sind die Längen der Seiten in Zahlen gegeben, durch Zahlen ausdrücken.

Z. E. es sey $AB = 20$ Zoll, $BC = 14$, $ab = 6$, so wäre also $bc = \frac{ab \cdot BC}{AB} = \frac{6 \cdot 14}{20} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$ u. s. w.

§. 153. Man wird nun auch wol fragen, ob ähnliche Dreyecke nicht auch ein besonderes Verhältniß in Ansehung ihres Flächeninhalts hätten? Freylich, es verhalten sich ähnliche Dreyecke, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten (gleichnamichten Seiten, late-

rum homologorum). Wir werden dieses leicht beweisen können. Es sind die Triangel Fig. 114 ABC und abc einander ähnlich. Nun lasse man ein Perpendikel aus ihrer Spitze auf ihre Grundlinie fallen, welches ihre Höhe ist §. 105. Es sey dieses Perpendikel AD und ad. Nun wissen wir nach §. 129, wie der Flächeninhalt eines Triangels berechnet wird.

Fig. 114.

Der Inhalt des △ABC wird also seyn $= \frac{AD.BC}{2}$, und der Flächeninhalt des △abc wird also seyn $\frac{ad.bc}{2}$. Es ist gleichviel, welche gleichnamichte Seiten wir von beyden Triangeln nähmen, unser Satz müßte bewiesen werden können. Weil wir aber die Seiten BC und bc mit in den Ausdruck des Inhalts der Triangel gebracht haben, so wollen wir von denen es beweisen. Unser Satz also in Zeichen ausgedrückt, den wir zu beweisen haben, ist folgender:

$$\triangle ABC : \triangle abc = BCq : bcq.$$

Denn 1) nach der Voraussetzung △ABC∽△abc

es ist aber auch △ABD∽△abd

Denn in beyden ist bey d ein rechter Winkel, weil in beyden BD und bd Perpendikel sind, ferner waren die Winkel bey B und b schon vorher einander gleich, also auch BAD = bad und die Triangel ähnlich §. 151.

2)

2) Weil $\triangle ABD \backsim \triangle abd$ so gilt der Schluß §. 148

$ab : AB = ad : AD$ auch der Schluß gilt

$ab : AB = bc : BC$ weil $\triangle ABC \backsim \triangle abc$

also gilt auch, weil

$bc : BC = ad : AD$ zwey Verhältnisse dem dritten gleich sind.

folglich $\frac{BC \cdot ad}{bc} = AD$

3) Weil wir den Inhalt beyder Triangel im Paragraphen durch Zeichen ausgedrückt haben, so wird, wenn man in einer Proportion gleiche Dinge für gleiche Dinge setzet, auch sich verhalten:

$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{AD \cdot BC}{2} : \frac{ad \cdot bc}{2}$ welches einerley Satz ist.

$\triangle ABC : \triangle abc = AD \cdot BC : ad \cdot bc$ also die beyden letzten Glieder dividiret durch 2.

Nun hatten wir für AD einen Werth in (2) gefunden, den anstatt AD gesetzet, so ist auch

$\triangle ABC$

$$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{BC \cdot ad \cdot BC : ad \cdot bc}{bc}$$

folglich

$\triangle ABC : \triangle abc = BC.BC.ad : ad.bc.bc$ die beyden letzten Glieder mit bc multipliciret

$\triangle ABC : \triangle abc = BC.BC : bc.bc$ beyde letztern durch ad dividiret

oder

$$\triangle ABC : \triangle abc = BCq : bcq.$$

und dieses war der Satz, den wir beweisen wollten.

Wenn also zwey gleichnamichte Seiten zweyer ähnlichen Triangel bekannt sind, so kann man das **Verhältniß** des Inhalts beyder Tringel wissen, ob man schon daraus ihren würklichen Inhalt noch nicht weiß. Es sey die Seite $BC = 6$ und die Seite $bc = 2$, so wäre das Verhältniß des Inhalts beyder Triangel $= 6^2 : 2^2$, welches $= 36 : 4$ ist, und beyde Glieder durch 4 dividiret $= 9 : 1$, also der Triangel ABC wäre 9 mal so groß als der Triangel abc, oder der $\triangle$ abc stecket 9 mal darinnen. Man siehet auch leicht ein, daß man den Inhalt des einen Triangels hieraus finden könne, wenn der Inhalt des einen nebst zwey gleichnamichten Seiten beyder Triangel bekannt wären.

Denn weil $\triangle ABC : \triangle abc = BCq : bcq$

so sey einmal des $\triangle ABC$ Inhalt 24 Quadratzoll;

ferner

ferner BC = 6, also BCq = 36, und bc = 2, also bcq = 4, so gilt ja auch der Schluß:

BCq : bcq = △ABC : △abc und also in Werthen

36 : 4 = 24 : x also x oder

$$\triangle abc = \frac{24 . 4}{36} = 2\frac{2}{3}$$ Quadratzoll.

Also bestätiget dieses es auch abermals, daß der kleine Triangel nach diesen Angaben in dem großen 9 mal enthalten sey. Denn $9 . 2\frac{2}{3} = 24$, welches der Inhalt des großen △ war.

§. 154. Allein es verhalten sich nicht nur ähnliche Dreyecke in Ansehung ihres Flächeninhalts, als die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, wie wir eben bewiesen haben, sondern auch als die **Quadrate ihrer Höhen.** Was die Höhe eines Dreyecks sey, haben wir schon genugsam erkläret. Wir müssen also jetzt nur noch unsern Satz beweisen, welches wirklich der Beweis des im vorhergehenden Paragraphen befindlichen Satzes mit einer sehr geringen Veränderung seyn wird. Man thut also wohl, den vorhergehenden Paragraphen nochmal zu überlesen, daher wir auch diesen nur ganz kurz abfassen wollen. Unser Satz, durch Zeichen ausgedrückt, wird also seyn (siehe Fig. 114, wo △ABC ∽ △abc)

△ABC : △abc = ADq : adq.

Denn $\triangle ABC = \frac{AD . BC}{2}$ und $\triangle abc = \frac{ad . bc}{2}$

also $\triangle ABC : abc = \frac{AD . BC}{2} : \frac{ad . bc}{2}$

Weil

Weil nun auch $\triangle ABD \backsim \triangle abd$, so gilt auch der Schluß:

$$ab : AB = ad : AD$$

ferner $ab : AB = bc : BC$

folglich $ad : AD = bc : BC$

und daher $BC = \frac{AD \cdot bc}{ad}$

Weil nun, wie wir vorher gesagt haben,

$$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{AD \cdot BC}{2} : \frac{ad \cdot bc}{2} : 2$$

also auch $\triangle ABC : \triangle abc = AD \cdot BC : ad \cdot bc$

und nun statt BC
das gefundene
substituiret,
so ist folglich $\triangle ABC : \triangle abc = \frac{AD \cdot AD \cdot bc}{ad} : ad \cdot bc$

die beyden letzten
Glieder mit ad
multipliciret,

$$\triangle ABC : \triangle abc = AD \cdot AD \cdot bc : ad \cdot ad \cdot bc$$

die beyden letzten
Glieder durch
bc dividiret,

also $\triangle ABC : \triangle abc = AD \cdot AD : ad \cdot ad$

---

oder $\triangle ABC : abc = ADq : adq$

welches der Satz ist, den wir beweisen wollten.

Es fließen daraus eben die Folgen, welche wir aus dem Satz des vorhergehenden Paragraphen herleiteten, nemlich aus den Höhen zweyer oder mehrer ähnlicher Triangel läßt sich das Verhältniß ihres Inhalts bestimmen. Z. E. es sey $AD = 8$ und $ad = 2\frac{2}{3}$, so würde das Verhältniß beyder Dreyecke seyn:

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle abc &= 8q : \tfrac{8}{3}q \\ &= 64 : \tfrac{64}{9} \\ &= 1 : \tfrac{1}{9} \\ &= 9 : 1 \end{aligned}$$

. welches wir auch in dem vorigen Paragraphen fanden.

Eben so kann man aus dem Inhalt des einen Triangels und aus beyden Höhen den Inhalt des andern auf eben die Art als im vorigen Paragraphen finden, wenn statt des Quadrats der beyden Seiten die Quadrate der Höhen setzet, und noch mehr andre ähnliche Aufgaben auflösen, welche jeder nach den Proportionsregeln bald finden wird, wenn er sich nur erinnert, wie man aus drey gegebenen Größen die vierte Proportionalgröße findet.

§. 155. Wir erklärten im 27 §. was ähnliche geradlinichte Figuren wären, und man wird, da wir gesehen haben, wie ähnliche Dreyecke sich gegen einander verhalten, auch wol muthmaßen,

daß

daß auch ähnliche geradlinichte Figuren ein gewisses Verhältniß haben, das sich auch durch zwey ihrer gleichnamichten Seiten finden läßt, und das ist auch sehr richtig: **Aehnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten oder ihrer Diagonalen.** Der Satz ist wirklich sehr nutzbar, und wir wollen ihn daher ausführlich beweisen. Es sollen Fig. 116 α und β zwey ähnliche Figuren seyn, deren Winkel also in eben der Ordnung gleich sind, und ihre Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, auch alle gleich proportional sind.

Nun kann man ähnliche Figuren in **ähnlich liegende Dreyecke** eintheilen, welches geschiehet, wenn man in ähnlichen Figuren Diagonalen zwischen den Spitzen gleicher Winkel ziehet. Solche Diagonalen heißen **ähnlichliegende** oder **gleichnamichte** Diagonalen, wie wir hier Fig. 116 in den beyden Figuren α und β gethan, da AC und ac, AD und ad u. s. w. gleichnamichte Diagonalen sind. Sie heißen daher also, weil sie in beyden ähnlichen Figuren gleiche Lagen gegen die andern Seiten und Winkel haben. Man erhält dadurch ähnlichliegende Dreyecke, das ist solche Dreyecke, die zwischen gleichnamichten Seiten und gleichnamichten Diagonalen liegen. Aber diese ähnlichliegende Dreyecke in **ähnlichen** Figuren sind auch **ähnliche** Dreyecke. Denn wenn man die Diagonalen gezogen hat, so kann es nicht fehlen, daß zwey Seiten solcher Dreyecke, als AB, BC und ab, bc, auch **gleichnamichte** Seiten der ähnlichen

Fig. 116.

lichen Figuren sind. Da nun auch in beyden Dreyecken der Winkel B dem Winkel b gleich ist, wegen der Aehnlichkeit der Figuren, so müssen auch die Triangel ABC und abc einander ähnlich seyn. Denn wenn man den Winkel B auf b legte, so würde auch ab auf einen Theil von AB, und bc auf einen Theil von BC kommen, und daher ac über AC, und weil nun AB:ab = BC:bc laut der Aehnlichkeit der Figuren wären, so würde ac ∥ mit AC liegen, und die Triangel ähnlich seyn §. 144. Wenn man nun diese beyde Triangel von den beyden Figuren abrechnet, so bleiben dennoch die Figuren ACDEF und acdef ähnliche Figuren. Denn da vorher die ganzen Winkel BCD und bcd einander gleich waren, wie auch BAF = baf wegen Aehnlichkeit der Figuren, auch BAC und bac einander gleich sind, so muß daher auch BCD — BCA gleich seyn bcd — bca, oder der Winkel ACD = acd. Und eben so wird auch BAF — BAC gleich seyn baf — bac, oder der Winkel CAF = caf. Also sind die Figuren noch nach den abgerechneten beyden Triangeln BAC und bac einander ähnlich. Weil nun also der Winkel ACD = acd, die Seiten CD und cd laut der Aehnlichkeit der Figuren proportional, wie auch die Seiten AC und ac laut dem vorhergehenden, also AC:ac = CD:cd, so müssen auch die △△ACD und acd einander ähnlich seyn. Die kann man nun wieder von beyden Figuren abnehmen, und alsdenn auf die vorige Art beweisen, daß die Figuren ADEF und adef noch ein-

ander ähnlich sind, und alsdenn ferner auf eben die vorige Art die Aehnlichkeit der folgenden Dreyecke darthun. Wir hatten nun §. 153 bewiesen, daß sich ähnliche Dreyecke, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten verhielten, und da alle diese Dreyecke ähnlich sind, so würden also die Schlüsse gelten müssen:

$$\triangle ABC : \triangle abc = BCq : bcq$$
ferner $\triangle ACD : \triangle acd = CDq : cdq$
ferner $\triangle AED : \triangle aed = EDq : edq$
und $\triangle AEF : \triangle afe = FEq : feq$

aber die Verhältnisse der Seiten der beyden Figuren sind alle einerley, oder um so vielmal BC größer ist als bc, um so vielmal ist auch CD größer als cd, und DE größer als de u. s. w. Weil beyde Figuren einander ähnlich sind, also müssen auch die Verhältnisse der Quadrate dieser Seiten einerley seyn. Also kann man zwey Seiten der Figuren nehmen, welche man will, und es werden allezeit zwey ähnliche Triangel mit ihnen im Verhältniß stehen. Es würde also auch daher gelten, wenn man nun also schlösse:

$$\triangle ABC : \triangle abc = BCq : bcq$$
$$\triangle ACD : \triangle acd = BCq : bcq$$
$$\triangle AED : \triangle aed = BCq : bcq$$
$$\triangle AFE : \triangle afe = BCq : bcq$$

Also, weil, wenn verschiedene Dinge dem dritten gleich sind, sie auch unter einander gleich sind, und das Verhältniß aller gleichnamichter Triangel einem einzigen Verhältniß gleich ist, so folget auch

der

der Schluß $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle ACD : \triangle acd = \triangle AED : \triangle aed = \triangle AFE : \triangle afe = BCq : bcq$

also folget auch $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle ABC : \triangle abc$

ferner $\triangle ACD : \triangle acd = \triangle ABC : \triangle abc$

ferner $\triangle AED : \triangle aed = \triangle ABC : \triangle abc$

und $\triangle AFE : \triangle afe = \triangle ABC : \triangle abc$

also auch nach §. 270 der Arithm.

$$\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle AED + \triangle AFE : \triangle abc + \triangle acd + \triangle aed + \triangle afe = \triangle ABC : \triangle abc.$$

Aber das erste Verhältniß sind die ganzen Figuren, weil es die Summen aller Triangel sind, und das zweyte Verhältniß ist wie $BCq : bcq$ oder $\triangle ABC : \triangle abc = BCq : bcq$, also ist uun $ABCDEF : abcdef = BCq : bcq$, welches mit Worten ausgedrückt heißt, ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Man hätte auch jede zwey andre ähnlich liegende Seiten wählen, und es auf eben die Art beweisen können. Auf eben die Art hätte man es auch von den Quadraten ihrer ähnlich liegenden Diagonalen zeigen können, wenn man die anstatt der Seiten genommen hätte, weil die Diagonalen doch zu den Seiten der ähnlichen Dreyecke mit gehören.

Anmerkung. Um unsern Lesern es zu erleichtern, und zu zeigen, wie obiger Schluß aus dem 270 §. der Arithm. folget, wollen wir ihn nochmals allgemein wiederholen, wenn

$$a : am = b : bm$$
$$c : cm = b : bm$$
$$d : dm = b : bm$$
$$e : em = b : bm$$

$$\text{so ist } a+c+d+e : am+cm+dm+em = b : bm$$

Denn die Produkte der mittlern und äußern Glieder dieser Proportion sind gleich, welches die Anzeige einer wahren Proportion ist, oder $(a+c+d+e)\,bm = (am+cm+dm+em)\,b$. welches die Anzeige einer wahren Proportion ist §. 269. Arithm.

§. 156. Exempel: Es verhalten sich in den Figuren α und β Fig. 114 die Seiten BC und bc, oder jede andere zwey Seiten, wie 3:2, also $BGq : bcq = 3^2 : 2^2 = 9 : 4$, so werden sich also die beyden Figuren verhalten:

$$ABCDEF : abcdef = 9 : 4 \text{ oder}$$
$$-- : 4$$
$$2\tfrac{1}{4} : 1.$$

oder die große Figur hat $2\frac{1}{4}$ mal mehr Flächeninhalt als die kleine.

§. 157. Aber es läßt sich nicht nur durch diese Sätze das Verhältniß des Flächeninhalts ähnlicher geradlinichter Figuren, sondern auch das Verhältniß der Peripherien oder aller Linien, die sie umgränzen, finden. Diese ganzen Peripherien verhalten sich wie jedes Paar gleich-

gleichnamichter Seiten oder Diagonalen.
Z. E. in Fig. α und β 116 verhält sich die ganze Peripherie von α zu der ganzen Peripherie von β, wie BC:bc oder CD:cd, oder wie zwey gleichnamichte Seiten oder Diagonalen, welche man will.

Auch dieses wird uns nicht schwer zu beweisen seyn. Denn da wir aus den vorigen Paragraphen noch wissen, daß alle die Seiten der ähnlichen Figuren gleiche Verhältnisse haben, und man also richtig schließen würde, wenn man sagte:

AB:ab = AB:ab oder ein Paar andre gleichnamichte Seiten oder Diagonalen
BC:bc = AB:ab
CD:cd = AB:ab
DE:de = AB:ab so folgt auch wie

AB + BC + CD + DE : ab + bc + cd + de
= AB:ab auch im vorigen §. folgte.

Oder die Summe aller Umfangslinien oder die Seiten der einen Figur verhalten sich zu den Umfangslinien der andern ähnlichen Figur, wie sich ein Paar gleichnamichte Seiten verhalten. Man hätte eben können auch ein Paar gleichnamichte Diagonalen anstatt AB:ab setzen, z. E. AC:ac. Denn wegen Aehnlichkeit der Triangel ist AB:ab = AC:ac, also beyde Verhältnisse gleich.

Exempel: Es verhalte sich Fig. 116. AB:ab = 3:2, so würden sich also die Umfänge beyder Figuren wie 3:2, welches Verhältniß = $1\frac{1}{2}:1$ ist, verhalten.

§. 158. Diese Betrachtungen bringen uns ganz leicht auf die Lehre vom verjüngten Maasstabe, wie man ihn verfertigen und gebrauchen müsse. Ob nun schon dieses eigentlich in die praktische Geometrie gehörte, so wollen wir es doch hier mitnehmen, weil sein Gebrauch sehr häufig und sehr nützlich ist. Nicht nur aber wird uns dieses lehren, einen verjüngten Maasstaab zu verfertigen, sondern überhaupt ein jedes gegebenes Maas in so viel Theile, z. E. in 1000 Theile zu theilen, und so zu theilen, daß man so viel davon, als man will, zwischen dem Cirkel nehmen kann. Wir wollen erstlich die Verfertigung des verjüngten Maasstabes, und nachher seinen Gebrauch anzeigen, und auch beweisen, aber nur für das zehntheilichte Maas, weil doch das der Geometer am mehrsten gebrauchet. Er heißt darum der verjüngte Maasstab, weil er gebrauchet wird, Figuren zu verjüngen, oder mit Beybehaltung der Aehnlichkeit kleiner vorzustellen. Die Verfertigung des zehntheilichten verjüngten Maasstabes ist folgende: Man nehme Fig. 117 eine willkührliche Fig. 117. Länge AB, und theile dieselbe in zehn gleiche Theile, wie hier geschehen ist, da B 1=1, 2=2, 3 u. s. w. An A setze man einen Perpendikel AE von willkührlicher Länge, und theile den gleichfalls in 10 gleiche Theile. Hier haben wir AB und AE gleich gemacht, die Zehntels, darin beyde Linien getheilet sind, werden also auch gleich seyn. An E setze man eine Parallele mit AB, welches hier die EF ist, auf welche man gleich-

falls

falls eben die Theile aufträgt, welche man auf die Linie AB getragen hatte, die also einander völlig gleich seyn werden. Durch B und F, wo die beyderseitige Eintheilung aufhöret, ziehe man mit AE parallel die Linie BF. Nun ziehe man auf der Linie AE durch 9, 8, 7, 6 u. s. w. mit AB parallel die Linien 9m, 8n, 7o, u. s. w. die man verlängert, wie auch hier geschehen ist. Endlich ziehe man die Querlinien Bl, 1II, 2III, 3IV u. s. w. die man allezeit von einem Theilungspunkte zum andern ziehet, nur daß man sie nicht mit AE und BF parallel ziehet, sondern wenn man von B anfängt, sie nach den ersten Theilungspunkt von F angerechnet, nemlich nach I die erste Quer: oder Transversallinie ziehet, wodurch alle Transversallinien einander parallel, und was sich zwischen ihnen befindet, nemlich ihre Abschnitte, gleich groß seyn werden. Wenn man die Länge AB noch neunmal oder mehrmal herunter träget, als hier BC und CD zweymal ist, und mit AE und BF durch die Punkte C und G und D und H die Parallellinien CG, DH u. s. w. ziehet, so hat man einen **verjüngten** Maasstab für zehntheilichtes Maas. Hätte man zu AB eben einen Zoll vom wirklichen Maas genommen, und den auf diese Art eingetheilet, und so, wie wir gesagt, noch neunmal herunter getragen, daß also solcher Theile, als AB, auf dem Maasstabe zehne gewesen wären, so hätte man einen Fuß von diesem Maasse in **tausend** Theile getheilet, oder man könnte alsdenn das $\frac{1}{1000}$ Theilchen davon abnehmen.

Wäre z. E. AB ein Rheinländischer Decimalzoll, so wäre der ganze Maasstab ein Rheinländischer Decimalfuß, in tausend Theilen.

§. 159. Nun kommt es darauf an, was AB bedeuten soll, ob es eine Ruthe oder einen Fuß oder einen Zoll vorstellen soll. Das ist, wie man leicht einsiehet, beym verjüngten Maasstabe willkührlich, und kömmt auf die Absicht an, ob man kleine oder große Längen worauf tragen will. Bedeutet AB eine Ruthe, so ist jeder Theil als B1, 1,2, 2, 3, ein Fuß einer Ruthe, die in zehn Füße getheilet ist, und jeder solcher Theile, die zwischen den Querlinien 9E und AE liegen, als 1a, 2b, 3c u. s. w. stellen die Zolle vor; so ist 1a = 9 Zoll, 2b = 8 Zoll, 3c = 7 Zoll, 4d = 6 Zoll, 5e = 5 Zoll, 6f = 4 Zoll, 7g = 3 Zoll, 8h = 2 Zoll, und 9i = 1 Zoll, daß also auf die Art ein solcher Theil als A9 wieder in zehn gleiche Theile getheilet ist. Eben das gilt auch von dem untern einen Theil F1, der auch so in zehn Theile getheilet ist, aber auf die Art, daß mv = 9 Zoll, nw = 8 Zoll, und so immer weiter nach B hin, die Linien, die zwischen FB liegen, immer um einen Th il kleiner sind, je näher sie nach B kommen. Daß das nun wahr sey, müssen wir beweisen. Wenn man den Triangel AE9 betrachtet, und sich erinnert, daß alle die Linien, wodurch in die Länge herunter von seinen Schenkeln Stücke abgeschnitten werden, als 1a, 2b ꝛc. mit der Grundlinie des Triangels oder mit A9 parallel sind,

sind, weil sie durch die Construktion parallel gemacht sind, so gelten nach §. 145. die Schlüsse:

$$EA : E1 = A9 : 1a.$$

Aber EA ist = 1, und da EA in zehn gleiche Theile getheilet ist, so ist $E1 = \frac{9}{10}$.

Ferner ist $A9 = \frac{1}{10}$, weil AB in zehn gleiche Theile getheilet ist, also dieser Schluß würde sich auch so abfassen lassen:

$$1 : \frac{9}{10} = \frac{1}{10} : \frac{9}{100}.$$

Es wäre also $1a = \frac{9}{100}$ Theile von AB. Wenn nun AB zehn Fuß bedeutete, da jeder Fuß zehn Zolle enthielte, also AB überhaupt 100 Zolle wäre, so sind $\frac{9}{100}$ Theile davon = 9 Zoll. Denn $\frac{10}{1}\frac{0}{0}\frac{.9}{0} = 9$.

Eben so kann man ferner schließen, EA : E2 = A9 : ab oder $1 : \frac{8}{10} = \frac{1}{10} : \frac{8}{100}$, und also 2b = 8 Zoll aus den vorigen Gründen. Und so kann man es endlich für alle mit A9 in dem Triangel AE9 liegende Parallellinien beweisen, daß sie so, wie sie näher nach E kommen, immer um $\frac{1}{10}$ von A9 kleiner werden, bis endlich 9i nur $\frac{1}{10}$ von A9 oder $\frac{1}{100}$ von AB ist, und wenn die 10 Theile von AB als Füße angenommen werden, einen Zoll vorstellet.

Eben so gehet es mit den Parallellinien mit Fl, nur daß sie nach B hin abnehmen, und ux $\frac{1}{10}$ von Fl oder $\frac{1}{100}$ von AB ist.

Allein das gilt nicht nur für diese Transversallinien, sondern sie sind alle so gezogen, daß man die Zehntel der Theile von AB darauf abnehmen

kann. Denn alle Theile der von oben nach unten hingehenden Linien, die zwischen den Transversallinien liegen, sind gleich lang, weil die Transversallinien einander parallel, und die heruntergehenden gleichfalls einander parallel sind, und Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, nach §. 84. Wenn man also die Länge zwischen zwey Transversallinien nähme, so würden die alle gleich lang seyn. Z. E. die Längen zwischen den Transversallinien, B1 und 2III sind alle $= \frac{2}{10}$ der Länge AB, oder hier, da wir AB als 10 Fuß angenommen haben, alle = 2 Fuß. Allein wenn man mit der einen Spitze des Cirkels auf der BF bleibet, so kann man auch alle Zolle oder alle Zehntels von einem Theil mit abnehmen. So wäre z. E. B2 = 2 Fuß. Nun die eine Spitze des Cirkels auf der BF in u gesetzet, und ihn so weit aufgethan, bis die andere Spitze den Punkt berühret, wo die heruntergehende Linie 1u und die Transversale 2III einander in α schneiden, so hat man 2 Fuß + $\frac{1}{10}$ Fuß, oder 2 Fuß ein Zoll. Denn xα wäre 2 Fuß, und xu $\frac{1}{10}$ Fuß. Eben so wäre tβ = 2 Fuß 2 Zoll, sγ = 2 Fuß 3 Zoll u. s. w. Die auf der Linie AE bemerkten Zahlen zeigen es, wie man siehet, schon an, wie viel Theile von einem solchen, als B1 einer ist, man genommen hat.

§. 160. Bedeutet AB 1 Fuß, so sind solche Theile, als B1, 1, 2 ꝛc. Zolle, und solche, als xu, yt Zehntheile der Zolle oder Linien, also xu = 1 Linie, yt = 2 Linien, zs = 3 Linien u. s. w.

f. w. Und wenn AB = 1 Zoll, so sind die Theile, als B1, 1, 2 ꝛc. Linien, und xu, yt, zs ꝛc. Zehntheile der Linien.

§. 161. Wir wollen nun dieses, was wir jetzt gesagt haben, durch ein Paar Exempel erläutern. Es soll AB = 1 Ruthe bedeuten, folglich kann man, wie auch §. 159 erhellet, noch Füße und Zolle auf diesem verjüngten Maasstabe abnehmen. Man soll 2 Ruthen, 5 Fuß, 6 Zoll darauf abnehmen, so müßte man die eine Spitze des Cirkels auf DH setzen, nehme man von D bis B zwischen dem Cirkel, das wären 2 Ruthen, noch bis B5 sind von D an 2 Ruthen, 5 Fuß. Aber nun hatte man noch die 6 Zolle nicht. Man setzt also die Spitze des Cirkels in den Punkt, wo die heruntergehende Linie, die von AE aus 6 kömmt, die DH schneidet, hier in ϱ, und öfnet ihn alsdenn so weit, bis die andere Spitze den Punkt π erreicht, wo die Transversale 5VI, und die von 6 heruntergehende Linie einander schneiden, welches hier in π geschiehet, so hat man 2 Ruthen, 5 Fuß, 6 Zoll zehntheilichtes Maas.

§. 162. Wenn nun, wie wir schon im §. 158 angezeigt, die Länge AB = BC = CD ꝛc. = der Länge eines Zolls im wirklichen gebräuchlichen Maaße ist; wenn solcher Längen, als AB, sich zehne auf dem Maasstabe befinden, wenn die oberste, als AB, wieder in zehn gleiche Theile B1 = 1, 2 = 2, B ꝛc. eingetheilt ist, welches

also Decimallinien sind; wenn übrigens die ganze Einrichtung dieser gemäß gemacht ist, so hat man **einen Fuß** in tausend Theilen. Wir haben daher zu dieser Zeichnung wirklich 3 Zoll rheinländisch Maas genommen, so gut wir es durch Vergleichungen und andere Prüfungen haben finden können. Ein solcher Theil, als CD oder CB oder AB, ist alsdenn, wie man gleich einsieht, $\frac{1}{10}$ des Fußes oder 1 Zoll, ein solcher Theil als $B1 = \frac{1}{10}$ von AB, also $= \frac{1}{100}$ des Fußes oder eine Linie, und ein solches Theilchen als $x1 = \frac{1}{10}$ von B1, oder jedes andere ihm gleichen Theils, also $\frac{1}{1000}$ des ganzen Fußes. Man kann also, wenn man in Decimalrechnungen Zehntel, Hundertel und Tausendtel des Fußes bekömmt, selbige ganz bequem zwischen dem Cirkel nehmen. Z. E. man nehme 0,23 Fuß, oder da hier Decimalmaas ist, 2 Zoll, 3 Linien. Nun sey AB = der zehnte Theil der Ruthe = 10 Zoll, so ist B2 = 2 Zoll und 5V = 2 Zoll, 3 Linien oder 0,23 Fuß. Man wird sehr wohl thun, sich nach dieser Anweisung fleißig zu üben, um eine Fertigkeit darinn zu erlangen. Sollte auch in dieser Betrachtung noch etwas nicht deutlich genug seyn, so wird man sich leicht den mechanischen Gebrauch des verjüngten Maasstabes von jemanden können zeigen lassen, und alsdenn unsere Theorie leicht verstehen. Um nicht zu weitläuftig zu werden, haben wir nicht mehr Exempel geben wollen.

Das siebente Kapitel.

Vom Cirkel, seinen Linien, Winkeln, darinn beschriebenen Figuren, Inhalt, Verwandlung und Verhältnissen.

§. 163.

Schon im Anfange dieser geometrischen Betrachtungen §. 23 zeigten wir weitläuftig genug, was ein Cirkel sey, wie er entstünde, die Benennung seiner Linien und Aus- und Abschnitte, daß er durch den Diameter in zwey gleiche Theile getheilt werde, was koncentrische und excentrische Kreise wären u. s. w. und wir bitten unsere Leser, alles dieses nochmal zu wiederholen, ehe sie dieses Kapitel anfangen, welches nun von den Eigenschaften des Cirkels ferner handeln wird. Wir haben das vornehmste, was wir jetzt vom Cirkel zu wissen nöthig haben, alles in dieses Kapitel gebracht, damit man es alles an einem Orte zusammen finden möchte. Wir werden erstlich das vornehmste von den Linien in und außer dem Cirkel abhandeln, alsdenn von seinen Winkeln reden, denn einige Figuren, die sich darinn beschreiben lassen, vorzüglich die regulären Polygonen, betrachten; alsdenn etwas über den Inhalt der Cirkelflächen und ihrer Theile sagen, und endlich

endlich dieses Kapitel mit den vornehmsten Verhältnissen, die zum Cirkel gehören, beschließen.

§. 164. Daß Cirkel von gleichen Radiis gleich groß sind, und einander bedecken, so daß ihre Peripherien genau auf einander fallen, haben wir kaum nöthig zu berühren. Ihre Erklärung macht dieses schon begreiflich. Wenn § 23 ein Cirkel eine Fläche ist, welche von einer krummen Linie eingeschlossen wird, die in allen ihren Punkten gleich weit vom Mittelpunkte absteht, und von einem dieser Punkte in der Peripherie bis zum Mittelpunkte gezogene gerade Linie, oder der Radius das Maas dieser Entfernung ist, und alle Radii im Cirkel gleich sind, so müssen in einem andern Cirkel, welcher einen eben so großen Radium hat, auch alle in der Peripherie befindliche Punkte eben so weit vom Mittelpunkt entfernt seyn, und die Cirkel einander nothwendig decken oder kongruent seyn. Man wird sich hievon sinnlich überzeugen, wenn man mit gleicher Oefnung des Cirkels zwey oder mehr Cirkel auf ein Papier ziehet, sie ausschneidet und auf einander legt. Wir kommen nun auf andere sehr nützliche Sätze.

§. 165. Eine solche Linie im Cirkel, wie Fig. 28 BD oder BH oder HD ist, heißt, wie uns schon aus §. 23. 24 bekannt ist, eine **Chorde** oder Sehne; das Stück des Cirkelumkreises, welches sie abschneidet, heißt der **Bogen** dieser

Seh-

Sehne. So ist z. E. das Stück der Peripherie, welches von BD abgeschnitten wird, der Bogen der Sehne BD, und der Boge BH ist der Bogen der Chorde BH. Nun behaupten wir, daß, wenn man gleich große Theile der Peripherie nimmt, und die durch Sehnen abschneidet, auch diese Sehnen gleich sind, oder wie man sich mathematisch ausdrückt, **in jedem Cirkel sind die Sehnen gleicher Bogen gleich.** So wären z. E. wenn Fig. 28 der Bogen BH und der Bogen HD gleich wären, auch die beyden Chorden BH und HD nach unserer Behauptung gleich. Diesen Satz wollen wir nun beweisen. Es mögen Fig. 118 die Bogen AB und ED gleich seyn. Man ziehe die Sehnen AB und ED, und aus den Enden, wo sie die Peripherie erreichen, die Radios AC, BC, EC und DC. Da die Winkel x und y, welche dadurch entstehen, durch gleiche Bogen, wie wir angenommen haben, gemessen werden, so müssen sie auch gleich seyn §. 36, also $x = y$. Und nun wird unser Satz schon bewiesen seyn, weil wir nun hiedurch wissen, daß die $\triangle ACB$ und $ECD \cong$ oder kongruent sind, einander decken, folglich $ED = AB$ seyn muß. Wir wollen den Satz nochmal kunstmäßig hinsetzen und beweisen. Fig. 118.

Satz

Satz AB = DE.
Denn AC = EC } weil alles Radii eines Cir-
AC = DC } kels sind, die alle gleich
x = y } sind.

△ACB ≅ △ECD weil zwey Linien und der eingeschlossene Winkel den △ bestimmen § 48, 49.

AB = DE.

Allein dieser Satz, den wir bewiesen haben, ist auch umgekehrt wahr; wenn die Sehnen in einem Cirkel gleich sind, so sind auch die Bogen, die zu diesen Sehnen gehören, gleich. Denn wenn wir nun annehmen wollen, daß AB = ED, so müssen aus dem Grunde, weil AC = BC = EC = CD, indem es alle Radii des Cirkels sind, beyde △ABC und ECD aus gleich großen Linien bestehen, und also nach §. 53, 54 beyde Triangel kongruent seyn. Sind sie aber kongruent, so muß der Winkel x = y seyn, weil sich die einander decken, folglich müssen sie auch, da ihre Schenkel gleich sind, von gleichen Stücken von Bogen gemessen werden, oder der Bogen AB muß = dem Bogen ED seyn.

§. 166. Wir wollen nun abermal Fig. 119 eine Sehne AD in einem Cirkel ADEA ziehen, und an ihre Enden A und D die Linien CA und CD aus dem Mittelpunkte des Cirkels. Wir bekommen dadurch einen gleichschenklichten Trian-

Fig. 119.

gel

gel ADC; denn AC ist = CD, weil es Radii eines Cirkels sind. Dieser gleichschenklichte Triangel muß alle die Eigenschaften haben, deren wir §. 66, 67, 68 gedacht haben. Wenn wir also nach §. 67 die Grundlinie des Triangels, oder hier die Sehne AD, in zwey gleiche Theile theilen, und aus dem Theilungspunkte N eine gerade Linie nach der Spitze dieses Triangels, welches der Mittelpunkt des Cirkels ist, ziehen, so werden wir dadurch den Winkel ACD in zwey gleiche Theile theilen §. 67. Kontinuiret man diese NC rückwärts nach F, bis sie den Bogen AFD erreicht, so wird sie auch den Bogen AD in F in zwey gleiche Theile theilen, weil, wenn der Winkel bey C in zwey gleiche Theile getheilt ist, also NCD = NCA, auch der Bogen FD = FA seyn muß, weil diese beyde Bogen diese beyden Winkel in eben demselben Cirkel und mit eben der Länge der Schenkel messen. Aber diese gerade Linie NC ist auch ein Perpendikel auf die Sehne AD nach §. 68, und da es nur auf einem Punkt einer Linie ein Perpendikel geben kann, so ist sie auch das einzige Perpendikel, das sich auf N oder auf die Mitte der Sehne fällen läßt. Dieses Perpendikel aber theilt nicht nur den Bogen AD in zwey gleiche Theile, sondern theilet verlängert auch den übrigen Theil der Peripherie oder den Bogen AED. Denn weil der Winkel NCD = NCA, wie wir eben bewiesen haben, so muß auch der Winkel DCE = ACE seyn, denn es sind beyde Nebenwinkel zu gleichen Winkeln, oder

also gleiche Complementen zu 180, ist aber DCE = ACE, so muß der Bogen DE = dem Bogen EA seyn, weil beyde gleiche Winkel in eben dem Cirkel messen.

Weil nun also der Bogen FD = AF, und der Bogen DE = AE, so muß der Bogen FD + DE = dem Bogen FA + AE, oder der Bogen FAE dem Bogen FDE gleich seyn.

Aus allen diesen Betrachtungen fließt nun folgender allgemeiner Satz: **Eine Perpendikularlinie, welche eine Sehne in zwey gleiche Theile theilt, theilt auch nach einer Seite verlängert ihren Bogen in zwey gleiche Theile, und gehet nach der andern Seite verlängert durch das Centrum des Cirkels, und theilet ihn in zwey gleiche Theile**, und diesen Satz haben wir durch diese Betrachtungen bewiesen. Eben so wird auch eine Linie, welche durchs Centrum geht, und perpendikular auf der Sehne steht, sie in zwey gleiche Theile, und wenn sie verlängert wird, auch den Bogen der Sehne in zwey gleiche Theile zerschneiden.

§. 167. Dieser Satz, und der Satz des 165sten Paragraphen helfen uns auch noch eine andere Bemerkung von den Sehnen zu machen, und zu erweisen, deren Gebrauch öfters sehr nützlich ist. **Gleiche Sehnen eines Cirkels sind auch gleich weit vom Mittelpunkte des Cirkels entfernt.** Es sollen Fig. 120 AD

Fig. 120.

und

und EG gleich große Sehnen seyn. Man ziehe auf sie aus dem Centro C die Perpendikel CH und CL, und noch die Radios CD und CE. Nun wissen wir, daß ein Perpendikel aus einem Punkt auf eine Linie gezogen, die kürzeste Entfernung davon sey §. 94. Wenn wir also beweisen können, daß, wenn die Sehnen gleich sind, die Perpendikel CH und CL auch gleich seyn müssen, so ist unser Satz richtig. Wir wissen schon aus dem vorhergehenden Paragraphen, daß eine Linie aus dem Centro, die auf der Sehne perpendikular steht und verlängert wird, die Sehne und den ihr zugehörigen Bogen in zwey gleiche Theile theilt. Da das ist, so ist also HD = EL, und der Bogen BD = dem Bogen EF. Aus dem letztern folgt, daß also der Winkel BCD = dem Winkel FCE, weil sie von gleichen Bogen gemessen werden. Da nun die Winkel L und H auch einander gleich sind, indem es beyde rechte Winkel sind, so muß der Winkel CEL nothwendig dem Winkel CHD gleich seyn, weil der bey beyden Triangeln noch zu gleichen Complementen zu zwey rechten Winkeln fehlte §. 89. Wenn wir nun die beyden Triangel HCD und ECL betrachten, so finden wir also

HD = EL wie wir eben gezeigt
CD = CE weil beydes Radii.
Der Winkel HDC = CEL

folglich nach §. 48, 49, weil △HCD ≅ △CEL zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich.

Also muß auch nothwendig CL = CH, oder beyde Entfernung der Sehnen vom Centro gleich seyn.

§. 168. Daß jede Sehne, welche nicht durch den Mittelpunkt des Cirkels geht, und also kein Durchmesser ist §. 23, kleiner seyn müsse, als der Durchmesser, wird einem jeden bald einfallen, und wenn er die vorhergehende Figur 120 betrachten will, davon sogleich lebendig überzeugt werden. AD ist eine Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt des Cirkels geht. Nun ist das Dreyeck HCD rechtwinklicht, also die Hypotenuse die größte von seinen Seiten, diese Hypotenuse ist hier der Radius CD, also CD > HD, aber CD ist auch der Radius oder der halbe Diameter, und HD die halbe Chorde, also $\frac{1}{2}$ Diameter > $\frac{1}{2}$ Chorde, folglich wird auch der ganze Diameter größer, als die ganze Chorde seyn. Da man ein solches rechtwinklichtes Dreyeck zeichnen konnte, wenn man auch die Sehne AD noch so nahe ans Centrum rückte, so sieht man, daß der Beweis ganz allgemein ist; da überdem die Wahrheit dieses Satzes schon genugsam in die Augen fällt.

§. 169.

§. 169. Wenn zwey Sehnen verschiedene Entfernungen vom Mittelpunkte haben, so ist die darunter allezeit die kleinste, welche am weitesten vom Mittelpunkte entfernt ist. Man wird dieses bald einsehen, wenn man Fig. 121 in einem Cirkel einen Durchmesser LM ziehet, und auf denselben verschiedene Perpendikularlinien auf LM, BG, DH, EI, die man von der Peripherie an ziehet, also verlängert, bis sie wieder an die Peripherie stoßen, und also Sehnen abgeben, und zwar Sehnen, die einander parallel liegen. In C sey nun das Centrum des Cirkels, und AC ein Radius. Wenn man nun betrachtet, wie ein Cirkel entstehen kann, nemlich daß sich der Radius AC nach L um C beweget, bis er endlich LC erreicht hat, und mit seinem äußersten Ende seinen Weg beschreibet, so sieht man bald, daß, wenn er nach B, nach D, und so weiter hinkömmt, und man von den Punkten B, D, E Perpendikel auf LC herab fallen läßt, diese Perpendikel die Entfernungen anzeigen, wie weit er noch von LC entfernt ist. Da er sich aber nach LC hinbewegt, so muß er demselben immer näher kommen, und also die Entfernungen von LC immer kleiner werden, folglich auch die Perpendikel, welche diese Entfernungen anzeigen, so wird also EI < DH, DH < BG seyn. Diese Perpendikel sind aber halbe Chorden, und ihre Entfernung vom Mittelpunkte ist CG, CH, CI, welches senkrecht auf ihnen steht. Je entfernter also diese halben Chorden vom Mittelpunkte sind, um desto

Figa 121.

kleiner werden sie seyn müssen, also auch die ganzen Chorden, und diejenige von ihnen wird die kleinste seyn, welche am weitesten vom Mittelpunkte entfernt ist. Es war dieser Satz auf diese Art leicht einzusehen, aber er ist auch höchst allgemein wahr, wenn auch schon nicht die Chorden in solchen Lagen liegen. Es seyn Fig. 122 AB und IE zwey Chorden eines Cirkels, und zwar sey AB vom Mittelpunkte C des Cirkels weiter entfernt, als IE, so muß IE auch größer als AB seyn, denn man verlängere die Entfernung der Sehne IE vom Centro, welches hier die Linie CK ist, so lange, bis sie gleich der Entfernung der andern Chorde, oder der Linie CM wird. Dieses sey die CL, also CL = CM. Man ziehe auf den Punkt L abermals eine Chorde unter dem rechten Winkel, die also parallel der IE seyn wird. Diese neue Chorde HF wird also der Chorde AB gleich seyn, nach §. 167

Fig. 122.

also HF = AB

aber HF < IE nach vorhergehendem §

---

folglich AB < IE welches also der allgemeine Beweis unses Satzes war.

Ueberhaupt werden, wie aus dem vorhergehenden Paragraphen folgt, die Sehnen immer kleiner, je mehr sie sich vom Mittelpunkte entfernen, bis sie endlich gar zu nichts werden, in die Peripherie fallen und verschwinden.

§. 170. Aus allen diesen bisher bewiesenen Sätzen folgen nun vielerley Folgen und Auflösun,

lösungen von Aufgaben, wovon wir nur einige der nothwendigsten berühren wollen. Die erste ist, **wie man zu einem gegebenen Cirkelbogen den Mittelpunkt finden könne, wenn dieser Mittelpunkt nicht gegeben wäre.** Wir wollen dieser Aufgabe Auflösung erstlich anzeigen, und nachher beweisen, daß unsere Auflösung wahr sey. Es sey Fig. 123 der Bogen ABDE gegeben, wozu man den Mittelpunkt suchen soll. Man ziehe in dem Bogen zwey Chorden, AB und DE, wie man will, gleich oder ungleich; man theile sie in F und G, jede in zwey Theile, und ziehe daraus ein unbestimmtes Perpendikel. Diese beyden Perpendikel werden sich einerwärts durchschneiden, und wo sie sich durchschneiden, da ist der gesuchte Mittelpunkt des Bogens. Es ist dieses aus dem § 166 auch leicht begreiflich, denn weil wir daselbst bewiesen haben, daß eine Linie, die auf der Mitte einer Sehne senkrecht stehe, oder ein Perpendikel auf die Mitte einer Sehne verlängert durch den Mittelpunkt des Cirkels gehe, so mußten beyde Perpendikels, sowol FC als GC, durch den Mittelpunkt des Cirkels gehen, denn an beyden hatten wir diese Bedingungen erfüllt. Allein es ist nur ein Mittelpunkt des Cirkels, also da sie beyde dadurch gehen mußten, mußten sie sich auch daselbst schneiden, und wo sie sich schnitten, mußte der Mittelpunkt des Cirkels seyn. Sie konnten sich auch nicht anderwärts etwa vorher schneiden, denn gesetzt, das wäre möglich, so würden

Fig. 123.

sie doch, nachdem sie sich geschnitten hätten, aus einander gefahren seyn, und also sich immer weiter von einander entfernt haben, und also sich im Mittelpunkte nicht haben schneiden können, welches aber wider den Beweis des §. 166, also unrichtig ist. Folglich ist, wo sich beyde Perpendikel auf der Mitte einer Chorde schneiden, der Mittelpunkt des Cirkels.

§. 171. Auf eben diese Art kann man auch das Problem auflösen, durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Cirkelbogen zu ziehen, in einer geraden Linie dürfen diese drey Punkte nicht liegen, denn sonst wäre eine Linie dadurch gelegt, eine gerade Linie, und das ist kein Cirkel, der mit einer geraden Linie keine drey Punkte gemein haben kann. Zwey von diesen gegebenen Punkten werden und müssen zwar allezeit in einer geraden Linie liegen, weil man von einem Punkte nach einem jeden andern gegebenen eine gerade Linie legen kann §. 5.

Man wird schon muthmaßen, daß dieses Problem eben wol durch den §. 166 aufgelöset wird. Freylich. Es seyn Fig. 124 die drey Punkte A, B, D gegeben, wodurch die Cirkellinie gehen soll. Man ziehe von A nach B, und von B nach D eine gerade Linie, welches sich nach §. 5 allezeit thun läßt. Nun hat man zwey gerade Linien, AB und BD, bekommen, welche man als Chorden betrachten kann, die einen Punkt mit einander in B gemein haben. Wenn

Fig. 124

wir

wir nun nach §. 166 und auch dem vorhergehenden Paragraphen auf die Mitte beyder dieser Linien in F und G Perpendikel setzen, so werden sich diese einerwärts in C schneiden, und da wird der Mittelpunkt des Cirkels seyn, der zu diesen Chorden gehört, weil wir nach den Lehrsätzen des §. 166 verfahren haben. Dieser Cirkel muß aber nothwendig durch die Punkte ABD gehen, weil dieses Endpunkte der Chorden sind, die Endpunkte der Chorden aber laut der Erklärung einer Sehne §. 23 allezeit in der Peripherie des Cirkels liegen.

§. 172. Man sieht hieraus, daß durch drey Punkte, welche in der Peripherie des Cirkels liegen, auch dessen Mittelpunkt bestimmt werde, und nicht anders als hier in C fallen könne. Wenn also drey in der Peripherie liegende Punkte gegeben sind, so läßt sich auch dadurch nur *ein* Cirkel liegen, denn wenn man auch zwey oder mehrere dadurch legen wollte, so würden alle ihre Mittelpunkte an einen Ort fallen, und weil die Entfernung aller vom Mittelpunkte bis zu den gegebenen Punkten in der Peripherie, welches doch der Radius wäre, gleich wäre, so müßten sie auch alle über einander liegen und sich decken.

§. 173. Es ist auf diese Art auch ganz leicht, um jeden Triangel überhaupt einen Cirkel zu beschreiben, weil man die drey Ecken des Triangels, oder die Punkte an den Linien, wo die

Seiten der Triangel zusammen stoßen, als drey gegebene Punkte ansehen, und also mit ihnen nach dem §. 171 verfahren kann. Die bloße Fig 125. Zeichnungen Fig. 125 erläutern dieses genugsam. Auf die Mitte von AB und BD sind Perpendikel gesetzt, wo diese sich schneiden, ist der Mittelpunkt des Cirkels, in dessen Peripherie diese drey Punkte, welche in die drey Ecken des Triangels fallen, kurz die Seiten des Triangels sind also Chorden dieses Cirkels. Sind, wie hier in der einen Figur, alle Seiten des Triangels gleich, so werden, da sie als Chorden betrachtet werden, auch ihre Bogen gleich seyn §. 165, folglich wird die Peripherie des Cirkels dadurch in drey gleiche Theile getheilt seyn.

§. 174. Wir reden nun etwas von einer andern merkwürdigen Linie, die man an den Cirkel zieht, nemlich von der **Tangente**. Im §. 23 haben wir erklärt, was sie sey, nemlich eine gerade Linie, die so an einem Orte der Peripherie des Cirkels hinstreicht, daß sie selbige zwar berührt, aber nicht schneidet. Es war Fig. 28 die Linie Gl. Diese Linie ist aus vielen Betrachtungen sehr merkwürdig, und weiter unten in der Trigonometrie werden wir ihren Nutzen sehr bemerken. Wir wollen jetzt erst zeigen, wie man sie auf einem gegebenen Punkt in der Cirkelperipherie Fig. 126. zieht. Es sey Fig. 126 der Punkt A in der Peripherie des Cirkels gegeben, an welchen man eine Tangente ziehen soll. Man ziehe von dem

Mit-

Mittelpunkte C nach diesem Punkte der Peripherie, oder nach A eine gerade Linie, welches also ein Radius seyn wird; man setze auf das Ende dieser CA eine andere Linie BA, unter einem rechten Winkel, so daß CAB ein rechter Winkel sey. Diese Linie BA wird eine Tangente seyn. Wir behaupten von ihr, daß sie der Cirkel nur in dem einen Orte A berühre, und in sonst keinem einzigen, oder alle andere Punkte der Linie BAD werden außer dem Cirkel fallen. Es wird uns dieses leicht seyn einzusehen. Wir wollen einmal annehmen, es sey möglich, daß sie die Peripherie noch in einem andern Punkte berühre, so wird dieser Punkt doch so weit von dem Mittelspunkt C seyn müssen, als der erstere, weil, da er in der Peripherie seyn muß, man dahin einen Radius ziehen kann, und alle Radii eines Cirkels einander gleich sind. Kann man aber von einem jeden Punkte der Linie BAD beweisen, daß er weiter von C liege, als der Punkt A, so ist es gewiß, daß die Cirkelperipherie nun in dem Punkte A berührt werde. Wir wollen eine andere Linie CE aus C nach der Linie BAD ziehen. Man könnte sie ganz nahe an A ziehen, so wird doch das gelten, was wir jetzt von ihr sagen wollen, und wir haben sie nur Deutlichkeit halber etwas davon entfernt gezogen. Durch die Ziehung der Linie CE bekömmt man nun einen Triangel CAE, der bey A einen rechten Winkel hat, denn wir haben BD auf CA rechtwinklicht gezogen. Nun ist die größte Seite eines rechtwinklichten Trian-

gels

gels die Seite, die dem rechten Winkel entgegen gesetzt ist, oder die Hypotenuse, dieses ist hier die CE, also CE ist größer als CA, nun ist CA = CF oder = Radio, also da CE > CA, so ist sie auch > CF, oder als der Radius, also fällt der Punkt E außer der Peripherie des Cirkels. Und so kann man dieses von allen Punkten der Linie DB, die außer A liegen, beweisen, und unser Satz wird also richtig seyn.

§. 175. Allein wenn man auch eine Tangente, wie man will, an einen Punkt der Peripherie A gezogen hat Fig. 126, und man ziehet auf diesen Punkt A eine Linie aus dem Mittelpunkte oder seinen Radius, so wird der Radius auch allezeit unter einem rechten Winkel auf dem Berührungspunkt der Tangente stehen. Denn gesetzt, wir nehmen einmal an, daß das nicht wäre, und daß es einen andern Punkt in der Linie DB gäbe, auf welcher eine gerade Linie aus C gezogen rechtwinklicht stünde, so mag das mal der Punkt E oder ein jeder anderer Punkt seyn. So muß denn also nach dieser Voraussetzung bey E ein rechter Winkel seyn. Hätte man nun die Linie CA = Radio auf den Berührungspunkt auch gezogen, so bekäme man einen Triangel CAE, der bey E einen rechten Winkel hätte. Die Seite, welche diesem rechten Winkel entgegen gesetzt wäre, oder die CA wäre alsdenn die größte, also müßte alsdenn CA größer als CE seyn, aber das gehet nicht an, weil CA auf den Berührungs-

Fig. 126.

punkt

punkt gezogen ist, und also gleich Radio ist, und CE nothwendig größer als CA seyn muß, weil wir C außer dem Berührungspunkte angenommen haben, da das nicht ist, und weil A ein Berührungspunkt ist, so kann sich bey E oder jedem andern Punkte kein rechter Winkel befinden, es muß sich doch aber aus dem Punkte C auf die Linie BD ein Perpendikel fällen lassen, also irgendwo ein rechter Winkel zu stehen kommen, der kann also nur allein bey A seyn, und also der **Radius stehr aufdem Berührungspunkte der Tangente allezeit unter einem Winkel.** Daß die Linie, die aus dem Mittelpunkte C auf die Tagente perpendikular fällt, auch nur die einzige sey, folget auch schon daraus, weil man auf einen gegebenen Punkt in einer geraden Linie nur einen Perpendikel ziehen kann §. 65. Wie man von einem gegebenen Punkt, der außerhalb dem Cirkel lieget, eine Tangente an denselben ziehet, werden wir weiter unten lehren.

§. 176. Wir wollen nun jetzt einmal mit einer Tangente Parallellinien in den Cirkel ziehen, und sehen, zu was für Bemerkungen uns diese Anlas geben. Es sey Fig. 127 eine Tangente AD an den Cirkel gezogen, welche denselben in B berühret. Man ziehe mit ihr parallele Linien in den Cirkel, welche also Chorden desselben seyn werden, als EF, IG, KH. Es werden dadurch alle Bogen, die zwischen dem Berührungspunkt B und einer Parallinie, als die Bogen BI und BG, und Fig. 127.

auch

auch alle Bogen, die zwischen den Parallelen selbst liegen, einander gleich seyn. Wer werden dieses auch leicht einsehen, wenn wir nur auf den Berührungspunkt B den Radius CB und also einen Perpendikel §. 175 darauf ziehen. Da nach unserer Konstruktion alle Sehnen, als CF, IG, KH mit der Tangente AD parallel stehen, so wird, weil CB auf AB perpendikular stehet, auch diese CB auf alle den Parallelen oder Sehnen perpendikular stehen, welches uns aus §. 77, 79 von den Parallellinien noch bekannt seyn muß. Ist das aber, und gehet CB nach unsrer Konstruktion durchs Centrum, so theilet sie auch nach §. 166. da sie auf den Chorden senkrecht stehet, selbige in zwey gleiche Theile, und auch den Bogen, der diesen Chorden zugehöret, also muß daher BF = BE; BG = BI, BH = BK seyn. Ist aber dieses, so sind auch die Bogen zwischen zwey Sehnen einander gleich.

Denn ist BI = BG
nun ferner BE = BF
} aus eben angeführten Gründen

BI − BE = BG − BF
EI = FG.
} so ist gleiches von gleichem abgezogen oder welches einerley

Und so kann man es von allen Stücken der Bogen zwischen zwey Sehnen ganz leicht begrifen.

§. 177. Wir haben überhaupt in dem ersten Kapitel §. 35 gesagt, was eine **in** den Kreis beschriebene, und was eine **um** den Kreis beschriebene

bene geradlinichte Figur sey, oder was eine Figur sey, in die ein Kreis beschrieben ist, und wie deren Seiten die Peripherie des Kreises berühren müssen. Wir zeigten §. 173, wie man um einen Triangel einen Cirkel beschreiben könne, jetzt können wir zeigen, wie man in einem Triangel einen Cirkel beschreiben könne. Es sey denn nun Fig. 128 der Triangel ABD gegeben, in welchem ein Kreis soll beschrieben werden. Man theile zwey der Winkel dieses Triangels in zwey gleiche Theile aus dem Punkte C, nun wo sich diese Theilungslinien durchschneiden, ziehe man auf die Seiten BD, AB und AD, die Perpendikel CF, CG und CH. Diese Perpendikel werden einander alle gleich seyn, und wenn man den Cirkel in einer der Weite CF, CG oder CH öfnet, und die Cirkellinie ziehet, so wird sie alle drey Seiten des Dreyecks in F, G, H berühren, und also in dem Triangel beschrieben seyn. Die Seiten des Triangels werden alsdenn Tangenten dieses Cirkels seyn. Es kömmt bey dieser Aufgabe darauf an, daß wir beweisen, daß durch dieses Verfahren die Linien CF, CG und CH alle gleich werden, und also Radii des Cirkels sind, und also der Cirkel wirklich die Seiten des Triangels berühret. Der Satz, den wir also beweisen müssen, ist: Fig. 128.

CF, CG, CH sind Radii des eingeschriebenen Cirkels, also unter einander gleich.

Wir beweisen dieses also:

I) der Winkel CFD = CHD es sind beyde rechte und wir haben sie so konstruiret.

der Winkel n = m auch weil wir die Winkel n + m in zwey gleiche Theile theilten

also auch der Winkel t = r weil er bey beyden ein gleiches Complement zu 2 Rektis ist.

Da nun die Linie CD = CD

---

so muß nach §. 51 und 52 △CFD ≅ △CHD seyn, folglich auch die gleichen Winkeln entgegen gesetzte Seiten

also auch CF = CH. Eben so ist.

II) der Winkel CFB = CGB ex constructo.

der Winkel y = z auch ex constr.

also s = q

da nun auch die Seite BC = BC

---

so ist △ BCF ≅ △BCG

---

folglich auch CF = GC
weil nach I) CF = CH
und nach II) CF = CG.

Und wenn zwey Dinge dem dritten gleich sind, sie auch unter einander gleich sind, so ist auch CH = CG. Folglich ist CF = CG = CH, welches der Satz war, den wir beweisen mußten. Sie sind

also alle drey Radii, und der Mittelpunkt des Cirkels ist C.

§. 178. Ehe wir weiter gehen, und von den Winkeln des Cirkels handeln, wollen wir erstlich noch etwas davon reden, wenn man einen oder mehrere Kreise an oder in einander leget. Was **koncentrische** und **excentrische** Kreise waren, haben wir schon §. 25, 26 bemerket. Wir wollen jetzt nur noch etwas von den excentrischen Kreisen sagen. Sie werden uns vorzüglich merkwürdig, wenn sie sich einander **schneiden** oder **berühren**, und es wird für unsere Leser genug seyn, wenn wir nur hierüber einige Betrachtungen anstellen. Wir bemerken erstlich, daß, wenn zwey Cirkel einander schneiden oder berühren, so haben sie gewiß nicht ein Centrum mit einander gemein. Denn hätten sie das gemein, so würde entweder der eine in dem andern liegen, oder sie würden gar ganz auf einander zu liegen kommen und sich decken. Das letztere geschähe, wenn sie von gleichen Radiis wären, und aus der Erklärung des Cirkels wird uns dieses sattsam einleuchtend seyn; und sie länger in einander, wenn des einen Radius größer als des andern wäre, da sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt hätten. Es sind also nur excentrische Kreise, die sich einander **schneiden** oder **berühren** können.

§. 179. Wenn sich zwey Cirkel einander schneiden, so schneiden sie sich an mehr als einem Orte. Denn man nehme Fig. 30 den Cirkel, Fig. 30.

dessen Mittelpunkt H ist, welcher den Cirkel, dessen Mittelpunkt C ist, schneidet. Wenn wir uns nun einen Punkt D, welchen die Cirkellinie ABDE in dem andern Cirkel liegen hat, vorstellen, und einen andern Punkt E, welchen sie ausserhalb dem andern Cirkel liegen hat, vorstellen, und solche zween Punkte muß sie doch haben, denn sonst schnitte sie den Cirkel nicht, so muß doch, wenn man nun von D den Cirkel um seinen Mittelpunkt H zu ziehen anfängt, um nun aus dem andern Cirkel nach dem Punkte E zu kommen, die Cirkellinie des andern Cirkels durchschneiden, und wenn man nun mit der Cirkellinie nach E gekommen ist, und nun den Cirkel AEBD in D zu schließen, wieder in den andern Cirkel nach D will, so muß man ihn doch abermal schneiden. Man siehet also gleich aus der Natur des Cirkels ein, daß, wenn sich zwey Kreislinien schneiden, dieses mehr als **einmal** geschiehet. Hier geschahe es zweymal, und es hätten also beyde Cirkel zwey Punkte in ihrer Peripherie mit einander gemein, nemlich die Punkte, wo sie sich einander durchschnitten. Aber Cirkellinien, die sich einander schneiden, können sich auch nur in zwey Punkten schneiden, und also nur zwey Punkte mit einander gemein haben. Denn hätten sie drey mit einander in ihrer Peripherie gemein, so hätten sie nach §. 168 ein gemeinschaftliches Centrum und gleiche Radios, und fielen in einander. Können sie sich nicht in drey Punkten schneiden, so kann es noch viel weniger in **vier** oder mehrern

Punk-

Punkten geschehen. Wenn wir nun betrachten, daß Kreislinien, die sich einander schnitten, sich nothwendig in mehr als einem Orte schneiden müßten, daß es aber nicht möglich war, daß sie sich in drey oder mehr Orten schneiden konnten: so folget also ganz richtig, daß, wenn sie sich schneiden, sie sich in zwey und nicht in mehr Orten schneiden müssen.

§. 180. Kreislinien, die einander berühren, wie Fig. 30, der Kreis des Mittelpunkts N ist, den andern Kreis, dessen Mittelpunkt C ist, von innen bey M berühret, und der Kreis, dessen Mittelpunkt P ist, den andern, dessen Mittelpunkt C ist, von außen bey Q berühret. Solche Kreise, die also einander von außen oder von innen berühren, haben nur den **einen** Punkt, wo sie sich einander berühren, mit einander gemein, und alle andern Theile ihrer Linien liegen ganz außer der andern. Denn hätten solche Kreise zween Punkte mit einander gemein, so schnitten sie sich, wie das in dem vorigen Paragraphen ganz deutlich bewiesen ist.

§. 181. Es mag dieses hierüber genug seyn, weil uns mehrere Betrachtungen hierüber nach der Absicht dieses Buchs zu weit führen würden. Wir reden nun von den Winkeln **in** und **an** und **um** die Kreise. Die vornehmsten, die wir jetzt zu bemerken haben, ist 1) der **Winkel an dem Mittelpunkt** (angulus ad centrum) oder auch **Centrixwinkel.** Es ist derjenige Winkel Fig.

129, dessen Spitze C an den Mittelpunkt und dessen Schenkel CB und CA an die Peripherie des Cirkels stoßen, oder es ist der Winkel x. 2) Der Winkel an der Peripherie (angulus ad peripheriam) der Peripheriewinkel ist derjenige Fig. 129, dessen Spitze D sowol, als seine Schenkel DF und DE beyderseits an die Peripherie stoßen, oder hier auch der Winkel y. **Der Winkel über der Peripherie** ist derjenige, der seine Spitze außer der Peripherie hat, hier in G, dessen Schenkel GH und GA aber auf der Peripherie stehen, hier der Winkel z.

Fig. 129.

§. 182. Wir wollen nun das Maas und die Größe dieser Winkel untersuchen. Der **Centriwinkel** BCA ist leicht ausgemessen, er hat zu seinem Maaße den Bogen, darauf er stehet, oder den Bogen BA, denn weil seine Spitze sich im Mittelpunkt seines Cirkels befindet, so ist also CA = CB = radio, und also der Bogen BA zeiget seine Größe an, wie das schon aus §. 36 und 37 erhellet.

Mit dem **Peripheriewinkel** hat es eine ganz andere Beschaffenheit. Man gebrauchet, um ihn zu messen, oder um seine Größe in Graden, Minuten und Sekunden des Cirkels anzugeben, den Centriwinkel, dessen Schenkel auf einem eben so großen Bogen stehen, und man beweiset, daß er allezeit nur halb so groß als sein Centriwinkel sey. Es kann nun dieser Peripheriewinkel in Ansehung seines Centriwinkels verschie-

dene

dene Lagen haben, aber alle diese Lagen lassen sich auf drey bringen, und von allen diesen dreyen läßt sich dieser Satz beweisen. Die drey verschiedenen Lagen des Peripheriewinkels gegen den Centriwinkel sind Fig. 130, 131, 132 vorgestellet. Fig. 130 lieget der Peripheriewinkel ADB oder y also, daß, wenn man einen Centriwinkel ACB oder x beschriebe, der eine Schenkel desselben AC auf den Schenkel des Peripheriewinkels AD fallen würde. Fig. 131 lieget der Peripheriewinkel ADB, welcher auch hier z + y ist, (weil wir durch die Hülfslinie DE, von der wir nachher bemerken werden, warum sie gezogen ist, ihn in zwey Theile getheilet haben) also daß er keinen Theil dieser Schenkel mit den Schenkeln seines Centriwinkels gemein hat, oder daß seine Schenkel gänzlich außerhalb den Schenkeln seines Centriwinkels fallen, und nur, wo sie beyde auf ihren Bogen stehen, einander erreichen. Und Fig. 132 hat der Peripheriewinkel ADB oder z eine solche Lage in Ansehung seines Centriwinkels, daß sein einer Schenkel AD den einen Schenkel des Centriwinkels CB schneidet. Er hättte auf eben die Art auf die andere Seite des Cirkels gelegt werden können, so daß sein Schenkel DB den Schenkel CA geschnitten hätte. Der Durchschnittspunkt könnte auch noch näher oder weiter von C liegen, das verändert unsern Beweis und Betrachtungen nicht im geringsten, wie wir nachher sehen werden. Da nicht mehr Lagen eines Peripheriewinkels gegen seinen Centriwinkel möglich

Fig. 130. 131. 132.

sind, so wird, wenn wir von diesen dreyen bewiesen haben, daß der Peripheriewinkel die Hälfte seines Centriwinkels sey, dieser Satz auf alle mögliche Fälle erwiesen, und also ganz allgemein wahr seyn.

§. 183. Also erstlich den ersten Fall Fig. 130, welcher sich also ausdrücken läßt:

Satz: $y = \frac{1}{2}x$ oder $2y = x$

Denn es ist der Winkel an der verlängerten Seite des Triangels CDB, nemlich der Winkel $x = y + z$ §. 95.

Aber weil CD und CB beyde Radii, also gleich lang, also der Triangel CDB gleichschenklicht ist, so ist der Winkel $y = z$ §. 66.

Da man nun also statt z die y setzen kann, so ist

$$\frac{x = 2y}{2}$$

oder auch $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x = y$

welches der Satz war, den wir beweisen wollten. Also der Fall ist bewiesen, denn y Fig. 130 ist der ganze Peripheriewinkel, und $\frac{1}{2}x =$ dem halben Centriwinkel.

§. 184. Der zweyte Fall Fig. 131, welcher sich also ausdrücken läßt:

Satz: $\frac{y + z = u + x}{2}$ oder $u + x = 2y + 2z$.

Wir

Wir haben den ganzen Peripheriewinkel sowol als den ganzen Centriwinkel durch die Hülfslinie DE, welche wir aus der Spitze des Peripheriewinkels durch die Spitze des Centriwinkels gezogen haben, in zwey Theile getheilet, ohne uns darum zu bekümmern, ob die Theile gleich sind oder nicht. Wir haben dieses gethan, um den Beweis auf den ersten Fall reduciren zu können, weil wir dadurch zwey gleichschenklichte Triangel CDA und CDB erhalten haben.

Es ist nun $u = y + r$ weils der Winkel an der verlängerten Seite des $\triangle CDA$ §. 95.

aber auch $y = r$ weil CD und CA = Radiis, also gleich §. 66.

---

also $u = y + y = 2y$.

Ferner ist: $x = s + z$ nach obigen Gründen §. 95.

aber auch $s = z$ denn CD und CB sind Radii §. 66.

---

also $x = z + z = 2z$

da $u = 2y$

und $x = 2z$

---

so ist $u + x = 2y + 2z$

---

oder: 2

$$\frac{u + x}{2} = y + z$$

und das wollten wir beweisen.

Da nun $y + z =$ dem ganzen Peripheriewinkel Fig. 131, und der gleich ist $\frac{u + x}{2} =$ dem halben Centriwinkel, so ist auch dieser Fall bewiesen.

§. 185. Der dritte Fall Fig. 132, er wird sich also ausdrücken lassen:

$$x = 2z \text{ oder } \frac{x}{2} = z$$

Um den Beweis dieses Satzes uns zu erleichtern, zogen wir von der Spitze, wo der Peripheriewinkel den Kreis berührte, durch das Centrum des Cirkels bis an die Peripherie wieder eine gerade Hülfslinie, welches also ein Diameter war, nemlich die CD. Wenn wir nun erst den dadurch entstandenen Triangel CDB betrachten, so finden wir, daß der gleichschenklicht ist, weil CD und CB Radii des Cirkels sind, also nach §. 66 $y + z = n$. Ferner finden wir, daß, wenn wir die Seite des Triangels CD nach E hin verlängern, der Winkel an dieser verlängerten CD des $\triangle$CDB, $u + x$ ist. Und endlich bemerken wir noch, daß der Winkel y alleine gleichfalls ein Peripheriewinkel ist, dessen Schenkel DE und DA sind, der zu seinem Centriwinkel den Winkel u hat, und dessen einer Schenkel CE mit einem Theil des Schenkels des Peripheriewinkels auf einander fällt. Wir wissen daher nach unserm ersten Fall §. 183, daß $u = 2y$ oder $y = \frac{1}{2}u$. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir unsern Satz leicht beweisen.

Er

Er war, um ihn nochmals zu wiederholen, $\frac{x}{2} = z$ oder $\frac{x}{2} = z$.

Denn $u + x = y + z + n$ §. 95.

aber $y + z = n$ nach §. 66.

---

folglich $u + x = y + z + y + z$ oder $= 2y + 2z$.

Nun ist ferner aus dem vorhergehenden §. 184. $u = 2y$

---

folglich $u + x - u = 2y + 2z - 2y$

---

oder $x = 2z$

---

oder $\frac{x}{2} = z$

und dieses war der Beweis des dritten Falls.

Oder auch $u = 2y$

---

nun war

$u + x = 2y + 2z$

---

also substituirt

$2y + x = 2y + 2z$

$2y + x - 2y = 2z$

$x = 2z$

$\frac{x}{2} = z$.

Aber $\frac{x}{2}$ war der halbe Centriwinkel und z der ganze Peripheriewinkel in Fig. 132.

Wir haben nun auf alle mögliche Fälle unsern Satz bewiesen, und weil nach §. 182 der Centriwinkel durch den Bogen gemessen wird, worauf er stehet; und jeder Peripheriewinkel nur halb so groß als sein Centriwinkel ist, so muß auch sein Maas nur halb so groß seyn. **Also jeder Peripheriewinkel hat zu seinem Maaße den halben Bogen worauf er stehet**, also z. E. Fig. 130. $y = \frac{1}{2}AB$, Fig. 131. $y + z = \frac{1}{2}AB$, und Fig. 132. $z = \frac{1}{2}AB$.

§. 186. Es ist leicht begreiflich, daß auf einem Bogen die Peripheriewinkel unter sehr verschiedenen Lagen stehen können. So sind Fig. 133 die Peripheriewinkel x, y, z, u, alle Winkel, die auf einem und eben demselben Bogen AB stehen. Sie aben alle nach dem vorigen §. 185 zu ihrem Maaße den halben Bogen AE. Da sie alle einerley Maas haben, so müssen sie auch alle unter einander gleich seyn. Alsa haben wir abermals eine wichtige Folge ans diesen Lehrsätzen von Peripheriewinkeln: **Alle Winkel an der Peripherie, die auf eben demselben Bogen stehen, sind einander völlig gleich**, ihre Lage gegen einander mag übrigens beschaffen seyn wie sie wolle.

Fig. 133.

§. 187. Man kann über jedem Bogen eine Chorde ziehen, und wir haben mehrmals gezeigt,

zeigt, daß der Diameter eines Cirkels die größte Chorde sey, und die Kreislinie in zwey gleiche Theile theilt §. 30. Der Bogen, welcher also zum Diameter gehört, ist die halbe Kreislinie, und da die ganze Kreislinie in 360 Grade, welche das Maas zu vier rechten Winkeln sind, getheilt wird, so wird also, wie uns auch schon bekannt ist, die halbe Kreislinie 180 Grad betragen, und also das Maas für zwey rechte Winkel seyn. Wenn wir nun Fig 134 einen Diameter AB, unter welcher Lage es wolle, zögen, und darauf eine oder mehrere Peripheriewinkel x, y, z setzten, wie groß würden sie seyn? Die Antwort wird leicht seyn. Da wir allgemein, ohne auf die Größe des Bogens zu sehen, bewiesen haben, daß jeder Peripheriewinkel zu seinem Maaße den halben Bogen habe, worauf er steht, so muß das auch von den Peripheriewinkeln, die auf der halben Kreislinie stehen, gelten. Sie werden also zu ihrem Maaße die Hälfte der halben Kreislinie, oder $\frac{1}{4}$ der ganzen Kreislinie haben. Diese aber misset nach §. 31, 33 und 36 einen Winkel von 90°, oder einen rechten Winkel. Sie werden daher alle rechte Winkel seyn, also ist der Lehrsatz allgemein wahr: **Alle Peripheriewinkel, die auf dem Diameter stehen, sind alle rechte Winkel, und alle einander daher auch gleich.** So ist daher $x = y = z$, und jeder $= 90°$ oder $=$ Recto. Dieser Satz ist gleichfalls sehr merkwürdig und nutzbar.

Fig. 134.

§. 188.

§. 188. Wir wollen von diesem letzterm Satze noch einige nützliche Folgen und ihren Gebrauch hersetzen. Man wird gleich zugeben, daß dieses ein bequemes Mittel sey, die Richtigkeit eines Winkelhakens zu prüfen. Was ein Winkelhaken sey, nemlich zwey an einander unter einem rechten Winkel zusammen gefügte Lineale, weis ein jeder, und wir dürfen uns bey seiner Beschreibung nicht aufhalten. Der Anblick lehret es ohnedem besser kennen, als alle Beschreibung. Man wird auch leicht einsehen, daß eine seiner Vollkommenheiten darinn besteht, daß, wo die äußern und innern Seiten der beyden Lineale zusammen kommen, genau ein rechter Winkel sey. Wenn man nun von den beyden äußersten Enden des Diameters an die Peripherie zwey gerade Linien zieht, die an der Peripherie einander schneiden, so hat man nach vorhergehendem § einen rechten Winkel. Wenn man eine der Seiten des Winkelhakens an die eine dieser Linien legt, so daß die Spitze des Winkelhakens, oder der Ort, wo beyde auf einander gesetzte Lineale an ihrer äußern oder innern Seite zusammen kommen, auf die Spitze dieses Winkels trift, so muß die andere Seite des Winkelhakens genau an die andern Schenkel dieses Winkels liegen, weil zwey rechte Winkel nothwendig einander decken müssen, weil sie beyde gleich sind. Es ist dieses von selbst so klar, daß wir nichts weiter davon sagen dürfen.

§. 189. Ein anderer sehr nutzbarer Gebrauch des bewiesenen Satzes ist, auf einer gera-

den

den Linie AB Fig. 135 ein Perpendikel BD auf ihren äußersten Punkt B zu fällen, oder eine andere gerade Linie unter einem rechten Winkel darauf aufzurichten, ohne die AB zu verlängern; ein Fall, welcher öfters vorkommen kann. Man richte auf der Linie AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC auf, so daß AC = CB. Es ist gleichviel, wie groß oder wie klein man AC = CB nimmt, man muß sich nur nach der Größe des Platzes richten, wo nachher die BD soll gezogen werden. Denn je größer man AC = BC annimmt, desto länger wird nachher die Linie BD. Wenn man das gleichschenklichte Dreyeck aufgerichtet hat, so verlängere man die Seite AC bis nach D, also daß CD = AC, oder beyde gleich lang sind. Aus dem Punkte, wo sich CD endiget, oder aus D, ziehe man auf den äußersten Punkt der Linie AB auf den Punkt B die DB, so ist das verlangte geschehen, und DB steht auf dem äußersten Punkt von AB unter einem rechten Winkel, oder der Winkel ABD = Recto. Fig. 135.

Es ist dieses sehr leicht zu beweisen: Nach unserer Construktion ist AC = CD = CB, und wenn man nun in C den Mittelpunkt eines Cirkels annimmt, so werden die AC, CD und CB Radii seyn, folglich wird die Cirkellinie durch die Punkte A, D und B gehen müssen. Aber weil AD = CD in einer geraden Linie liegen, so ist AC + CD = dem Diameter dieses Cirkels. Also der auf diesem Diameter aufgerichtete Winkel

kel ABD muß nach §. 187 nothwendig ein rechter Winkel seyn.

§. 190. Wir lehrten im 174ten §, wie man eine Tangente an einen gegebenen Punkt in der Cirkellinie ziehen könne, und bewiesen §. 175, daß der Radius auf der Tangente allezeit unter einem rechten Winkel stünde. Jetzt können wir durch Hülfe des 187ten § auch zeigen, wie man von jedem gegebenen Punkte außer der Cirkellinie eine Tangente an die Cirkellinie ziehen könne, welches eben so nutzbar als das erstere ist. Es sey Fig. 136. Fig 136 der Punkt A außerhalb der Kreislinie D, F, B, G gegeben, aus welchem man eine Tangente an diese Kreislinie D, F, B, G ziehen soll. Man verfähret also: Man ziehe von dem außer der Kreislinie gegebenen Punkt A, bis an den Mittelpunkt dieses Kreises, eine gerade Linie AC, diese halbire man oder theile sie in zwey gleiche Theile, welches hier in E ist, es ist also AE = EC. Aus E ziehe man wieder einen andern Cirkel mit dem Radius AE = EC, welches der Cirkel ABCD seyn wird, der, weil AE = EC, und weil in C das Centrum des erstern Cirkels ist, durch dieses Centrum durchgehen wird, oder da der Punkt des Centrums des erstern Cirkels in dieses zweyten Peripherie wird zu liegen kommen. Gleichfalls wird auch die Linie AC der Durchmesser dieses zweyten Cirkels seyn, weil AE = EC = 2 Radius, und beyde in einer geraden Linie liegen. Ferner wird dieser zweyte Kreis den erstern

stern in zwey Punkten, hier in B und D, schneiden, welches aus §. 179 erhellet, wo dieser zweyte Cirkel nun den erstern schneidet, nemlich in den Punkten B und D; dahin ziehe man aus dem gegebenen Punkt A außer dem ersten Cirkel die Linien AB und AD. Ich sage, daß sowol AB als AD beyde Tangenten des Cirkels DFBG sind, und daß also die Aufgabe aufgelöset sey. Nur mit der Anmerkung, daß man, anstatt einen Punkt an dem Cirkel zu finden, wo aus dem Punkte A eine Tangente daran könnte gezogen werden, man solcher Punkte zwey gefunden hat, nemlich D und B. Man konnte dieses schon so halb und halb vorher muthmaßen, weil sich aus dem Punkte A nach zwey Punkten an den Cirkel muthmaßlich Linien ziehen ließen. Wir müssen nun noch beweisen, daß AB sowol als AD wirklich Tangenten des Cirkels DFBG sind. Sie werden es wirklich seyn, wenn wir beweisen können, daß von dem Centro C des Cirkels DFBG zwey Radii CB und CD auf diese Berührungspunkte B und D gezogen, wirklich unter einem rechten Winkel darauf stehen, denn das ist nach §. 175 die Eigenschaft einer Tangente. Daß das sey, beweisen wir also: Die Linie AC ist der Diameter des Kreises ABCD, wie wir schon weiter oben gesehen haben. AB und AD sind Linien an den äußersten Punkten dieses Diameters an die Peripherie dieses Cirkels ABCD. Ferner sind CB und CD auch Linien aus dem andern Endpunkte des Diameters an eben diese Punkte B und D gezogen,

gen, denn weil EC auch = Radio, so geht auch der Cirkel ABCD durch C. Aber nach §. 187 muß also der Winkel ABC sowol als ADC ein rechter Winkel seyn, weil AC = Diametro ist, und beyde Winkel mit ihren Schenkeln darauf stehen. Allein beyde Schenkel dieser rechten Winkel CB und CD kommen auch aus dem Centro des andern Cirkels her, und gehen bis an seine Peripherie, also sind es Radii desselben. Weil sie nun in dem kleinen Cirkel ABCD mit BA und AD gerade Winkel ausmachten, aber ihre Lage jetzt gar nicht verändert haben, so müssen es noch gerade Winkel seyn. Da ferner AD und AB an die Punkte gezogen waren, wo sich beyde Cirkel einander schneiden, um daselbst den Cirkel zu berühren, und von daselbst mit CB und CD gerade Winkel werden, so müssen es wirkliche Tangenten des Cirkels DFBG aus dem Punkte A seyn, weils sonst nicht angienge, daß sie mit den Radiis dieses Cirkels gerade Winkel machen könnten, welches aber nach §. 175 eine Eigenschaft der Tangente ist.

§. 191. Es sind aber auch beyde Tangenten AB und AD gleich groß.

Denn weil BC = CD weils Radii eines Cirkels DFBG sind.

ferner CA = CA

ferner der Winkel B = D

---

so ist △CBA ≅ △CDA nach §. 50.

Also

Also muß nothwendig AB = AD seyn. Ferner wird auch durch die Linie CA der Winkel BCD in zwey gleiche Theile getheilt, denn weil die Trianguel ABC und ADC einander kongruent sind, also einander völlig decken, so wird also, wenn man sie über einander legt, CD auf CB zu liegen kommen, und der Winkel ACD dem Winkel ACB gleich seyn; wie denn auch aus eben den Gründen der Winkel BAC dem Winkel DAC gleich seyn muß. Eben so, weil der Winkel ACD = dem Winkel ACB, so werden auch die Bogen FD und FB einander gleich seyn, weil sie gleiche Centriwinkel messen. Daß sich aber aus dem Punkte A auch nur die beyden Tangenten AD und AB ziehen lassen, folget schon daraus, weil, wenn man auch annehmen wollte, daß durch den Punkt A noch zwey andere Linien, als AB und AD sind, gezogen würden, so würden sie entweder außerhalb den Linien AB und AD, oder innerhalb denselben, und also innerhalb oder außerhalb dem Winkel BAD liegen müssen. Lägen sie außerhalb demselben, so giengen sie die Cirkellinie ganz vorbey. Lägen sie innerhalb demselben, so schnitten sie den Cirkel, auf beyde Fälle wären es keine Tangenten. Diese beyden Linien AB und AD sind also die einzigen, die aus dem Punkte A als Tangenten an den Cirkel DFBG können gezogen werden.

§. 192. Wir bemerken noch, ehe wir weiter gehen, eine merkwürdige Eigenschaft eines

Vierecks, welches in einem Kreis beschrieben, so daß seine Ecken die Cirkellinie berühren, wozu uns die vorher angeführten Sätze Anlaß geben.

Fig. 137. Wenn Fig. 137 ein Viereck in einem Kreis, wenn es auch von noch so ungleichen Seiten ist, also gezeichnet ist, daß dessen vier Winkelpunkte alle in der Kreislinie liegen, so sind allezeit zwey entgegengesetzte Winkel gleich zwey rechten Winkeln oder machen zusammen zwey rechte Winkel aus. Also in dem Vierecke ABDG ist $x + y = 2R$, oder $r + z = 2R$, oder $DGA + DBA = 2R$ und $GAB + GDB = 2R$. Wir haben nur nöthig, dieses von zwey entgegengesetzten Winkeln zu beweisen, denn von den andern beyden folgt es von selbst. Da sich ein Viereck durch die Diagonale in zwey Dreyecke theilen läßt, davon jedes $2R$ zur Summe seiner Winkel hat, folglich das ganze Viereck zur Summe seiner Winkel $4R$ hat, so folgt es von selbst, daß, wenn von zwey entgegengesetzten Winkeln bewiesen ist, daß sie gleich $2R$ sind, die Summe der andern beyden es auch seyn müsse, weil sonst die $4R$ nicht heraus kommen. Wir wollen hier jetzt beweisen den

Satz $DGA + DBA = 2R$, und so wird unser Satz bewiesen seyn. Um nun dieses zu beweisen, ziehe man aus den Spitzen des Vierecks in die entgegengesetzte Spitzen die Linien GB und AD. Nun entstehen dadurch verschiedene Triangel, davon wir jetzt einige betrachten wollen.

Da

Da die Summe aller Winkel in einem Triangel = 2 R. §. 88,

so ist also DGA + GAD + ADG = 2 R.

Aber es ist ABG = ADG denn es sind beyde Peripheriewinkel, die auf einer Sehne AG stehen §. 186.

---

also anstatt ADG die Winkel ABG gesetzt, so ist DGA + GAD + ABG = 2 R.

Aber es ist auch GAD = GBD } weils Peripheriewinkel sind, da GAD und GBD beyde auf der Sehne GD, und ADG und ABG beyde auf der Sehne AG stehen §. 186.

und auch ADG = ABG

wie wir gesehen haben

also wenn man gleiches für gleiches setzt, so

ist daher auch DGA + GBD = ABG = 2 R.

Weil nun aber GBD + ABG = DBA, indem diese beyden Winkel zusammen den einen ausmachen, so ist, wenn man anstatt der beyden Winkel den einen setzt, DGA + DBA = 2 R., und das sind ja die zwey entgegengesetzten Winkel, und also der Satz, den wir beweisen wollten.

Es wird sich also auch um jedes Viereck, wenn es noch so irregulär ist, wenn nur dessen zwey entgegengesetzte Winkel einander gleich sind,

auch eine Kreislinie ziehen lassen, so daß die Spitzen desselben in die Kreislinie fallen (also auch um ein reguläres Viereck, denn da sind die entgegengesetzten Winkel gleich). Man wird eine Kreislinie darum verzeichnen, wenn man drey seiner Spitzen, als D, G, A, als Punkte annimmt, die in die Kreislinie fallen sollen, weil nach §. 172 durch drey gegebene Punkte eine Kreislinie kann gezogen werden, und man nach des §. 171 Anweisung verfährt. Der Punkt B wird alsdenn auch in die Kreislinie fallen müssen.

§. 193. Wir haben bis daher einige Winkel im Cirkel betrachtet, welches die nothwendigsten sind, die wir nach der Absicht dieses Buchs erklären mußten. Wir wollen nun einen Winkel außer der Peripherie betrachten. Wenn Fig. 139 ein Winkel x mit seinen Schenkeln, AB und AD, auf der Peripherie eines Cirkels EFBD steht, aber seine Spitze sich außer der Peripherie in A befindet, so nennet man einen solchen Winkel **den über die Peripherie verlängerten Winkel** (angulum extra peripheriam). Wir wollen jetzt sein Maas zu bestimmen suchen. Man ziehe aus der Ursache die Hülfslinie FD von einem Punkt D, wo der eine Schenkel auf der Peripherie steht, bis an den Punkt, wo sein anderer Schenkel AB im Herausgehen aus dem Cirkel die Cirkellinie schneidet. Man erhält dadurch einen Peripheriewinkel, der auf einem eben so großen Bogen BD steht, und einen Triangel FAD.

Fig. 139.

Bey-

Beydes wird uns dienen, das Maas des Winkels x ausfindig zu machen.

Weil u der Winkel an der verlangten Seite des △AFD ist, so ist $u = x + y$ §. 95.

aber weil u ein Peripheriewinkel, so ist $u = \frac{1}{2}BD$ §. 185.

Nun ist y auch ein Peripheriewinkel, der auf dem Bogen FE steht, also $y = \frac{1}{2}FE$

wenn man nun anstatt u das gefundene, und anstatt y auch das gefundene setzt, so ist also $\frac{1}{2}BD = x + \frac{1}{2}FE$

folglich $\frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}FE = x$

oder $\frac{BD - FE}{2} = x$

Das nun in Worten ausgedrückt, ist: Der Winkel außer der Peripherie hat zu seinem Maaße die halbe Differenz der beyden Bogen, worauf seine Schenkel in dem Cirkel und außer dem Cirkel stehen, oder er hat zum Maas die halbe Differenz der Bogen, die seine verlängerte Schenkel schneiden.

Wir wollen doch ein Exempel darüber geben. Es sey der Bogen BD $= 7^\circ$, der Bogen EF $=$ 2°, so wäre $x = \frac{7^\circ - 2^\circ}{2} = \frac{5^\circ}{2} = 2\frac{1}{2}^\circ$.

§. 194. Wir fangen eine andere Lehre an, die eine Stelle in der Lehre von dem Cirkel fordert, nemlich die Lehre von den **Polygonen** oder **Vielecken**. Was überhaupt ein Polygon sey, haben wir schon §. 22 vorläufig und überhaupt gesagt, nemlich geradlinichte geschlossene Figuren, die verschiedene Seiten und also auch Ecken haben. Wenn man die Kreislinie nur überhaupt betrachtet, so wird man bald bemerken, daß man in dieser Linie doch verschiedene Punkte wird annehmen können, die alle gleich weit oder nicht gleich weit von einander sind, daß man diese Punkte durch gerade Linien wird verbinden können, die man von einem Punkte nach dem andern zieht, daß man auf die Art eine geschlossene eckigte geradlinichte Figur bekömmt, die so viel Seiten hat, als man Punkte angenommen hat, und auch so viel Ecken oder Winkel bekömmt. §. 22 sind diese Punkte, die man in der Kreislinie angenommen hat, alle gleich weit von einander, und folglich alle Seiten gleich lang, welche Seiten man also als gleiche Sehnen oder Chorden eines Cirkels ansehen kann, so heißt das Polygon ein reguläres Polygon, welches auch gleiche Winkel hat, wie wir weiter unten anmerken werden, Fig. 140. wie wir Fig. 140 auf die Art ein solches regulä-

res

res Achteck finden werden. In demselben ist die Seite AB = BC = CD = DE u. s. w. kurz alle Seiten einander gleich. Man hätte auch können diese Punkte A, B, C, D nicht gleich weit von einander annehmen, und würde man auf die Art ein irreguläres Achteck bekommen haben. Wir haben hier jetzt mit regulären Polygonen zu thun, die sich alle in den Cirkel einschreiben lassen, oder um die sich, wenn sie verfertigt wären, allezeit so ein Cirkel beschreiben läßt, daß ihre Ecken in seine Peripherie fallen, wie wir weiter unten zeigen werden, welches bey einem irregulären Polygon nicht allezeit angeht. Wenn wir also in den folgenden Paragraphen von Polygonen reden, so werden wir allezeit **reguläre** Polygone darunter verstehen.

§. 195. Man wird sich auch leicht bey der Betrachtung des Cirkels vorstellen, daß sich auch um selbigen wird ein Polygon beschreiben lassen, so daß die Cirkellinie alle Seiten desselben berührt, also die Seiten des Polygons Tangenten des Cirkels sind, auch daß alle diese Seiten gleich lang seyn können, daß also das Polygon regulär ist, wie Fig. 141 ein solches Polygon ist, da AB = BC = CD = DE u. s. w. Fig. 141.

§. 196. Ehe wir nun weiter gehen, möchte man uns billig fragen, wie man nun ein solches reguläres Polygon in oder um den Cirkel beschriebe, und seine Seite fände, wenn der Ra-

dius des Cirkels gegeben ist. Eigentlich läßt sich das nur von wenigen nach den bisherigen Grundsätzen geometrisch finden, unter denen das Viereck und Sechseck am leichtesten geometrisch zu konstruiren ist. Die Seiten der andern findet man durch algebraische Rechnungen, wovon wir doch unten ein Paar Exempel anführen wollen, und am leichtesten durch die Trigonometrie, davon wir an seinem Orte reden werden. Am gewöhnlichsten konstruirt man sie mechanisch, da man die Kreislinie mit dem Cirkelinstrumente durch Versuche in gleiche geforderte Theile theilt, und denn die Seiten des Polygons zieht. Doch hievon weiter unten. Wir wollen jetzt ein schon im Cirkel beschriebenes Polygon betrachten, seine Eigenschaften erforschen, und nachher das weitere davon lehren.

§. 197. Wir haben erstlich bey einem regulären Polygon zwey Winkel zu betrachten, welche der **Centriwinkel** und der **Polygonwinkel** genennet werden. Wenn man Fig. 142 von einer Seite AB eines in einem Cirkel beschriebenen Polygons die Linien AC und BC nach dem Mittelpunkte C zieht, welche Linien also Radii des Cirkels sind, so heißt der Winkel, den sie am Centro des Cirkels einschließen, als hier der Winkel x, der Centriwinkel des Polygons. Und der Winkel, welchen zwey Seiten des Polygons, als hier GI und IH, oder IH und HF, mit einander machen, oder die Winkel z und r heißen Polygons-

Fig. 142.

lygonwinkel. Daß sowol Centriwinkel als Polygonwinkel in jeder Art der Polygone sehr verschieden seyn müssen, kann man schon zum voraus muthmaßen, weil die Polygonseiten doch kleiner oder größer sind. Wir wollen nachher ihren Werth schon finden.

§. 198. Da nach der Construktion eines Polygons alle Seiten desselben gleich sind, also AB = BG u. s. w. ferner bey allen die nach dem Centro gezogenen Linien gleich sind, indem es Radii des Cirkels sind, als CF = AC = BC = GC, und so weiter, so müssen die Triangel, welche dadurch entstehen, kongruent seyn, oder sie müssen sich einander decken, weil sie aus Seiten bestehen, die alle einander gleich sind, und drey Seiten nur einen Triangel bestimmen. Es werden daher auch die gleichen Seiten entgegengesetzte Winkel gleich seyn. Also folgt daraus, daß alle Centriwinkel in einem Polygon gleich sind, und also z. E. die Winkel t, x, y u. s. w. eines Centrum einander gleich sind. Dieses lehrt uns auch ihr wirkliches Maas zu bestimmen. Jeder solcher Centriwinkel wird durch den Bogen gemessen, worauf er steht. Da alle diese Bogen gleich sind, weil ihre Chorden, welches die Seiten des Polygons vorstellen, gleich sind §. 165, so wird man das Maas eines Centriwinkels bald finden. Man darf nur alle Grade der ganzen Cirkellinie in so viele Theile theilen, als Seiten des Polygons sind, und der Quotient,

welcher herauskömmt, ist die Größe des Centriwinkels. Die ganze Cirkellinie wird in 360° getheilt, und also würde z. E. der Centriwinkel für das Sechseck seyn $= \frac{360°}{6} = 60°$, fürs Achteck $\frac{360°}{8} = 45°$ u. s. w. oder da $360° = 4R.$ so wird, wenn man allgemein die Anzahl der Seiten eines Polygons $= n$ nennet, eine allgemeine Formel für den Centriwinkel seyn $= \frac{4R.}{n}$ So ist z. E. beym Sechseck $n = 6$, beym Zehneck $n = 10$, u. s. w.

§. 199. Aus diesen Betrachtungen läßt sich nun auch das Maas des Polygonwinkels leicht herleiten, weil Fig. 142 die Dreyecke in jedem Polygon, die dadurch entstehen, wenn man von den Endpunkten ihrer Seiten nach dem Centro Linien zieht, alle gleichschenklicht sind, indem zwey ihrer Seiten Radii des Cirkels sind, darein das Polygon steht, so müssen auch die Winkel, die an der Polygonseite liegen, als hier m und p oder q und s, gleich seyn §. 66. Da nun ferner laut vorhergehenden § die Triangel im Polygon kongruent sind, so sind auch nun alle diese Winkel unter einander gleich, also $m = p = q = s$. Da sie alle unter einander gleich sind, so muß $m + p$ eben so groß seyn, als $p + q$. Es ist aber $p + q$ der Polygonwinkel, und man kann nun

statt

statt dessen $m + p$ setzen, für welche beyden sich bald ein Werth finden läßt, der also dem Werthe des Polygonwinkels gleich seyn muß.

Es war der Centriwinkel des Polygons, oder hier $A = \frac{4R}{n}$ (wir wissen, was das sey, aus dem vorhergehenden §.) Nun wissen wir ferner, daß alle Winkel in einem Triangel zusammen gleich sind $2R$ §. 88. Wenn wir nun von diesen zwey rechten Winkeln, die alle Winkel eines Triangels zusammen ausmachen, den Centriwinkel t abziehen, so muß der Rest nothwendig noch die Größe der beyden seyn. $m + p$ wird also seyn $= 2R - \frac{4R}{n}$, oder unter einerley Benennung gebracht: $\frac{2nR - 4R}{n} = \frac{(n-2)}{n} . 2R$ oder wenn man $2R$ durch 180° ausdrückt $= \frac{(n-2).180^\circ}{n}$, wo n abermal die Seite des Polygon bedeutet. Da dieses der Werth für $m + p$ ist, aber $m + p = p + q =$ dem Polygonwinkel, so muß auch dieses der Werth für den Polygonwinkel seyn, also auch hier in der Figur für r und z. So ist z. E. für ein Sechseck der Polygonwinkel, oder der Winkel $p + q = p + m = \frac{(n-2).180}{n} =$

$$\frac{(6-2).180}{6} = \frac{4.180}{6} = \frac{720}{6} = 120^\circ.$$

§. 200.

§. 200. Nach diesen Angaben ist es nun leicht, eine Tafel für die Centri- und Polygonwinkel zu verfertigen. Die Ingenieurs bedienen sich auch solcher Tafeln bey dem Vestungs- und Schanzenbau, wo die Lehre von den Polygonen am mehrsten gebraucht wird. Man darf nur nachgerade $n = 3 = 4 = 5 = 6$ u. s. w. setzen. So wäre zum Beyspiel der Centriwinkel des Zwölfsecks $\frac{360}{12} = 30^\circ$, und der Polygonwinkel $= \frac{(12-2).180}{12} = \frac{10.180}{12} = \frac{1800}{12} = 150^\circ$.

Je größer die Anzahl der Seiten des Polygons sind, desto kleiner werden seine Centriwinkel, weil in der Formel $\frac{4R.}{n}$ der Dividendus zwar unverändert bleibet, aber n oder der Divisor größer wird. Je kleiner aber die Centriwinkel werden, desto mehr wachsen die Polygonwinkel, weil alsdenn der Winkel t, den man von 180 Graden, als allen Winkeln des $\triangle ACF$ abziehet, immer kleiner wird. Beym Sechseck war der Polygonwinkel $= 120^\circ$, beym Vier und Zwanzigeck wird der Centriwinkel $\frac{360}{24} = 15^\circ$ und der Polygonwinkel $= \frac{(24-2).180}{24} = \frac{22.180}{24} = 165^\circ$ seyn.

Anmerkung. Man wird nun auch wol fragen, ob diese Formeln auch den Polygonen angehen,

gehen, die um den Cirkel, als Fig. 141. sich befindet, beschrieben sind. Die Antwort darauf ist ja, und wir werden weiter unten zeigen, wenn wir lehren, wie man ein solches Polygon zeichnet, und wie sich um alle reguläre Polygone ein Cirkel beschreiben läßt, so daß sie auf eben die Art sich in selbigem befinden, als ob sie darin gezeichnet wären, daß dieses sehr gegründet sey. Jetzt reden wir daher vorzüglich von dem in dem Cirkel construirten Polygon.

§. 201. Die Summe aller Polygonwinkel zusammen in einem Polygon zu finden, wird auch nun sehr leicht seyn. Sie ist der eine Polygonwinkel multipliciret mit der Anzahl der Seiten oder Ecken des Polygons, weil schon nach §. 22. jedes Polygon so viel Ecken oder Winkel als Seiten hat. So wird z. E. die Summe aller Polygonen des Sechsecks seyn $= 120^{\circ}.6 = 720^{\circ}$, weil der Polygonwinkel des Sechsecks $= 120^{\circ}$ nach der Formel des 199 §. ist. Oder ganz allgemein, wenn §. 199 $\frac{(n-2)\,180}{n}$ = einem Polygonwinkel, so ist also $\frac{(n-2)\,180.\,n}{n}$ = allen Polygonwinkeln, das ist aber $= (n-2).180$, weil sich n im Divisor gegen das n im Dividendus hebet. Also im Vier und Zwanzigeck wird die Summe aller Poligonwinkel $165^{\circ}.24 = 3960^{\circ}$. seyn.

§. 202. Wenn die Anzahl der Seiten in einem Polygon eine gerade Zahl ist, so muß, weil

alle

alle Centriwinkel zusammen = 360° sind, die Hälfte derselben = 180° seyn. Ueber dieser Hälfte der Centriwinkel muß sich also nothwendig ein halber Cirkel befinden, und nun mag man diese Hälfte der Centriwinkel zu zählen anfangen wo man will, so müssen sich die Radii, die sie von beyden Seiten einschließen, daher in einer geraden Linie befinden, und zusammen einen Diameter ausmachen, und daher muß es auch wahr seyn, daß unter der Bedingung das Polygon von jedem kontinuirten Radius in zwey gleiche Theile getheilet wird. Das Sechseck Fig. 142 ist durch den kontinuirten Radius GC, welcher alsdenn GF gesworden ist, in zwey gleiche Theile getheilet, und so würde ein jeder ander kontinuirter Radius es in zwey gleiche Theile getheilet haben.

§. 203. Wir müßten auch nun wol vortragen, wie man ein reguläres Polygon beschreibet oder zeichnet, wovon wir §. 195. schon etwas gesaget haben. Man thut es gemeiniglich mechanisch, und wenn man auch, wie weiter unten vorkommen wird, geometrisch die Seite des Polygons findet, so wird man doch mechanisch prüfen, ob man es recht gezeichnet hat. Will man erstlich ein Polygon in einem gegebenen Cirkel beschreiben, so theilet man Fig. 141 die Peripherie des Cirkels in so viel gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben soll, und ziehet denn die Linien AB, BG u. s. w. Wenn man dieses mit dem Cirkelinstrumente thut, so bemühet man sich eigentlich, gleiche

Chor-

Chorden zu erhalten, allein wir wissen auch, daß diese gleichen Bogen zugehören §. 165, also alle Centriwinkel dadurch in dem Polygon gleich werden, und nach §. 199 und 200. müssen auf die Art auch alle Polygonwinkel gleich werden.

§. 204. Ein Polygon um einen gegebenen Kreis zu verzeichnen, verfährt man also Fig. 143. Man beschreibe ein eben so vielseitiges Polygon in dem gegebenen Cirkel. Wir wollen z. E. annehmen, es solle ein Fünfeck um einen Cirkel beschrieben werden, so beschreibe man erstlich ein Fünfeck ABDEF in diesem Cirkel. Man theile die Chorden dieses Cirkels, welches nun die Seiten dieses Fünfecks sind, durch ein Perpendikel, welches man aus dem Centro des Cirkels auf sie fallen läßt, in zwey gleiche Theile §. 166, es sind dieses die Linien Ca, Cb, Cd, Ce, Cf. Man kontinuire diese Linien, bis sie die Cirkellinie erreichen, welches in G, H, I, K, L geschehen wird. Hiedurch wird nach §. 166 auch der Bogen dieser Sehnen in zwey gleiche Theile getheilt. Man ziehe ferner aus dem Mittelpunkte des Cirkels die Radii Cg, Ch, Ci, Ck, Cl, welche man über die Peripherie verlängert. Nun ziehe man mit den Seiten des Polygons im Cirkel Parallellinien auf die Punkte im Cirkel G, H, I, K, L, die bis an die verlängerten Radios gehen, welches in M, N, O, P, Q geschehen wird, alsdenn wird man auf die Art das Polygon M, N, O, P, Q um den Cirkel beschrieben erhalten. Fig. 143.

Wir

Wir müssen hier nun beweisen, daß die auf die Art um den Cirkel beschriebene Figur ein wirkliches um den Cirkel beschriebenes Polygon sey. Wir werden dieses bewiesen haben, wenn wir zeigen: 1) daß alle ihre Seiten den Cirkel berühren; 2) daß ihre Polygonwinkel in Q. M, N, O, P, gleich groß sind; 3) daß alle ihre Seiten unter einander gleich lang sind, woraus denn die Gleichheit ihrer Winkel am Centro von selbst folgt. Die Figur hat alsdenn alle Eigenschaften eines regulären Polygons, und ist daher ein um den Cirkel beschriebenes Polygon.

1) Daß alle ihre Seiten den Cirkel berühren. Wir wollen nur eine Seite vornehmen, denn weil sie alle auf einerley Art konstruirt sind, so gilt das für alle, was von einer bewiesen wird. Es ist QM parallel AB durch unsere Konstruktion, also wird nach §. 77 der Winkel CaB = dem Winkel CGM seyn. Nun ist der Winkel CaB = R aus der Konstruktion, also muß auch der Winkel CGM = R seyn. Die Linie QM ist auf diesen Punkt G gezogen, also muß sie den Cirkel in G berühren, und eine Tangente seyn nach §. 175, und eben das kann man von allen den Linien dieses Polygons beweisen.

2) Daß alle ihre Winkel in Q, M, N, O, P gleich sind. Es ist ferner der Winkel Cla = dem Winkel CQG gleichfalls nach §. 77, weil QM parallel AB ist, und aus eben dem Grunde der Winkel Clf dem Winkel CQL, also muß auch die Summe beyder Winkel gleich seyn, oder

der

der Winkel Cla + Clf = CQG + CQL, oder der Polygonwinkel bey l = dem Polygonwinkel bey Q. Auf eben die Art kann man beweisen, daß der Polygonwinkel bey R dem Polygonwinkel bey M, kurz jeder Polygonwinkel des innern Polygons dem ihm gegenüberstehenden gleich sey. Aber alle Polygonwinkel des innern Polygons sind unter einander gleich §. 199, also müssen auch nun, wie aus dem eben gesagten folgt, alle Polygonwinkel des äußern dem innern unter einander gleich seyn.

3) Auch alle die Seiten des äußern Polygons sind unter einander gleich groß. Wir haben gesehen, daß die Polygonwinkel in beyden Polygonen unter einander gleich waren; wir haben ferner gesehen, daß der Winkel Cla = CQG und Clf = CQL; aber auch jeder dieser Winkel sind unter einander gleich, oder jeder ein halber Polygonwinkel, wie wir aus dem 199sten § wissen, und dieses gilt, wie man leicht einsieht, für alle Winkel des äußern und innern Polygons. Also werden alle die Triangel, als CQG, CGM, CMH, CHN u. s. w. unter einander kongruent seyn, oder einander decken, denn sie haben bey Q, M und N u. s. w. jeder einen halben Polygonwinkel, und sind bey G und H u. s. w. rechtwinklicht, also muß auch der dritte Winkel bey C in allen gleich seyn, und weil in allen eine Seite gleich, nemlich CG = CH = CI u. s. w. = Radio, so müssen diese Triangel nach §. 51 alle unter einander kongruent seyn, also auch QG = GM

$= MH = HN$ u. s. w. seyn, und daher auch $QG + GM = MH + HN$ oder $QM = MN$ u. s. w. also die Seiten des äußern Polygons unter einander gleich seyn.

Anmerkung. Man sieht auch hieraus, daß das wahr sey, was wir §. 200. Anmerk. behaupteten.

§. 205. Allein es kann einem auch eine Linie gegeben seyn, welches eine Seite des Polygons seyn soll, oder man soll auf einer gegebenen Linie ein Polygon verzeichnen. Nun geht das zwar nach unsern bisher gehabten Grundsätzen, wie wir schon gesagt, nur von einigen geometrisch an, als z. E. vom Sechseck und Viereck. Wir Fig. 144. wollen daher jetzt eine mechanische Art mittheilen, die völlig allgemein ist. Es sey Fig. 144 die Polygonseite AB gegeben. Man suche nun nach der Formel §. 199 für den ganzen Polygonwinkel, welche war $2nR - 4R$, den halben Polygonwinkel, welcher also seyn wird $\frac{2nR - 4R}{n} : 2 =$

$\frac{2nR - 4R}{2n} = \frac{nR - 2R}{n}$, oder auch $\frac{nR}{n} - \frac{2R}{n}$

$= R - \frac{2R}{n}$.

Exempel: Das Polygon sey ein Zehneck, so ist der halbe Polygonwinkel $90° - \frac{2 \cdot 90}{10} = 90° - 18°$

$= 72^{\circ}$. Da n, wie bekannt, die Zahl der Seiten ist, so richte man an beyden Seiten von A und B diesen Winkel an, und sehe, wo sich beyde Schenkel AC und BC durchschneiden, daselbst ist das Centrum des Cirkels, der diesem Polygone zukommt. Man ziehe aus C durch die Punkte A und B diesen Cirkel, so wird man die gegebene Seite so vielmal darinn herum tragen können, als verlangt worden ist, und also das Polygon auf die Art auf der gegebenen Linie verzeichnen.

Man wird von der Richtigkeit dieses Verfahrens überzeugt seyn, wenn man beweisen kann, daß, wenn man auf die Art verfährt, der Winkel bey C oder der Centriwinkel ACB ein so großer Winkel sey, als ein Centriwinkel des gegebenen Polygons seyn muß, denn alsdenn ist auch der Theil der Peripherie, der über die gegebene Linie AB geht, wirklich ein so vielter Theil der Peripherie, als ein solcher Polygonwinkel forderte, und weil alle Seiten gleich lang gemacht sind, die ganze Figur wirklich ein reguläres Polygon, und alle Centriwinkel und Polygonwinkel gleich, wie aus §. 197 und folgenden erhellet.

Es ist aber die Summe der Winkel im $\triangle ACB$, Fig. 144 $x + y + z = 2R$.

Nun ist auch

ferner $y+z = R - \frac{2R}{n} + R - \frac{2R}{n}$, weil wir sie also konstruiret haben nach dem vorhergehenden, nemlich den Werth beyder halben Polygonwinkel.

oder wirklich addirt $y+z = 2R - \frac{4R}{n}$

dieses statt $y+z$ gesetzt $x + 2R - \frac{4R}{n} = 2R$

folglich $x = 2R - 2R + \frac{4R}{n}$

$x = \frac{4R}{n}$.

Dieses aber ist der wirkliche Centriwinkel für jedes Polygon, wie uns der 198ste § lehrt, also ist auch jeder Bogen, den ein solcher Winkel fasset, $\frac{1}{n}$ Theil der Peripherie, und da alle Bogen durch die Konstruktion gleich sind, indem alle Chorden gleich gemacht sind, so ist diese auf solche Art verfertigte Figur ein wirkliches Polygon. Hier in der Figur ist es ein Fünfeck, wo n also 5 bedeutet, da also der Winkel z oder y nach der Formel $= R - \frac{2R}{n} = 90 - \frac{180}{n} = 90 - 36 = 54°$ ist, und der Winkel $x = \frac{4R}{n} = \frac{360}{5} = 72°$ ist

§. 206. Hat man aber schon ein wirkliches Polygon, so läßt sich sowol um dasselbe als in demselben ein Kreis beschreiben. Will man um ein gegebenes reguläres Polygon ABDEF Fig. 144 einen Kreis beschreiben, so theile man zwey an einer Seite AB liegende Polygonwinkel BAF und ABD, jeden in zwey gleiche Theile, so werden die verlängerten Theilungslinien einander irgendwo, hier die Linien CB und CA, sich in C schneiden, wo sie sich schneiden, da ist das Centrum des Cirkels. In C wird nun, wie gesagt, das Centrum des Kreises, und CB oder CA wird der Radius desselben seyn, und alle Ecken des Polygons werden denn von der Kreislinie berührt werden. Es ist dieses auch leicht zu beweisen. Es ist AC = CB, weil die beyden Polygonwinkel in zwey gleiche Theile getheilt, also y = z, folglich der Triangel ACB gleichschenklicht §. 66. Theilt man nun noch den Polygonwinkel BDE in zwey gleiche Theile, und zieht CD, so ist auch d = n = z = y, und weil AB = BD, indem die Figur ein Polygon war, so muß nach §. 51 der Triangel CAB ≅ dem Triangel CBD, also auch AC = CD. Eben auf die Art kann man das von allen Triangeln, die durch die Theilung der Polygonwinkel entstehen können, beweisen, daß sie alle mit dem Triangel ACB kongruent, also ihre Seiten AC, CB, CD u. s. w. gleich lang sind. Folglich müssen auch alle diese Winkelpunkte, woraus diese Linien gezogen werden, alle gleich weit von C seyn, also C der Mittelpunkt

Fig. 144.

des Cirkels seyn, und alle Polygonecken müssen sich in der Peripherie befinden.

§. 207. Will man in einem gegebenen Polygon einen Kreis beschreiben, so halbire man Fig. 141 zwey an einander liegende Seiten AG und GF in L und in M, und ziehe aus diesen Punkten senkrechte Linien. Nun kann man sich vorstellen, daß um dieses Polygon ein Kreis beschrieben sey, wie wir auch mit dem Stücke FGA gethan haben. Es würden also die Seiten des Polygons Chorden dieses Kreises seyn, und senkrecht auf ihre Mitte gezogene Linien durchs Centrum desselben gehen, also auf zwey Seiten solche senkrecht gezogene Linien sich nach §. 204 im Centro dieses um das Polygon gezogenen Cirkels, hier in C, schneiden. Eben das würden alle von der Mitten dieser Sehnen gezogene Linien thun. Weil alle diese Sehnen gleich sind, so sind sie nach §. 167 auch alle gleich weit vom Mittelpunkte entfernt, folglich alle die Perpendikel als LC, MC u. s. w. gleich lang. Da nun auch alle diese Linien unter rechten Winkeln auf diese Sehnen gesetzt sind, so wird ein Cirkel mit dem Radius LC = MC gezogen, sie alle berühren. AB, GA, GF u. s. w. werden alle Tangenten werden, und man wird dadurch einen in das Polygon geschriebenen Cirkel erhalten, oder ein um den Cirkel geschriebenes Polygon bekommen. Es ist dieses die Konstruktion und zugleich der Beweis dieser Aufgabe.

Fig 141.

§. 208.

§. 208. Wir haben im 196sten § versprochen, von dem Viereck und Sechseck zu zeigen, wie ihre Seiten in einem gegebenen Cirkel sogleich geometrisch gefunden werden können, und dazu noch die algebraische Findung einiger andern Polygonseiten hinzuzuthun, um unsern Lesern von dieser Art Arbeit einen kleinen Vorschmack zu geben. Das Viereck wird also beschrieben.

Es sey Fig. 145 der Cirkel ABDE gegeben, in welchem ein reguläres Viereck soll beschrieben werden. Man ziehe einen Diameter AD, und richte auf den beyden Enden desselben ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD und AED, auf, dessen Spitze B und E an die Peripherie des Cirkels stößt, so ist die Figur ABDE, welche man dadurch erhält, ein reguläres Viereck. Daß alle Seiten desselben gleich sind, erhellet schon aus der Konstruktion, weil seine Seiten die gleichschenklichten Seiten zweyer gleichen Triangel sind. Daß seine Polygonwinkel, wie AED, alle gleich sind, folgt daraus, weil nach unserer allgemeinen Formel für den Polygonwinkel $= 2R - \frac{4R}{n}$, wo n jetzt 4 bedeutet, der Polygonwinkel $= 180° - \frac{360°}{4}$ $= 180° - 90° = 90$ Grad ist. Nun hat ein auf dem Diameter aufgerichteter Winkel nach § 187 90°, also ist der Winkel bey B und E jeder $= 90°$. Ferner sind auch die Winkel CAB, CDB, CAE, CDE jeder $= 45°$. Denn weil die Triangel gleichschenk, Fig. 145.

schenklicht, also die Winkel an ihren gleichen Seiten gleich sind, und da der in der Spitze $= 90^\circ$, und jeder Triangel überhaupt 180° zur Summe aller Winkel hat, so müssen die beyden an der Grundlinie zusammen 90° und jeder 45° seyn, also zwey solcher Winkel zusammen, welche einen Polygonwinkel ausmachen, $= 90^\circ$ seyn. Aber so ist auch der Peripheriewinkel BCD $= \frac{4R}{n}$, hier $=$

$\frac{360}{4} = 90^\circ$.

Man kann auch leicht algebraisch die Seite des Vierecks in Werthen des Radius finden. Es sey Fig. 145 ABDE ein in dem Cirkel gezeichnetes Viereck. Nun lasst man aus der Spitze des Polygonwinkels B ein Perpendikel auf das Centrum des Cirkels fallen, welches angeht, weil der Centriwinkel des Vierecks $= 90^\circ$, und BCD ein Centriwinkel ist. Nun kann man das pythagorische Theorem §. 115 brauchen, und wenn man nun die Seite des Vierecks als unbekannt ansieht, also x nennet, so wird folgende Gleichung richtig seyn: $BCq + CDq = BDq$, oder weil BC und CD Radii sind,

$$r^2 + r^2 = x^2$$

$$2r^2 = x^2$$

$$r\sqrt{2} = x.$$

Wenn man also den $\sqrt{2}$ durch Näherung ausziehet, und damit den gegebenen Radius multipli-

cirt, so hat man die Seite des Vierecks. Der $\sqrt{2}$ ist bis auf vier Decimalstellen 1,4142.... also die Seite des Vierecks = r. 1,4142.... Exempel: Der Radiuscirkel CB Fig. 145 sey = 6 Zoll, so ist die Seite BD des Vierecks 6. 1,4142 = 8,4852 Zoll.

Wie man auf einer gegebenen Linie ein reguläres Viereck verzeichnet, haben wir schon ehemals erklärt, und wollen es hier nicht wiederholen.

§. 209. Die geometrische Konstruktion des regulären Sechsecks ist unter allen die leichteste. Man trage Fig. 142 den Radium CA sechsmal in dem Cirkel herum, so ist das Sechseck verzeichnet. Wenn man die Radios AC und CB zieht, so ist nach §. 198 x = dem Centriwinkel, und q und s jeder der halbe Polygonwinkel. Der halbe Polygonwinkel muß nach der Formel § 205 seyn $= R - \frac{2R}{n}$, hier also $90 - \frac{180}{6} = 90° - 30°$ $= 60°$, und der Centriwinkel $= \frac{4R}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$. Fig. 142.

Da also alle drey Winkel in dem Triangel ACB gleich seyn müssen, so müssen auch alle Seiten gleich seyn nach §. 90, und da sechs solcher Centriwinkel die Peripherie des Cirkels genau messen, weil 6.60 = 360 ist, so muß also unsere angenommene Seite oder der Radius die Seite des Sechsecks seyn. Der Polygonwinkel des Sechsecks ABG ist = 120°.

Soll man auf einer gegebenen Linie HI ein Sechseck verzeichnen, so richtet man einen gleichseitigen Triangel CHI auf, wo sich seine Schenkel in C schneiden, ist das Centrum des Cirkels, wovon CI = CH Radii sind, und in welches man HI = CI = CH genau sechsmal herum tragen kann. Der Beweis hievon ist aus den eben angeführten Sätzen leicht zu führen.

§. 210. Wir erklären noch ein Paar Exempel, wie man die Seiten anderer Polygone algebraisch in Werthen des Radius findet. Wir wollen erstlich die Findung der Seite eines in dem Cirkel beschriebenen gleichseitigen Dreyecks zeigen. Weil es ein gleichseitiges Dreyeck ist, so würden also nach der Formel §. 198 sein Centriwinkel = $\frac{4R}{n} = \frac{360°}{3} = 120°$ seyn, also Fig. 146 der Winkel ACB = 120° seyn, also der Theil der Peripherie, der diesen Winkel spannt, oder der Bogen ADB = 120°. Man lasse aus dem Mittelpunkte des Cirkels auf die Seite des Dreyecks oder auf die Sehne AB einen Perpendikel CM fallen, und kontinuire den bis an die Peripherie in D. Dieser wird die Sehne und den ihr zugehörigen Bogen nach §. 166 in zwey gleiche Theile theilen, also auch den Winkel ACB, der durch den Bogen AB gemessen wird. Folglich ist nun der Winkel ACD, und also der Bogen AD von 60°. Ferner weil der Triangel ACD gleichschenklicht

Fig 146.

licht ist, indem AC und CD Radii sind, so sind die Winkel ADC und DAC gleichfalls jeder von 60 Graden, weil DCA 60 Grad hat, und diese beyden zusammen das Complement zu zwey rechten Winkeln sind, und auch unter einander gleich sind. Der Triangel ACD ist also gleichseitig. Folglich AD = DC = AC, oder AD = Radio. Folglich AD die Seite des regulären Sechsecks nach §. 209. Aber weil CD auf AB rechtwinklicht steht, also auch AM auf CD, so ist nach §. 68 DM = CM = $\frac{1}{2}$ CD, und weil CD = Radio, auch DM = $\frac{1}{2}$ Radio.

Nun wollen wir den Werth für die halbe Seite des Dreyecks, oder für AM durchs pythagorische Theorem leicht finden. Es sey AM als das zu suchende = x. Weil bey M rechte Winkel sind, so ist $AD^q = AM^q + DM^q$.

folglich $AD^q - DM^q = AM^q$.

Dieses in den gefundenen Werthen des Radius für AD und AM ausgedrückt, wo wir den Radius = r, und das, was wir suchen, = x setzen wollen: $r^2 - \frac{1}{4}r^2 = x^2$ oder

$\frac{3}{4}r^2 = x^2$ den $\sqrt{}$ ausgezogen

$\frac{r\sqrt{3}}{2} = x.$

Dieses ist der Werth für die halbe Seite des im Cirkel beschriebenen dreyseitigen Polygons, oder für AM. Also für die ganze Seite darf dieser

Werth

Werth nur verdoppelt oder mit 2 multiplicirt werden, und ist also der algebraische Ausdruck für die ganze Seite $= r \cdot \sqrt{3}$, weil der $\sqrt{3}$ in 5 Decimalstellen $= 1{,}73205\ldots$, so ist auch $r\sqrt{3} = r \cdot 1{,}73205$.

§. 211. Will man die Seite des Achtecks algebraisch finden, so kann man dazu das im Cirkel eingeschriebene Viereck bequem gebrauchen.

Fig. 145. Man fälle Fig. 145 auf die Seite des Vierecks AB aus dem Centro ein Perpendikel, dieses wird sie in M, und ihren Bogen in L, in zwey gleiche Theile theilen §. 160. Also der Winkel LCB ist nun $= 45^\circ$, welches der Centriwinkel fürs Achteck nach der Formel $\frac{4R}{n}$, hier $\frac{360^\circ}{8}$ ist, und weil der Triangel LCB gleichschenklicht, indem LC und BC Radii sind, folglich die Winkel bey L und B gleich. Folglich da $LCB = 45^\circ$, jeder von ihnen $= 67\frac{1}{2}$ Grad ist, welches der halbe Polygonwinkel fürs Achteck ist.

Nun da bey M rechte Winkel sind, aus unserer Konstruktion, so folgt nach dem pythagorischen Lehrsatze

$$LBq = MBq + LMq.$$

Nun wüßten wir wol einen Werth für BM, weils die halbe Seite des Vierecks ist, die uns bekannt ist, aber noch nicht für LM, also können wir LB hieraus noch nicht finden. Wir müssen aber erstlich einen Werth für LM suchen. Es ist aber gleichfalls nach dem pythagorischen Lehr atz

BCq

$$BCq = BMq + MCq$$

$$BCq - BMq = MCq.$$

Nun ist BC = Radius, welchen wir = r setzen wollen. Ferner da BM = der halben Seite des Vierecks, und nach § 208 die Seite des Vierecks $= r\sqrt{2}$, so ist also die halbe Seite = BM $= \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Nun sey MC, was wir suchen, = y, denn wenn wir das wissen, können wir leicht LM, was wir nachher zu einer zweyten Gleichung gebrauchen, finden. Also nun statt BCq — BMq = MCq. Nun die Zeichen gesetzt:

$$r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 = y^2$$

oder

$$r^2 - \frac{2r^2}{4} = y^2$$

oder

$$\frac{1}{2}r^2 = y^2$$

den √ ausgezogen

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = y.$$

Das ist nun die MC. Nun ist CL = Radius oder = r, also LM = LC — MC, und weil wir für MC einen Werth wissen, $= r - \frac{r}{\sqrt{2}} = LM$,

also ist $LMq = \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 - \frac{2r^2}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2}$ ꝛc.

$\frac{3r^2}{2} - \frac{2r^3}{\sqrt{2}}$.

Nun wissen wir ferner, daß $BM = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, also

$BMq = \frac{2r^2}{4}$ ist, und nun können wir, wenn wir LB als die zu suchende Seite des Achtecks $= x$ nennen, die Gleichung $LBq = BMq + LMq$ in Zeichen ausdrücken. Sie ist

$$x^2 = \frac{2r^2}{4} + \frac{3r^2}{2} - \frac{2r^3}{\sqrt{2}} \text{ oder}$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{3r^2}{2} - \frac{2r^2}{\sqrt{2}} \text{ oder}$$

$$x^2 = \frac{4r^2}{2} - \frac{2r^2}{\sqrt{2}} \text{ oder}$$

$$x^2 = 2r^2 - \frac{2r^2}{\sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt{\left(2r^2 - \frac{2r^2}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Welches also die Formel für LB oder die Seite des Achtecks ist, welche Formel man zwar wol

noch

noch etwas verkürzen könnte, aber dadurch nicht leichter machte.

Exempel: Es sey $r = 4$, so ist die Seite des Achtecks $\sqrt{\left(2.4^2 - \frac{2.4^2}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\left(2.16 - \frac{2\ 16}{\sqrt{2}}\right)}$

$= \sqrt{\left(32 - \frac{32}{\sqrt{2}}\right)}$, aber $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ also

$\frac{32}{\sqrt{2}} = \frac{32}{1{,}414} = \frac{32000}{1414} = 22{,}6$, folglich $\sqrt{\left(32 - \frac{32}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{(32 - 22{,}62)} = \sqrt{(9{,}38)} =$

$3{,}06\ldots =$ der Seite des Achtecks.

Man sieht daraus, wie es ohngefehr gemacht wird, wenn man die Seiten der Polygone algebraisch sucht. Man findet sie durch trigonometrische Rechnungen weit bequemer, davon wir an seinem Orte reden werden.

§. 212. Wenn man ein reguläres Polygon, wie z. E. das Sechseck Fig. 142, genau betrachtet und überlegt, daß es sich durch die Linien AC, FC u. s. w. die von den Endpunkten seiner Seiten ans Centrum C gezogen, und alle Radii sind, in so viel **kongruente** Triangel theilen läßt, als es Seiten hat, so wird man sehr bald auch den ganzen quadratischen Inhalt eines Polygons ausrechnen können. Da alle solche Triangel eines Polygons kongruent sind, so Fig. 142.

so darf man nur den Inhalt eines dieser Triangel wiss n, und diesen Inhalt mit der Anzahl der Triangel, oder welches einerley ist, mit der Anzahl der Seiten des Polygons multipliciren. Wir wissen aus §. 129, daß, wenn man die Grundlinie des Triangels = b, und seine Höhe = a setzt, alsdenn der Inhalt eines Triangels = $\frac{ab}{2}$ sey. Die Höhe eines Triangels im Polygon wird gefunden, wenn man aus seiner Spitze ein Perpendikel auf seine Grundlinie herabläßt, als Fig. 142. Die Höhe des Polygontriangels FCH, und aller übrigen in diesem Polygon wird CM seyn. Diese theilt nun die Polygonseite FH in zwey gleiche Theile, weils ein Perpendikel auf einer Sehne ist, und wenn man also die Polygonseite FH weis, wird man also auch die halbe Polygonseite MH wissen, und wenn alsdenn der Radius CH bekannt ist, alsdenn durchs pythagorische Theorem leicht die MC oder die Höhe des Polygontriangels finden, denn weil bey M ein Rektus, so ist also $MCq = CHq - MHq$, oder wenn wir allgemein die Seite des Polygons FH $= f$, und den Radius $CH = r$, und die Höhe des Triangels $MC = a$ nennen, so ist, weil die halbe Seite des Polygons $= \frac{1}{2}f$, also ihr Quadrat $= \frac{1}{4}f^2$, also $a^2 = r^2 - \frac{1}{4}f^2$, folglich $a = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}$. Nun wird man also auch bald den Inhalt des ganzen Polygons wissen, und wir setzen, daß dazu sein Radius und seine Polygonseite erfordert werde. Wenn man also ein Polygon

gon ganz allgemein von n Seiten setzte, so müßte der Inhalt des gefundenen Triangels mit n multiplicirt werden, oder der Inhalt des ganzen Polygons wäre denn $\frac{ab}{2} \cdot n = ab \cdot \frac{n}{2}$, oder das Produkt der Basis eines Triangels mit der Höhe muß mit der halben Anzahl der Seiten noch multiplicirt werden, und weil wir b oder die Polygonseite $= f$ gesetzt haben, und für a oder die Höhe des Triangels einen Werth aus den Radiis und der halben Seite gefunden haben, so wollen wir das in dieser Formel anstatt a und b substituiren. Der Inhalt des Polygons wäre also:

$$\frac{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)} \cdot fn}{2} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)} \cdot \frac{fn}{2}.$$

Wir wollen das mal in einem Exempel auf das Sechseck anwenden, wo Radius und Seite des Polygons gleich sind. Es sey der Radius $CF =$ 1 Fuß, also wird auch die Hälfte der Polygonseite, oder hier $\frac{1}{2}$ FH oder $MH = \frac{1}{2}f = 5$ Zoll seyn, $= 0{,}5$ Fuß, also $\frac{f^2}{4} = \frac{1^2}{4} = 0{,}25 \cdot n$ ist hier $= 6$, folglich wenn wir in der Formel die Werthe substituiren, der Inhalt dieses Sechsecks $= \frac{\sqrt{(1^2 - 0{,}25)}\ 1.6}{2} = \sqrt{(0{,}75)} \cdot 3 = 0{,}8660\frac{1}{2}\ldots$

$3 = 2{,}5980\ldots$ Fuß $=$ 2 Fuß, 59 Zoll, 80 Linien zehntheilicht Quadratmaas seyn. Wenn wir f oder die Seite des Polygons allgemein in Theilen des Radius bestimmen könnten, so wäre diese

Formel völlig brauchbar. Da wir das hier, wie wir schon gesehen haben, aus den vorhergegangenen Gründen noch nicht können, so werden wir in der Trigonometrie davon weiter reden.

§. 213. Man kann aber auch das ganze Polygon in einen einzigen Triangel ganz leicht verwandeln, dessen Inhalt mit dem Inhalte des Polygons völlig einerley ist. Man weis aus dem vorhergehenden, daß ein jedes reguläres Polygon aus so viel **kongruenten** Triangeln besteht, als es Seiten hat, wenn man nun alle seine Triangel auf eine gerade Linie stellt, so werden alle diese Triangel den Inhalt des ganzen Polygons ausmachen. Alle diese Triangel werden in einen einzigen verwandelt. Wenn man einen solchen Triangel konstruirt, dessen Grundlinie so groß ist, als die Summe der Grundlinien aller dieser Triangel zusammen, und dessen Höhe der gemeinschaftlichen Höhe dieser Triangel gleich ist. Denn wir wollen setzen, ein Polygon habe n Seiten, also auch n kongruente Triangel, die Grundlinie von jedem Triangel ist = b, und seine Höhe ist = a. So wissen wir aus vorhergehendem §, daß der Inhalt des Polygons $\frac{ab.n}{2}$ ist. So mache man einen einzigen Triangel, dessen Grundlinie alle Grundlinien dieser Triangel enthält, also dessen Grundlinie nb ist, und seine Höhe sey auch a, so ist sein Inhalt auch $\frac{nba}{2}$, welches

aber

aber eben die Formel für den Inhalt als die vorige ist. Ein Beyspiel mit einer geometrischen Zeichnung wird dieses noch mehr erläutern.

Das Sechseck Fig. 142 besteht aus folgenden sechs kongruenten Triangeln Fig. 147, deren Höhe MC ist, weil MC auf MO auch rechtwinklicht gesetzt ist, also die Entfernung der Parallelen CN und MO ist, wozwischen diese Triangel gezeichnet sind. Fig. 147.

Nun behaupten wir, daß das Dreyeck CMO so groß sey, als die Dreyecke AMB + DBL + ELF + GFH + IHK + NKO. Denn wenn wir aus geometrischen Gründen den Beweis führen wollen, so haben wir §. 108 bewiesen, daß Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe gleichen Inhalts sind, sie mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen. Also ist hier auch aus eben den Gründen

$$\begin{aligned}
\triangle AMB &= \triangle CMB\\
\triangle DBL &= \triangle CBL\\
\triangle ELF &= \triangle CLF\\
\triangle GFH &= \triangle CFH\\
\triangle IHK &= \triangle CHK\\
\triangle NKO &= \triangle CKO
\end{aligned}$$

---

also $\triangle AMB + DBL + ELF + GFH + IHK + NKO = \triangle CMB + CBL + CLF + CFH + CHK + CKO$.

Aber $\triangle CMB + CBL + CLF + CFH + CHK + CKO = \triangle CMO$, weil es alle diese Triangel

in sich enthält. Also ist auch △CMO allen den △HMB + DBL ꝛc. gleich.

Wenn man also alle Seiten des Polygons auf eine gerade Linie MO trägt, und die Höhe des Polygontriangels CM nimmt, und von M nach O eine gerade Linie zieht, so hat man einen Triangel, der so groß ist, oder so viel Flächeninhalt hat, als das ganze Polygon.

Fig. 142 und 147.

Hier ist der △CMO rechtwinklicht gemacht. Das ist nun eben nicht nöthig, wenn auch bey M ein spitzer oder stumpfer Winkel wäre, würde der Satz wahr seyn, wenn nur seine Basis MC und seine Höhe CM wäre, wie solches ebenfalls aus §. 108 folgt. Nach §. 110 konnte man jeden Triangel in ein Parallelogram, in welches man wollte, und auch in ein Quadrat verwandeln, es läßt sich daher auch jedes Polygon in ein Parallelogram oder Quadrat vollkommen verwandeln, weil es sich in einen Triangel verwandeln läßt.

§. 214. Die Lehre von den Polygonen wird uns noch auf einen höchstwichtigen Lehrsatz führen, nemlich das Verhältniß des Diameters des Cirkels zu seiner Peripherie zu finden, oder zu wissen, wenn die Peripherie in eine gerade Linie gelegt würde, wie vielmal der Diameter darinn enthalten sey. Wir fangen an, uns diesem Lehrsatze zu nähern, wir müssen aber noch vorher ein Paar Sätze erläutern und beweisen. **Wenn die Seite eines in dem Cirkel beschriebe-**

nen

nen Polygons nebst dem Radius gegeben ist, so läßt sich daraus die Seite eines ausser dem Cirkel beschriebenen Polygons von eben so Seiten finden. Es sey Fig. 148 AB die Seite eines in dem Cirkel beschriebenen Polygons. Weil nach §. 204 die Seite des auswendigen Polygons GF parallel mit AB seyn kann, auch die Polygonwinkel gleich sind, weil ferner das Perpendikel DC daher auch bey E einen rechten Winkel machen muß, so gilt nach §. 143 der Schluß; Fig. 148.

CD : CE = DB : EF, aus eben dem Grunde ist auch CD : CE = DA : EG

folglich DB : EF = DA : EG

folglich DB : DA = EF : EG.

Aber weil DC ein Perpendikel auf DA, so theilet es DA in zwey gleiche Theile, also DB = DA, ist DB = DA, so muß auch EF = EG seyn, also 2 EF = FG. Wenn man also aus der ersten Proportion CD : CE = DB : EF die EF gefunden hat, so weis man auch die GF oder die ganze Seite. Wir wissen aber aus §. 212, wenn der Radius r die Polygonseite = f gegeben ist, daß denn die CD = a sey = $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}f^2}$. Nun ist uns ferner in dieser Proportion bekannt die CE, welche = Radius oder = r ist. Ferner die halbe Polygonseite die DB = $\frac{1}{2}$ f, also wenn man nun statt der Linien die Zeichen setzt, so ist

$\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)} : r = \frac{1}{2}f : EF.$

Also die $EF = \frac{rf}{2} : \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}$. Da aber im Divisor sich beyde Größen unter einerley Benennung bringen lassen, so kann man auch setzen $= \frac{rf}{2} : \sqrt{\left(\frac{4r^2 - f^2}{4}\right)} = \frac{rf}{2} : \frac{\sqrt{(4r^2 - f^2)}}{2}$. Weil uns ten im Divisor der Radix ausgezogen $= \frac{rf \cdot 2}{2\sqrt{(4r^2 - f^2)}} = \frac{rf}{\sqrt{(4r^2 - f^2)}}$, also $2EF = GF = \frac{2rf}{\sqrt{(4r^2 - f^2)}}$, oder weil $EF = \frac{rf}{2} : \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)} = \frac{rf}{2\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}}$, so läßt sich die Formel für 2EF $= FG$ auch also ausdrücken $2EF = \frac{rf}{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}}$.

Wir haben darum die erste genommen, weil wir den Bruch bey der einen Größe aus dem Divisor wegschaffen wollten.

Ein Exempel soll dieses erläutern. Es sey das Polygon ein Sechseck, der Radius $= r =$ 4 Fuß, also auch die Seite $= f = 4$ Fuß, so ist also die GF oder die Seite des äußern Polygons $= \frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{\sqrt{(4 \cdot 4^2 - 4^2)}} = \frac{32}{\sqrt{(64 - 16)}} = \frac{32}{\sqrt{48}}$,

$\sqrt{48} = 6{,}94..$ also $GF = \frac{32}{6{,}94...} = 4{,}61$

Fuß.

§. 215. **Aus der Seite eines regulären Polygons, welche nebst dem Radio des Cirkels, der um dasselbe gezogen, gegeben ist, läßt sich die Seite eines Polygons berechnen, das doppelt so viel Seiten hat.** Es sey Fig. 149 gegeben die Seite AB und der Radius CD, welchen man auf AB senkrecht gezogen hat, welcher also AB nebst dem Bogen ADB in zwey gleiche Theile theilt. Wenn man nun DB zieht, so ist das die Sehne des halben Bogens ADB = der Sehne AD. Auf jede Seite AB des Polygons kommen nun zwey Seiten des neuen Polygons zu stehen, also ist auf die Art ein Polygon von doppelt so vielen Seiten beschrieben worden. Weil CD auf AB rechtwinklicht steht, so ist $MDq + MBq = DBq$, und die Seite des neuen Polygons oder $DB = \sqrt{(MDq + MBq)}$. Wir haben im 212sten § gezeigt, wie man einen Ausdruck für MC finden kann. Es ist nemlich $MC = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}$, wo f die Seite des Polngons bedeutet. Hieraus kann man nun auch MD finden. Denn es ist $MD = CD - MC = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}$. Nun ist MB auch bekannt, nemlich die halbe Seite des erstern Polygons, also wird sich nun sowol MDq als MBq finden, folglich ein Werth für DB berechnen lassen. Fig. 149.

Exempel: Wir wollen aus der Seite des Sechsecks die Seite des Zwölfecks berechnen. Es sey $r = 1$, also f oder die Seite des Sechsecks auch $= 1$, also $MD = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)} = 1 - \sqrt{(1^2 - \frac{1}{4} 1^2)} = 1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}$ in Decimalbrüchen $= 1 - \sqrt{0,75}$. Aber der $\sqrt{0,75} = 0,8660$, also $MB = 1 - 0,8660 = 0,1340$, und also $MDq = 0,017956...$ Nun ist ferner $MB = \frac{1}{2} r$, und weil $r = 1$, also $\frac{1}{2} r = 0,5$ in Decimalbrüchen, also $MBq = 0,25$. Da nun $DB = \sqrt{(MDq + MBq)}$, oder nach den hier gefundenen Werthen, die Seite des Zwölfecks $= \sqrt{(0,01795 + 0,25)} = \sqrt{0,26795...} = 0,5176...$ u. s. w. Wenn man nun die gefundene Seite DB eines Polygons, das nochmal so viel Seiten hat als das gehabte, wieder $= f$ setzt, so läßt sich daraus auf eben diesem Wege abermal ein Vieleck finden, das nochmal so viel Seiten hat als das erstere, und nimmt man das wieder als bekannt an, und findet daraus wieder die Seite eines Polygons von nochmal so viel Seiten, so hat man also auch die Seite eines Polygons, das achtmal so viel Seiten als das erstere Polygon hatte, und so kann man immer weiter gehen, so kann man also z. E. aus dem **Sechsecke** das **Zwölfeck**, hieraus das **vier und Zwanzigeck**, daraus das **acht und Vierzigeck**, daraus das **sechs und Neunzigeck** u. s. w. finden. Also hat man diese doch am Ende alle aus dem Sechsecke gefunden.

§. 216. Wenn wir die Figur 149 nochmal genau betrachten, so werden wir auch finden, daß die aus der Sehne AB gefundene Sehne DB ihrem Bogen oder der Peripherie des Cirkels näher gekommen sey. Denn wenn wir ein Perpendikel CE aus dem Centro darauf fällen, und alsdenn den Triangel MFC betrachten, so ist, weil auch bey M ein rechter Winkel CF die Hypotenuse dieses Triangels, also CF > MC. Da nun CE noch größer ist als CF, so ist auch um so viel mehr CE noch größer als MC, also auch die Sehne DB noch weiter vom Mittelpunkte entfernt, und also der Peripherie näher als AB. Gleichfalls ist aus dem Grunde NB noch näher der Peripherie als DB. Diese Sehnen werden auch immer kleiner, je näher sie der Peripherie kommen, wie solches aus §. 168 erhellet.

§. 217. Allein nicht nur werden sie kleiner, sondern ihr Unterschied zwischen ihrer Länge und zwischen ihres Bogens Länge, wenn der in eine gerade Linie ausgedehnt wäre, beträgt immer weniger, und der Unterschied zwischen dem Bogen und der Sehne nimmt allezeit, wenn man aus einer Sehne oder Polygonseite die Seite eines Polygons von doppelt so viel Seiten findet, um mehr als die Hälfte ab. Denn man betrachte nochmal Fig. 149, so wissen wir, daß der Bogen DB die Hälfte des Bogens ADB ist, seine Sehne ist DB, also das ist die Sehne des halben Bogens ADB. Die Sehne des ganzen Bo-

gens ADB war AB, und die Hälfte dieser Sehne ist MB. Nun ist MB oder die halbe Sehne des ganzen Bogens ADB (welches man mit der Sehne des halben Bogens nicht verwechseln muß) kleiner als DB, oder als die Sehne des halben Bogens. Denn weil bey M ein rechter Winkel, so ist DB eine Hypotenuse, folglich größer als MB. Nun wollen wir einmal setzen, es sey der ganze Bogen ADB gerade gemacht, und seine Sehne AB davon abgezogen, und es sey dieses einer gewissen Größe gleich, oder es sey

der Bogen ADB — seiner Sehne AB = z, folglich

der Bogen $\frac{1}{2}$ADB — der halben Sehne

des Bogens ADB = $\frac{1}{2}$z

oder welches einerley

der Bogen DB — der Linie BM = $\frac{1}{2}$z.

Nun ist, wie wir gesehen, die Linie DB größer als die Linie BM, und der Bogen DB, welches der halbe Bogen ADB ist, ist auch der ganze Bogen von der Sehne DB. Da nun der Bogen DB — der Linie BM = $\frac{1}{2}$z, aber die Linie DB > BM

---

so muß folglich, weil, wenn man von dem Bogen DB die Linie DB abzieht, man mehr davon abzieht, als wenn man BM davon nimmt, der Bogen DB — der Chorde DB kleiner als $\frac{1}{2}$z seyn.

Also sieht man, daß, je kleiner die Sehnen werden, sie immer um so viel weniger von ihren Bogen verschieden sind. Da der Unterschied zwischen der Sehne des ganzen Bogens und zwischen

der Sehne des halben Bogens um so viel mehr als die Hälfte beträgt, so muß man, wenn man immer fortfährt, die Bogen zu halbiren, und dafür Sehnen zu ziehen, und also immer Seiten von Polygonen bekömmt, die nochmal so vielseitig sind, als die eben vorhergehenden, endlich nothwendig auf Sehnen oder Seiten von Polygonen kommen, die von ihren ihnen zugehörigen Bogen unendlich wenig verschieden sind, oder wie man sich ausdrückt, weniger von ihren Bogen verschieden sind, als jede angebliche Größe, und diese kleinen Sehnen kann man alsdenn anstatt der ihnen zugehörigen Bogen setzen, das heißt auch, die Sehnen und ihre Bogen fallen zusammen. Auch hieraus sieht man, daß also ihre Entfernung vom Mittelpunkte immer größer werde, also die MC oder CE immer wachse, bis sie endlich als der Radius kann angenommen werden.

§. 218. Auf eine ähnliche Art kann man auch beweisen, daß, wenn man um den Kreis ein Polygon beschreibt, und nun anstatt dessen ein anderes, das doppelt so viel Seiten hat, beschreibt, auch die Differenz zwischen dem Bogen einer solchen Polygonseite und der Seite selbst, und einer andern, da das Polygon nochmal so viel Seiten hat, zwischen der Polygonseite und dem Bogen selbst auch immer über die Hälfte abnehmen, und endlich so geringe werden, daß man auch diese kleinen Seiten anstatt der, ihnen zugehörigen Bogen annehmen könne.

§. 219. Wenn man also ein Polygon von sehr viel Seiten hat, es sey um oder in dem Cirkel beschrieben, und man weiß seine Seite, (die man, wenn man zum ersten Polygon eine bekannte Seite angenommen hat, wodurch man immer die Seite von einem nochmal so vielseitigen Polygon erfährt, wie §. 215 lehrt) so darf man nur die Größe einer solchen Seite mit der Anzahl der Seiten multipliciren, um den Inhalt der Kreislinie in einer geraden Linie zu wissen.

§. 220. Zwar ist das nicht im strengsten mathematischen Verstande richtig. Denn wenn man das äußere oder innere Polygon von noch so viel Seiten annimmt, so wird die Cirkellinie immer, es sey so wenig als es wolle, großer als alle Seiten des innern Polygons zusammen, und kleiner als alle Seiten des äußern Polygons zusammen seyn. Allein wenn man das in und um den Cirkel beschriebene Polygon von gleichen sehr vielen Seiten angenommen hat, so wird doch ihre Länge zwischen beyde fallen müssen; wie man das an der Fig. 143, obschon auf eine grobe Art, sich schon vorstellen kann.

§. 221. Auf diese Art hat man nun das Verhältniß des Radius zur Peripherie, also auch (da der Durchmesser = 2 Radiis) des Durchmessers zur Peripherie gefunden, oder wie vielmal der Durchmesser in der Peripherie enthalten ist. Man hat die Seite eines bekannten Polygons

ge-

genommen, und daraus immer die Seite eines nochmal so vielseitigen Polygons gefunden, und das beständig so kontinuirt, bis man ein Polygon von sehr vielen Seiten gehabt hat. Man hat den Werth einer solchen Seite mit der Anzahl der Seiten multiplicirt, und diese Zahl behalten, alsdenn hat man die Länge aller Seiten eines eben so vielseitigen um den Cirkel beschriebenen Polygons genommen, die man aus dem erstern nach §. 215 finden kann, und zwischen diesen beyden Größen steckt alsdenn die Länge der Peripherie. Wenn man also in Werthen des Radius die Größe der Peripherie gewußt hat, so könnte man sie auch gleich in Werthen des Diameters finden, der $= 2r$.

Denn wenn das Verhältniß war des Radius zur Peripherie wie $1 : x$, so war also des Diameters wie $2 : 2x$. Auf diese Art hat **Ludolf von Ceulen** gefunden, daß, wenn der Diameter $= 1$, alsdenn die Peripherie zwischen

$= 3,14159265358979323846264338227950$

und $3, \; : \; : \; : \; : \; : \; 1$

stecke, wo die Differenz nur in der letzten Decimalzahl steckt, und übrigens alle 32 Decimalzahlen richtig sind. Indessen heißt das doch nur das Verhältniß durch Näherung finden, indem diese Decimalbrüche nicht zu Ende gebracht sind. Man hat sie nachher noch bis auf 127 Decimalzahlen gefunden. Zum Gebrauch bedarf man so viel nicht. Man nimmt gewöhnlich nur die zwey erstern oder drey erstern Decimalbrüche in dem

Ge-

Gebrauch des gemeinen Lebens, und setzt das Verhältniß des Diameters zum Cirkel wie 1 : 3,14 oder wie 1,: 3,141, oder wenn man das erste mit 100, und das zweyte, weil da drey Decimalstellen sind, mit 1000 multiplicirt, wie 100 : 314, oder auch wie 1000 : 3141, weil man selten die Peripherie in mehr als hundert oder tausend Theilchen suchen wird. Will man sie in 10000 theilen, so setze man das Verhältniß 10000 : 31415 u. s. w. welches man leicht begreifen wird.

§. 222. Man hat noch ein Verhältniß des Diameters zur Peripherie, welches aber mit diesem fast einerley ist, und fast einerley seyn muß, weil dieses richtig ist, und eine Wahrheit der andern nicht widerstreiten kann, nur zum Verhältniß sind andere Zahlen gesetzt. Wenn der Diameter 113 gesetzt wird, so ist alsdenn die Peripherie fast 355, oder beyder Verhältniß wie 113 : 355. Es ist dieses Verhältniß von **Metius** gegeben worden. Man kann es leicht durch eine Proportion beweisen. Wir wollen den Diameter = 10000 setzen, also die Peripherie = 31415, so gilt die Proportion 10000 : 31415 = 113 : x, und x wäre $\frac{113 \cdot 31415}{10000}$, welches 355 sehr nahe ist. Dieses Verhältniß 113 : 355, welches auf sechs Decimalstellen in dem Ludolfschen Verhältniß richtig ist, gebraucht man wol bey Rechnungen, wo mehr Schärfe erfordert wird.

§. 223.

§. 223. Im §. 217, 218, 219, 220 zeigten wir, wie man das Verhältniß des Diameters zur Peripherie gesucht habe. Es ist dieses eine mühsame Arbeit, weil immer Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln auszuziehen sind, allein wenn man doch zur Uebung es etwas versuchen, und nur die Seite eines sechs und Neunzigecks berechnen will, die man denn mit 96 multiplicirt so wird doch das Verhältniß des Diameters zur Peripherie heraus kommen 1:3,141.. welches der Anfang des Ludolfischen Verhältnisses ist. Nachher werden die Zahlen unrichtig. Die Rechnung des Unendlichen, von der wir aber in diesem Buche nichts erklären, lehrt die Peripherie des Kreises weit bequemer finden.

§. 224. Wenn man ganz allgemein das Verhältniß des Diameters zur Peripherie ausdrücken will, und den Diameter = D nennt, und die Peripherie = P, so ist der ganz natürliche Ausdruck dieses Verhältnisses folgender: D: P, oder wenn man d = 1 setzt, 1:P.

§. 225. Wir fangen nun an, verschiedene der nöthigsten Aufgaben aufzulösen, welche uns bey dem Cirkel können gegeben werden, und welche wir aus den gehabten Betrachtungen auflösen können.

Die erste soll diese seyn: **Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises seine Peripherie zu finden.** Weil die Cirkel ähnliche

Figu-

Figuren sind, so ist also bey allen das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie einerley, bey allen 1 : P, oder in dem bekannten Verhältniß, wenn der Diameter = D = 2r ist, wie 100 : 314. Es läßt sich also nach der Regula Detri diese Aufgabe auflösen. Also erstlich allgemein. Es sey der gegebene Durchmesser eines Kreises = d, und man sucht seine Peripherie, die wir p nennen wollen, so können wir, weil wir das allgemeine Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wissen, also schließen:

$$1 : P = d : p \quad \text{und also} \quad p = d \cdot P$$

oder auch, weil d = 2 Radius = 2r, so gilt auch der Ausdruck $2r \cdot P$.

Exempel in Zahlen: Es sey der Durchmesser eines Kreises 5 Zoll, man sucht seine Peripherie, so schließt man:

$$100 : 314 = 5 : p \quad \text{und} \quad p = \frac{5 \cdot 314}{100} = 15{,}7.$$

Wäre die Peripherie gegeben, so läßt sich auch daraus leicht der Durchmesser finden, denn weil die gegebene Peripherie, oder $p = d \cdot P$, nach eben angeführten Sätzen, so ist also $d = \frac{p}{P}$, als

denn aber ist $P = 3{,}14$. Wir wollen das vorige Exempel nehmen. Es sey die Peripherie 15,7, was wird der Diameter seyn? Weil $d = \frac{p}{P}$, als

so hier $\frac{15{,}7}{3{,}14} = \frac{1570}{314} = 5$.

§. 226. Es läßt sich aber aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises nicht nur seine Peripherie, sondern auch ein Theil seiner Peripherie, wenn nur dieser Theil oder dieser Bogen, den man sucht, in Graden und Minuten ausgedrückt ist, berechnen. Man sucht erst auf die im vorigen § gezeigte Art die Peripherie, und weil die Peripherie 360 Grade hat, so schließt man ferner, wie 360° zu der gegebenen Anzahl Grade und Minuten, so die gefundene ganze Länge der Peripherie zu der zu findenden. Ein Exempel wird dieses sehr erläutern. Es sey der Durchmesser eines Cirkels = 73 Fuß, man suche die Länge eines Bogens von 63° 17′, man schließt erstlich also:

100 : 314 = 73 : Peripherie,

und die Peripherie = $\frac{314 \cdot 73}{100} = \frac{22922}{100} =$

229,22 Fuß. Nun schließt man weiter (weil hier Minuten sind, und 360 Grade 21600 Minuten ausmachen, und 63° 17′ sind 3797 Minuten)

21600 Minuten : 3797 M. wie die gefundene Peripherie 229,22 : zu dem zu suchenden Stück, und dieses zu suchende Stück ist = $\frac{229,22 \cdot 3797}{21600}$

$= \frac{870348,34}{21600} = 40,294$ Fuß.

§. 227. Ist die Länge der Peripherie eines Kreises gegeben, und auch zugleich die Länge eines

nes Stücks davon eines Bogens, so läßt sich finden, wie viel Grade und Minuten dieser Bogen habe.

Man schließt nemlich: die ganze Peripherie verhält sich zu dem bekannten Stück der Peripherie, wie 360 Grad zu den zu findenden Graden. Z. E. es sey die ganze Peripherie 140 Fuß, man sucht die Grade eines Bogens dieses Cirkels, der 45 Fuß ist, so würde man schließen müssen: 140 Fuß : 45 = 360° : zu den zu suchenden Graden, und diese wären $\frac{360 \cdot 45}{140} = \frac{810}{7} = 115{,}7$ Grad oder $115^\circ\ 42'$.

§. 228. Ist endlich die Länge eines Kreisbogens nebst den zugehörigen Graden gegeben, so läßt sich daraus sowol die Peripherie des Kreises, als auch der Diameter oder Radius desselben finden.

Man suche erstlich aus der Länge des Bogens und seinen ihm zugehörigen Graden durch die gemeine Regel Detri die Länge der Peripherie. Man schließe also: wie sich verhält die Anzahl der gegebenen Grade zu 360°, so verhält sich die Länge des gegebenen Kreisbogens zu der zu findenden ganzen Länge der Peripherie des Kreises. Hat man diese gefunden, so sucht man ferner hieraus nach §. 225 den Durchmesser des Kreises, da man denn auch hiedurch die Länge des Radius weiß, weil derselbe = dem halben Durch-

Durchmesser ist. Ein Exempel wird dieses erläutern.

Es sey der gegebene Bogen 96 Fuß lang, und halte 43°. So schließt man erstlich: 43°:360° = 96 Fuß: zu der zu findenden Peripherie, und die zu findende Peripherie ist also = $\frac{96 . 360}{43}$ = 803,72... Fuß. Man schließe ferner: 314:100 = 803,72: zu dem zu findenden Durchmesser, und dieser zu findende Durchmesser ist also = $\frac{803,72 . 100}{314} = \frac{80372}{314} = 255,9..$ Fuß, also der Radius $\frac{255,9}{2} = 127,9...$ Fuß.

§. 229. Aus dem 219ten §, und aus der Art, wie man die Länge der Peripherie in Werthen des Diameters oder Radius ausdrückt, oder wenn man die Peripherie in eine gerade Linie verwandelte, wie vielmal alsdenn der Diameter darinn steckte, hat man gesehen, daß man die Peripherie als ein Polygon von unendlich vielen kleinen Seiten betrachten, und also auch unendlich viele kleine Triangel auf diesen Seiten errichten könnte, deren Scheitel alle im Centro des Cirkels zusammen kämen, wie z. E. die Scheitel der Triangel auf den Seiten eines andern Polygons, als z. E. des Sechsecks Fig. 142 alle in dem Centro C zusammen kamen. Die Höhe dieser unendlich kleinen Triangel würde alsdenn der Radius seyn

müssen, denn da diese Triangel eine unendlich kleine Grundlinie haben, so muß man annehmen, daß ein Perpendikel aus ihrem Scheitel auf diese Grundlinie gefället, vor dem Radio nur in einer unendlich kleinen Größe verschieden sey, und also anstatt dessiben der Radius gesetzt werden könne. Dieses Perpendikel ist, wie uns schon längst bekannt ist, die Höhe eines Triangels, also ist hier der Radius die Höhe dieser kleinen Triangel. Wenn man nun eine gerade Linie zöge, und dars auf alle diese kleinen Triangel setzte, denen man zur Höhe den Radius gäbe, so wie man Fig 147 es mit den Triangeln des Sechsecks machte, so würden auch, wie daselbst geschahe, alle diese kleinen Triangel den ganzen quadratischen Inhalt der Oberfläche des Cirkels ausmachen, und man könnte alsdenn auch, wie dort geschahe, alle diese kleinen Triangel in einen einzigen verwandeln, dessen Grundlinie die Länge der Peripherie, und dessen Höhe der Radius des Cirkels wäre. Dieser Triangel kann rechtwinklicht, spitzwinklicht oder stumpfwinklicht seyn, weil er doch von gleicher Größe bleibt, wenn nur seine Grundlinie und Höhe eben dieselben bleiben, und durch die Formel für jeden Triangel $\frac{ab}{2}$ seine Winkel nicht bestimmt werden. Wenn man nun die Peripherie $= p$ setzt, und den Radius $= r$, so würde der Inhalt eines solchen Dreyecks, also auch des Cirkels seyn $= \frac{pr}{2}$, oder die Peripherie multiplis-

cirt

cirt mit dem Radius, dividirt durch 2. Wenn man nun genau wüßte, was p wäre, welches wir nur durch Näherung wissen, (weil wir es aus dem Verhältniß 1 : 3,14.., bestimmen, das auch ein irrationales Verhältniß ist) so könnten wir genau ein Dreyeck angeben, welches so groß als der Cirkel wäre, und also seinen Inhalt genau bestimmen. Jetzt müssen wir uns mit der Näherung behelfen, die wir aber, wie wir gesehen haben, so sehr dem wahren Inhalte nähern können, daß der Fehler unendlich wenig beträgt.

Wir wollen doch ein Exempel geben. Es sey Fig. 149 der Durchmesser DG = 2 Fuß, also Radius DC = 1 Fuß, so wird also die Peripherie des Cirkels nach dem §. 225 auf die Art gefunden werden 100 : 314 = 2 : zu der zu findenden Peripherie, und sie ist = $\frac{314 \cdot 2}{100} = \frac{628}{100}$ = 6,28 Fuß. Es sey die Linie AD Fig. 150 = 6,28 Fuß, und die senkrecht darauf gesetzte Linie DC = 1 Fuß = Radius, so wird also das Dreyeck ADC = dem quadratischen Inhalt dieses Cirkels = $\frac{6,28 \cdot 1}{2}$ = 3,14 Quadratfuß, oder = 3,14″ Quadratmaas seyn. Man sieht auch gleich, daß der Triangel DBA eben dieses Inhalts ist, nach §. 108, weil wir CE ∥ DA gezogen haben, und daß man unendlich viele Triangel machen kann, die eben die Grundfläche und Höhe haben, und also gleiches Inhalts sind. Fig. 150.

§. 230. Man kann auch diesen Triangel, wie alle mögliche Triangel, in einen andern verwandeln, wovon einerley entweder die Höhe oder die Grundlinie gegeben ist. Geometrisch lehrt uns dieses schon der 108te §, und durch die Rechnung ist es sehr leicht. Denn da wir den Inhalt eines solchen Triangels wissen, und den allgemeinen Ausdruck für alle Triangel $\frac{ab}{2}$, so können wir, wenn uns eins davon, a oder b, gegeben ist, das andere darnach bestimmen. Es soll z. E. dieser Triangel in einen verwandelt werden, dessen Höhe CD = 2 Fuß, anstatt daß sie hier nur = 1 Fuß ist, so wird seine Grundlinie allerdings ganz anders ausfallen. Wir wollen die also unbekannt und = x setzen, und weil der Inhalt des Triangels = 3,14 Quadratfuß, so wäre die Gleichung hier für

$$\frac{2x}{2} = 3{,}14$$

und es würde alsdenn

$$x = 3{,}14 = \text{der Grundlinie}$$

ein solcher Triangel Fig. 151 als ADC, ADB u. s. w. daraus entstehen, da AD = 3,14 Fuß, und DC = 2 Fuß ist. Fig. 151.

§. 231. Wenn man die Cirkelfläche in ein Dreyeck verwandeln kann, so kann man sie nach dem vierten Kapitel auch in andere geradlichte Figuren, also auch in ein Quadrat verwan-

wandeln. Da nun eine Figur quadriren heißt, sie in ein Quadrat verwandeln, oder ein Quadrat verzeichnen, welches seinem Flächeninhalt nach so groß als die gegebene Figur ist, so könnte man also auch auf die Art den Cirkel quadriren. Allein man muß bedenken, daß das Dreyeck, in welches man die Cirkelfläche verwandelt, nur beynahe und nicht im strengen geometrischen Verstande der Cirkelfläche gleich ist, und daß also das daraus zu konstruirende Quadrat auch nicht geometrisch strenge der Cirkelfläche gleich seyn kann. Es kömmt dieses daher, weil das Verhältniß, das jeder Radius zu seiner Peripherie hat, ein durch Näherung gegebenes Verhältniß ist. Wüßte man genau, wie sich der Durchmesser zur Peripherie verhielte, so ließe sich allerdings ein Dreyeck, und daraus ein Quadrat konstruiren, welches den Cirkel vollkommen gleich wäre, das aber jetzt nicht angeht. Indessen kann man doch den Fehler ganz klein machen, wie aus allen vorhergehenden Betrachtungen hervorleuchtet. Ob überhaupt die Quadratur des Kreises möglich oder unmöglich sey, ist noch nicht völlig ausgemacht, es kömmt darauf an, ein endliches bestimmtes Verhältniß zwischen dem Durchmesser und der Peripherie zu finden. Ob das viel Nutzen bringen würde, wenn man es gefunden hätte, ist eine andere Frage. Zur Ausmessung der Kreisfläche und der ihr zugehörigen Stücke würde es wenig helfen, weil dazu das bekannte Ludolfsche Verhältniß sehr zureichend ist. Vielleicht

leicht aber entdeckte man noch nebenher nützliche Wahrheiten. Es sind immer Leute gewesen, die vorgegeben haben, daß sie dieses Verhältniß in bestimmten Zahlen gefunden hätten. Es sind gewöhnlich Leute, die kaum wissen, wovon eigentlich die Rede ist. Aber man kann auch solche Verhältnisse bald prüfen. Sie müssen mit dem Ludolfschen übereinstimmen, wenn man sie damit vergleicht, ist das nicht, so sind sie falsch, denn das Ludolfsche ist ein als wahrer und wirklicher Theil von der unendlichen Reihe der einen Zahl des Verhältnisses erwiesen, und die Wahrheit kann nicht verschieden seyn. Es hat z. E. einer vor einigen Jahren das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie angenommen, wie 23099: 72576. Wenn man beyde Glieder dieses Verhältnisses durch die erste Zahl desselben durch 23099 dividirt, und bey dem letzten Gliede die Division in Decimalbrüchen fortsetzt, so bekömmt man das Verhältniß 1: 3,14195... welches ohne weitere Untersuchung unrichtig seyn muß, weil das Ludolfsche wie 1: 3,14159... ist.

§. 232. Nach diesen Betrachtungen, die wir §. 229 angestellt haben, wird es uns nun auch nicht schwer werden, aus dem Radio oder Durchmesser eines Kreises seinen Flächeninhalt zu finden. Es ist nemlich der Inhalt eines Cirkels, welchen Inhalt wir allgemein = a nennen wollen, wenn wir seinen Radium = r setzen, und seinen Diameter = d, und das allgemeine Verhältniß

des

des Diameters zur Peripherie, welches nach dem Ludolf von Ceulen = 1 : 3,14... ist, 1 : P setzen wollen, folgendes $a = r^2 P$. Denn wenn man nach §. 229 den Inhalt des Cirkels als den Inhalt eines Dreyecks betrachten kann, dessen Grundlinie die Peripherie des Cirkels, und dessen Höhe der Radius ist, so ist der Beweis dieser Formel ganz leicht geführt. Wir wissen, daß der Inhalt eines Triangels durch die Multiplikation seiner Grundlinie in seine halbe Höhe gefunden wird. Nun ist nach §. 224 der Ausdruck für eine jede Peripherie $2rP$, wo r oder Radius gegeben ist, und P den Theil des Ludolfschen Verhältnisses 3,14... bedeutet. Es muß also $2rP$ mit $\frac{1}{2}r$ multiplicirt werden, um den Flächeninhalt des Cirkels zu erfahren, aber $2r \cdot P \cdot \frac{1}{2}r = \frac{2r^2P}{2}$ $= r^2P$, also der Flächeninhalt des Cirkels oder $a = r^2P$. Wenn man nun statt des Radius den Diameter gebrauchen wollte, so ist der Ausdruck auf folgende Art zu verändern: Es ist der Radius oder $r = \frac{1}{2}$ Diameter oder $r = \frac{1}{2}d$, folglich $r^2 = \frac{1}{4}d^2$. Wenn man das in die Formel anstatt r^2 setzt, so ist $a = \frac{d^2 \cdot P}{4}$.

Exempel: Es sey der Radius eines Kreises = 6 Zoll, also sein Durchmesser = 12 Zoll, alsdenn wird sein Inhalt seyn = $r^2P = 6^2 \cdot 3,14 =$ $36 \cdot 3,14 = 113,04...$ Quadratzoll, oder nach

der andern Formel $d^2P = 12^2 \cdot \frac{3,14}{4} = 144 \cdot \frac{3,14}{4}$

$= 452,16 = 113,04$ Quadratzoll $= 1' 13'' 4'''$ Quadranas.

§. 233. Wäre auch die Peripherie des Kreises gegeben, so ließe sich daraus auch der Flächeninhalt desselben finden, weil man nach §. 225 aus der Peripherie eines Kreises seinen Durchmesser oder Radium leicht finden, und also obige Formeln gebrauchen kann.

§. 234. Auch umgekehrt läßt sich aus dem gegebenen Inhalt eines Kreises sein Durchmesser, und also auch seine Peripherie finden. Denn da $a = r^2P$, so ist folglich $\frac{a}{P} = r^2$, folglich $\sqrt{\frac{a}{P}} = r$, oder da auch $a = d^2P$, folglich $4a = d^2$, so ist also $\sqrt{\frac{4a}{P}} = d$. Man kann eine von beyden Formeln, welche man will, gebrauchen, weil sie beyde gleich sind. Wir wollen die erstere gebrauchen.

Es sey der Inhalt eines Kreises eine Quadratruthe, welches 100 Quadratfuß, und 10000 Quadratzoll ausmacht; wie groß ist sein Radius?

Wir

Wir wollen ihn in Zollen suchen. Hier ist nun $a = \frac{10000}{P} = \frac{100000000}{31415} = 3183,1972$, das ist $= r^2$, und da den $\surd$ ausgezogen, ist $= 56,41$ Zoll, welches $56,4''$ Zoll macht, also der Diameter $= 56,41'' \cdot 2 = 112,82 = 1^{\circ}\,12'\,82''$.

§. 235. Da wir einen allgemeinen Ausdruck für den Flächeninhalt eines Cirkels gelernt haben, nemlich r^2P, so wird es uns leicht seyn, wenn wir den Flächeninhalt von zwey oder mehrern Cirkeln zusammen addiren oder von einander abziehen sollten, und wir können auch hieraus lernen, wie wir den Radius eines Cirkels, dessen Inhalt hieraus entstünde, finden, und also einen Cirkel beschreiben könnten, der so groß als zwey oder mehr gegebene Cirkel, oder der die Differenz von zwey oder mehrern gegebenen ist. Wir wollen es erstlich mit zweyen versuchen. Es sey der Flächeninhalt des einen Cirkels, der gegeben ist, ganz allgemein $= A$, sein Radius sey $= R$. Es sey der Flächeninhalt des andern $= \alpha$, sein Radius $= \varrho$, so ist nach §. 282

$$A = R^2P$$

und

$$\alpha = \varrho^2P$$

also die Summe beyder $A + \alpha = R^2P + \varrho^2P$, und weil P ein gemeinschaftlicher Faktor beyder ist, so ist $A + \alpha = (R^2 + \varrho^2)P$. Zöge man auf eben die Art die Fläche des kleinen Cirkels von einem großen ab, so würde man, wie man leicht ein-

sieht, den Ausdruck bekommen, $A - \alpha = (R^2 - \varrho^2)P$.

Es kömmt nun darauf an, daß wir eine Größe bekommen, die diesen $(R^2 + r^2)$ oder $(R^2 - \varrho^2)$ gleich ist, nachdem wir die Summe zweyer Cirkel, oder ihre Differenz wissen wollen. Durch Rechnung fänden wir es gleich, denn beyde, sowol R^2 als ϱ^2, sind als bekannt angenommen. Zögen wir aus $(R^2 + \varrho^2)$ oder $(R^2 - \varrho^2)$ den $\surd$, so hätten wir auch den Radium des neuen Cirkels, weil es die Größe wäre, die quadrirt und mit P multiplicirt, dem Inhalt des neuen Cirkels gleich wäre, welche Größe in unserer allgemeinen Formel §. 232 der Radius des Quadrats ist. Also der Radius eines Cirkels, dessen Inhalt zwey gegebenen gleich ist, ist $\surd(R^2 + \varrho^2)$; und der Radius eines Cirkels, dessen Inhalt die Differenz beyder Cirkel ist, $\surd(R^2 - \varrho^2)$. Wir wollen erst hievon ein Exempel geben, und nachher zeigen, wie man eben diesen Radius ganz leicht geometrisch finden könne. Es sey der Radius eines Cirkels oder $R = 12$ Zoll, also sein Inhalt $= 452{,}304\ldots$ Quadratzoll. Der Radius des andern oder $\varrho = 6$ Zoll, also sein Inhalt $= 113{,}076$ Quadratzoll. Die Summe beyder wäre 452,304

113,076

565,380 Quadratzoll.

Eben das finden wir durch Rechnung. Die $\surd(R^2 + \varrho^2)$ oder $\surd(12^2 + 6^2) = \surd(144 + 36)$

=

$= \sqrt{180}$ ist $= 13{,}42\ldots$ Dieses ist der Radius eines Cirkels, der so groß ist, als beyde zusammen, und dieses quadrirt und mit P multiplicirt, giebt gleichfalls 565,50 Quadratzoll Flächeninhalt. Hier ist es etwas mehr als vorher, weil die letzte Zahl etwas zu groß ist. Ueberhaupt muß man die $\sqrt{}$ etwas weit ausziehen, um es genau zu haben.

Wollte man den Radius eines Cirkels finden, der so groß wäre, als wenn man hier im Exempel von dem Inhalt des Cirkels, dessen Radius $= 12$ Zoll, den Inhalt des Cirkels, dessen Radius $= 6$ Zoll, abgezogen hätte, so wäre $\sqrt{(12^2 - 6^2)}$ oder $\sqrt{(108)}$ gleich dem Radius eines solchen Cirkels, welches fast 10,4 Zoll wäre, und der Inhalt des Cirkels würde 339,228 Quadratzoll seyn.

§. 236. Nach einigen Betrachtungen wird man bald einsehen, daß dieser Radius des neuen Cirkels sich leicht geometrisch finden läßt. Man darf nur eine Größe finden, die quadrirt so groß ist, als $R^2 + \varrho^2$ oder als $R^2 - \varrho^2$, und diese giebt das pythagorische Theorem. Wenn man also die Radios der beyden gegebenen Cirkel unter einem rechten Winkel zusammensetzt, so giebt die Hypotenuse den Radium des Cirkels, der so groß ist, als beyde zusammen; und wenn man die Differenz zweyer Kreise in einen Kreis bringen will, so richte man unbestimmt eine gerade Linie auf, setze an diese unter einem rechten Winkel

den Radius des kleinern Kreises, und an diesen als Hypotenuse den Radius des größern Kreises, so wird diese die aufgerichtete gerade Linie irgendwo schneiden, und diese gerade Linie ist alsdenn der Radius des Kreises, der so groß ist, als der größere, von dem der kleinere abgezogen ist.

Man kann dieses bequem in eine geometrische Zeichnung bringen, weil sich doch Cirkel, die nicht gleich groß sind, als koncentrische Cirkel gedenken lassen. So seyn gegeben Fig. 152 Fig. 152 die beyden Kreise, die wir in einander gelegt haben. Man soll den Radius eines Kreises finden, der so groß ist, als die Flächen beyder zusammen, wenn sie nemlich nun beyde bey einander lägen.

Man ziehe den Radius des kleinern Kreises CB, setze darauf unter einem rechten Winkel den Radium des größern Kreises AC, und ziehe die Hypotenuse AB, so ist AB der Radius eines Kreises, dessen Inhalt so groß ist, als beyder zusammen. Denn es sey $AC = R$ und $BC = \varrho$, so ist, weil bey C nach der Konstruktion ein rechter Winkel, $ACq + BCq = ABq$, oder in Zeichen $R^2 + \varrho^2 = ABq$, woraus man, wie man aus der Formel (vorhergehender §) sieht, überzeugt wird, daß AB der Radius des neuen Cirkels sey, dessen Flächeninhalt so groß ist, als der Flächeninhalt beyder Kreise zusammen. Gleichfalls ist Fig. 153 AB der Radius eines Cirkels, welcher die Differenz dieser beyden Cirkel in sich enthält, oder welcher so groß ist, als wenn man den Inhalt des kleinern Cirkels von dem Inhalt des grö-

fern abzöge. Man ziehe von dem größern Cirkel eine Linie AB an den kleinern Cirkel, und setze darauf, wo sie den Cirkel berührt, den Radium CA des kleinern rechtwinklicht. Es ist also AB eine Tangente des kleinern Cirkels. Man ziehe aus C nach B den Radium des größern Cirkels, so ist, weil bey A ein rechter Winkel sich befindet, $CBq - ACq = ABq$, oder wenn $CB = R$, $AC = \varrho$, so ist $R^2 - \varrho^2 = ABq$, und also nach der Formel AB der Radius des neuen Cirkels. Dieser AB oder der Radius des neuen Cirkels, welcher so groß, als die Differenz beyder ist, ist auch zugleich der Radius eines Cirkels, der so groß ist, als der Ring BDEG, denn dieser Ring ist, wie man schon aus der Figur sieht, die Differenz zwischen beyden Cirkelflächen. Will man einen Cirkel konstruiren, der den Flächeninhalt mehrerer in sich enthalten soll, oder der eben so groß seyn soll, als wenn mehrere von einem grössern abgezogen wären, so betrachte man nun den aus der Summe der Differenz zweyer entstandenen Cirkel als den ersten, und addire dazu, oder subtrahire davon die andern, wie wir jetzt geometrisch gelernt haben. Man kann hieben nach der Anweisung des §. 118 eben so, wie mit Quadraten verfahren. Durch Rechnung ist es noch leichter, indem man auf die gezeigte Art leicht mehrere Größen addiren, oder mehrere Größen von einer Größe subtrahiren kann. Wir werden hievon weiter unten noch mehrere Betrachtungen anstellen.

§. 237. Man kann nicht nur den Inhalt der ganzen Fläche eines Cirkels, sondern auch einzelner Theile dieser Fläche finden. Was ein Sektor des Cirkels sey, wissen wir aus den ersten Gründen §. 23. Man findet den Inhalt eines solchen Sektors, als Fig. 28 des Sektors CFE, auf solche Art, wenn der Bogen desselben FE in Graden, Minuten ꝛc. oder welches einerley ist, der Centriwinkel FCE gegeben ist, dabey aber auch die Peripherie des Cirkels in Längenmaas, oder auch eines von den Stücken, wodurch sich die Peripherie auch finden läßt. Als der Radius des Cirkels, so suche man erstlich aus der Peripherie des Cirkels nach §. 226, 227 das Längenmmas des Bogens FE. Nun hat man die Grundlinie eines Triangels, der, wenn er von der Höhe, als der Radius ist, dem Inhalte des Sektors gleich ist. Denn wenn die ganze Fläche des Cirkels nach §. 229 auf solche Art kann ausgemessen werden, so muß dieses mit solchen Ausschnitten FCE auch angehen, weil der auch eine Anzahl solcher Triangel von solcher unendlich kleinen Grundlinie in sich enthält, woraus nach §. 229 die ganze Kreisfläche bekannt wurde. Man multiplicirt also dieses Längenmaas des Bogens FE mit dem halben Radius, um den Inhalt des Sektors zu finden, weil man ihn als einen eben beschriebenen Triangel ausrechnet.

Exempel: Es habe ein Cirkel im Durchmesser 8 Fuß, oder Fig. 28 AC = 8 der Bogen

FE

FE oder der Winkel FCE = 5°. Man sucht den Inhalt des Sektors FCE. Man suche also erstlich die Peripherie des Kreises im Längenmaas. Man schließt 100 : 314 = 8′ : $\frac{8 . 314}{100}$, also die

Peripherie = $\frac{2512}{100}$ = 25,12.

Hieraus suche man das Stück des Bogens in Längenmaas. Man schließt:

360° : 5° = 25,12 Fuß : dem zu findendem Maas von FE.

Also ist in Längenmaas FE = $\frac{25,12 . 50}{360}$ = $\frac{1256}{360}$

= 3,488... Fuß, oder 3′ 4″ 8‴, welches 348 Linien sind.

Hieraus findet man erstlich den Inhalt des Sektors, wenn man 348 Linien mit dem halben Radius, der, weil der Durchmesser 8 Fuß ist, mit 2 Fuß oder 200 Linien multiplicirt, so hat man den Inhalt des Sektors, er wird 348 . 200 = 69600 Quadratlinien seyn, welches nach §. 124 6′ 96″ Quadratmaas ausmacht. Hätte man in dem Verhältnisse, wodurch man die Länge des Bogens gesucht hat, als 100 : 314, statt dessen nach §. 221 10000 : 3141 5 genommen, so hätte man den Inhalt noch genauer, nemlich 698130 Quadratlinien bekommen, und man sieht hieraus, daß, um etwas genaues zu haben, das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, in

viel Zahlen ausgedrückt, hiebey muß gebraucht werden.

Fig. 154. §. 238. Will man den Flächeninhalt eines Segments berechnen, wie z. E. Fig. 154 den Flächeninhalt des Abschnitts zwischen dem Bogen und seiner Sehne, oder des Segments FHE, so muß man erstlich den Inhalt des Sektors FEHC wissen, von diesem zieht man den geradlinichten Triangel CFH ab, so bleibt der Rest der Inhalt des Segments FHE.

Den Inhalt des Sektors findet man nach dem vorhergehenden Paragraphen, wozu man den Bogen FEH in Graden, auch, wie wir dort gesagt, wissen muß. Um aber nun den Triangel CFH von dem Sektor abziehen zu können, muß man seinen Flächeninhalt wissen, und dazu wird erfordert, daß CF = CH = Radio, und FH = der Chorde, und CD bekannt sey, welches letztere des Triangels CFH Höhe ist. Ist CF der Radius und die Chorde FH gegeben, so ist CDq = CFq — DFq, und weil DF = $\frac{1}{2}$FH, also DFq = $\frac{1}{4}$FHq, so ist also CDq = CFq — $\frac{1}{4}$FHq, also CD = $\sqrt{(CFq - \frac{1}{4}FHq)}$. Wäre aber DE und der Radius gegeben, so ließe sich auch FD dadurch finden, indem alsdenn CD = r — DE wäre, woraus man FD nach dem pythagorischen Theorem, und daraus FH leicht finden, und nachher den Triangel bald ausmessen könnte. Wir wollen über den ersten Fall ein Exempel geben.

Es

Es sey CF = 6 Fuß, der Bogen FEH = 80°, die Chorde FH = 7 Fuß, 7 Zoll, 1 Linie, oder 771 Linien, also FD = 385 Linien, so ist erstlich nach der Anweisung des vorhergehenden Paragraphen der Sektor CFH = 25′ 19″ quadratischen Inhalts. Weil $CFq - FDq = CDq$, also hier, wenn der Radius in Linien genommen wird, $600^2 - 385^2 = CDq$, oder 360000 — 148225 = CDq, oder 211775 = CDq, so ist die √ hieraus = CD, oder 460 = CD oder = der Höhe des Triangels CFH; der ganze Flächeninhalt des Triangels also = FH . ½CD = 771 . 460 = 771 . 230 = 176330 Quadratlinien, dies

2

ses von dem ganzen Inhalt des Sektors, den wir eben gefunden haben, und welcher 251900 Quadratlinien war, abgezogen, läßt zum Reste 75570 Quadratlinien, oder nach §. 124 7′ 55″ 70‴ Flächeninhalt für das Segment FEH.

§. 239. Es kommt auch oft vor, daß man nur den Inhalt eines Rings von einem Cirkel zu wissen verlangt, wie z. E. Fig 155 der Ring ABD seyn kann, weil man sowol die inwendige als auswendige Peripherie eines solchen Ringes, als die Peripherie eines eigenen Cirkels betrachten kann, so wird man also sich beyde Peripherien als zwey koncentrische Cirkel vorstellen können. Wenn man nun den Inhalt der ganzen Fläche oder des großen Cirkels ADB weiß, und davon die Fläche des kleinern EFG abzieht, so Fig. 155.

wird der Inhalt des Ringes ADEFG zum Reste bleiben. Wenn man den Radius des großen Cirkels $CH = R$, und des kleinern $CM = r$ nennt, so wird der Inhalt des Ringes $(R^2 - r^2) P$ seyn, wo P die 3,141... aus dem gewöhnlichen allgemeinen Verhältnisse bedeutet. Es wird dieses leicht zu beweisen seyn. Die Fläche des großen Cirkels sey $= A$, des kleinern $= a$

so ist $A = R^2 P$ nach §. 232
und $a = r^2 P$ auch nach diesem §

$A - a = R^2 P - r^2 P$ das von einander abgezogen,

also $A - a = (R^2 - r^2) P$ und weil P ein allgemeiner Faktor.

Aber es ist $A - a$ gleich dem Ringe ADBEFG, also $(R^2 - r^2) P$ gleich diesem Ringe.

Exempel: Es sey ein Cirkel gegeben, dessen Radius $CH = 14$ Zoll, man will wissen, wie viel Inhalt ein Ring davon habe, der 6 Zoll breit sey. Hier ist also die $MH = 6$ Zoll, folglich die CM, als der Radius des kleinern Cirkels $= CH - MH = 14 - 6 = 8$ Zoll, also der Inhalt des Ringes $= (14^2 - 8^2) \cdot 3,141.. = (196 - 64) \cdot 3,141.. = 132 \cdot 3,141... = 414,612$ Quadratzoll $= 4\,14''\,61,2'''$ Flächenmaas.

Will man den Inhalt des Ausschnitts eines solchen Ringes, als HIMG, wissen, davon aber der Bogen HI bekannt seyn muß, so könnte man das finden, wenn man den ganzen Sektor CHI, und auch den Flächeninhalt des kleinern Sektors

CMG

CMG berechnete, welches leicht ist, da beyde Bogen in Ansehung ihrer Grade gleich sind, und hernach den Inhalt des kleinen Sektors von dem Inhalt des größern abzöge, der Rest wird der Ausschnitt MHGI seyn, wie solches von selbst in die Augen fällt, oder auch weil der Bogen HI sich zur ganzen Peripherie verhält, wie seine gegebene Anzahl von Graden zu 360, und dieses von dem Bogen MG gleichfalls richtig ist, so werden also Ausschnitte von gleichen Bogen gleich groß seyn, und ein solcher Ausschnitt muß sich zum ganzen Inhalte des Ringes eben so verhalten, wie der Bogen HI zur ganzen Peripherie. Man kann also, wenn der Inhalt des ganzen Ringes und der Bogen HI in Graden gegeben ist, auch den Inhalt des Ausschnitts finden. Man schließt nemlich:

360°: Bogen HI = der ganze Ring: Ausschnitt MGHI.

Exempel: Es sey der Bogen HI = 4°, und der Inhalt des ganzen Ringes 414,612 Quadratzoll, oder 41461,2 Quadratlinien, so schließt man:

360°: 4° = 41461 : zum Inhalt des Ausschnitts, und dieser ist = $\frac{41461 \cdot 40}{360}$ = 4606,8

Quadratlinien = 46″ 6,8‴ Flächenmaas.

Es führt alles dieses noch zu mehrern Betrachtungen, wovon wir jetzt nur eine anführen wollen. Es sey Fig. 155 b der inwendige Cirkel = c gegeben, man soll so viel koncentrische Cirkel, als verlangt wird, herum legen, die aber

unter sich und mit dem inwendigen Cirkel c in Ansehung der daraus entstehenden Ringe gleiches Inhalts seyn sollen. Es ist sehr begreiflich, je grösser die Ringe werden, desto schmäler müssen sie auch seyn, also ef schmäler als de u. s. w. Es heiße nun der Radius des inwendigen Cirkels ca $= r$, so ist der quadratische Inhalt des Cirkels $c = r^2P$; es sey Radius cb $= x$, so ist Ring $ab = (cbq - caq)\,P$, oder hier $= (x^2 - r^2\,P$, aber der Cirkel c und der Ring ab sollen gleich seyn, also:

Fig. 155 b

$r^2P = (x^2 - r^2)P = r^2 = x^2 - r^3$

$2r^2 = x^2$

$r\sqrt{2} = x =$ dem Radio cb.

Nun den Ring bd. Es sey cd $= y$, nun war cb $= r\sqrt{2}$ also

$(cdq - cbq)P = r^2P$ oder

$y^2 - 2r^2 = r^2$

$y^2 = 3\sqrt{2}$

$y = r\sqrt{3}$.

Ferner den Ring de. Es sey ce $= z$, so ist

$z^2 - 3r^2 = r^2$

$z^2 = 4r^2$

$z = r\sqrt{4} = 2r =$ ce und so weiter.

Man mag nun noch so viel Cirkel um einander legen, als man will, so bekömmt man, wenn alle Ringe unter einander und mit dem inwendigen Cirkel und dem Radius des inwendigen Cirkels gleich seyn sollen, folgende Radios

$r, r\sqrt{2}, r\sqrt{3}, r\sqrt{4}, r\sqrt{5}, r\sqrt{6} \ldots r\sqrt{n}$,

wo die Größe der Radiorum immer nach der Reihe der natürlichen Zahlzeichen fortgeht.

Aber nun auch verkehrt. Es sey der Radius des Cirkels fmnp gegeben. Man soll eine Zahl koncentrische Cirkel hineinlegen, so daß die daraus entstehenden Ringe unter einander, als auch dem inwendigen Cirkel gleich werden.

Es sey Radius $cf = r\sqrt{n}$ (siehe vorhergehendes, hier ist $n = 5$), und heiße Radius $cf = R$, so ist $R = r\sqrt{n}$, also $r = \frac{R}{\sqrt{n}}$, welches der Radius des inwendigen Cirkel c ist $= ca$.

Es wird also $cb = r\sqrt{2}$, wenn für r die $\frac{R}{\sqrt{n}}$ substituirt wird, so ist $cb = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ und die $Cd = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ ...

Von der Mitte an gezählt geht also die Reihe $\frac{R}{\sqrt{n}}, \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \ldots \frac{R\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = R$, also von auswärts von f an, $R, \frac{R\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n}}, \frac{R\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{n}}, \frac{R\sqrt{(n-3)}}{\sqrt{n}} \ldots \frac{R\sqrt{(n-n+1)}}{\sqrt{n}}$. Die Reihe wird abgebrochen, wo $n =$ im Zähler 1 wird, das ist, wo die Zahl der Cirkel aufhört. Es sey z. E. die Zahl der Cirkel 5, also $n = 5$, so wäre die Größe der Radiorum von f an R,

$\frac{R}{\sqrt{5}}\sqrt{(5-1)}$, $\frac{R}{\sqrt{5}}\sqrt{(5-2)}$, $\frac{R}{\sqrt{5}}\sqrt{(5-3)}$, $\frac{R}{\sqrt{5}}\sqrt{(5-4)}$ oder das unterste Glied $= \frac{R.}{\sqrt{5}}$

Hievon wollen wir nun auf beyde Fälle ein Exempel geben, und von oben bey f erst anfangen und 5 Cirkel, also 4 Ringe und den inwendigen Cirkel nehmen. Der R oder cf soll $=$ 10 seyn, also R $=$

$cf = 10$; $ce = \frac{R}{\sqrt{n}}\sqrt{(n-1)} = \frac{10}{\sqrt{5}}\sqrt{(5-1)} =$

$\frac{10}{\sqrt{5}}\sqrt{4} = \frac{20}{2{,}236\ldots} = 8{,}944\ldots$

$cd = \frac{R}{\sqrt{5}}\sqrt{(n-2)} = \frac{10}{\sqrt{5}}\sqrt{3} = 10{,}1{,}\frac{732\ldots}{2{,}236\ldots} =$

$\frac{17{,}32}{2{,}236} = 7{,}745\ldots$ Auf eben die Art wird cb $=$

$\frac{14{,}14\ldots}{2{,}236} = 6{,}323\ldots$ und ca $=$

$\frac{R}{\sqrt{n}}\sqrt{(n-n+1)} = \frac{10}{\sqrt{5}}\sqrt{(5-5+1)} =$

$\frac{10\sqrt{1}}{2{,}236\ldots} = \frac{10}{2{,}236\ldots} = 4{,}472\ldots$ Man wird finden, daß jeder Ring, wie auch der inwendige Cirkel 62,835.... Flächenmaas habe.

Wir wollen es nur von einem Ringe = ef zeigen, denn Ring ef = $(cf^2 - ce^2)P = (10^2 - 8{,}944^2..)$ 3,141... = 62,835.... Und so sind sie alle, wenn man das weiter berechnet, gleichfalls der inwendige Cirkel ca, denn $4{,}472^2 . 3{,}141$, oder $r^2P = 62{,}835....$

Fängt man mit dem inwendigen Cirkel ca = r, hier = 4,472, an, und nimmt nach gerade r, $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{4}$.... $r\sqrt{n}$, so wird man finden, daß eben das heraus kommt, denn alsdenn muß seyn

$$r = \frac{R}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{(n - 1 + 1)}$$

$$\frac{r = R}{\sqrt{n}}$$ oder

$r\sqrt{n} = R$, welches cf auf beyde Fälle ist.

§. 240. Wir werden das vornehmste von der Ausmessung der Cirkelfläche jetzt berührt haben. Wir bemerken noch hiebey, ohne es aber zu beweisen, weil es uns zu weit führen würde, und man die Beweise in weitläuftigen Ausführungen suchen muß, daß der Cirkel unter allen Figuren von gleichem Umfange die allergrößte Fläche einschließe, oder daß, wenn man die Cirkellinie in eine gerade Linie verwandelte, und nun andere geradlinichte Figuren machte, deren Seiten zusammen genommen so lang als diese Cirkellinie wären, doch ihre Flächen allezeit geringer wären,

ja

ja weit geringer seyn könnten, als die Cirkelfläche, die von eben der Länge dieser Linie eingeschlossen wäre. Es ist dieses richtig, die Figuren mögen regulär oder irregulär seyn. Ueberhaupt kann man von dem Umfange einer Figur nicht allezeit auf ihren Inhalt schließen. Wir wissen, daß zwey Parallelogrammen, die zwischen Parallelen und auf einer Grundlinie stehen, einen gleich großen Inhalt haben. Nun kann das eine, wenn es z. E. senkrecht steht, nur sehr wenig Umfang haben, da das andere, wenn es sehr schief steht, einen viel größern Umfang haben kann, und doch seinem Inhalte nach nichts größer ist. Wir entwickeln nunmehro die vornehmsten Proportionen, welche zu der Lehre vom Cirkel gehören.

§. 241. Wir vergleichen erstlich die Kreise mit einander in Ansehung ihrer Peripherie. Wenn wir nach §. 225 die Länge der Peripherie aus dem Durchmesser gefunden betrachten, so war die allgemeine Formel dafür $2rP$, wo P, wenn man es ausdrücken will, das letzte Glied in dem bekannten Ludolfschen Verhältniß, nemlich 3141... ist. Nun wollen wir die Peripherie eines Cirkels p nennen. Es sey dieses p so viel als es wolle, und die Peripherie eines andern Kreises durch π ausdrücken. Der Radius des ersten Kreises sey denn $= R$, und der Radius des andern $= \varrho$. So wäre also, wenn wir für p einen gleichviel bedeutenden Ausdruck setzen,

$p =$

$p = 2RP$, und wenn wir für π auch einen gleichviel bedeutenden Ausdruck setzen, $\pi = 2\varrho P$. Wenn wir nun eine Proportion ansetzen, wo die beyden vordersten und hintersten Glieder in eben der Ordnung einerley wären, welches man eine identische Proportion nennt, so wären

$$p : \pi = 2R \,.\, p : 2\varrho \,.\, P$$

die beyden hintersten

$$p : \pi = 2R \;\; : 2\varrho$$

Glieder durch P dividirt, oder die Peripherien verhalten sich als die Diameter, weil 2R und 2ϱ doch Diameter sind. Dividirte man nochmals die beyden hintersten Glieder durch 2, so wäre denn die Proportion

$$p : \pi = R : \varrho$$

oder die Peripherien verhalten sich wie die Radii. Aus diesen beyden Beweisen folgt also der Lehrsatz: **Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Diameter oder Radii.**

Wir haben kaum nöthig, hinzuzusetzen, daß, wenn drey von diesen Stücken in diesen Proportionen gegeben sind, das vierte sich nach der gewöhnlichen Regel Detri leicht finden läßt.

§. 242. Wir vergleichen nun die Kreise mit einander ihrem Flächeninhalt nach. Wenn wir betrachten, daß die Kreise alle ähnliche Figuren sind, und daß ähnliche Figuren sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, oder auch ihrer Diagonalen verhalten §. 155, so können wir schon muthmaßen, daß das beym Cirkel auch zutreffen wird, und da man den Durchmes-

ser

ser eines Kreises als eine Diagonale betrachten kann, so werden wir hieraus ferner schließen, daß sich die Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser, ihrem Flächeninhalt nach, verhalten werden, und das ist auch so wirklich: **Die Flächen der Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder auch ihrer Radiorum.** Der Beweis davon ist sehr leicht.

Es sey der Flächeninhalt eines Kreises = A, und dieses sein Diameter = D, und sein Radius = R, folglich sein Inhalt nach §. 232 oder A $= \frac{D^2P}{4}$ oder $R^2.P$.

Es sey der Flächeninhalt eines andern Cirkels = a, sein Diameter = d, und sein Radius = r, folglich sein Inhalt nach §. 232 $\frac{d^2P}{4}$ oder r^2P. Wenn man nun statt A und a die ihnen gleiche Formel in die Glieder einer Proportion setzt, so gilt folglich folgende Proportion, welches eine identische Proportion, wo die beyden vordersten und hintersten Glieder einerley sind,

$$A : a = \frac{D^2P}{4} : \frac{d^2P}{4}.$$

und die beyden hintersten Glieder durch $\frac{P}{4}$ divid.

$$A : a = D^2 : d^2,$$

Wel-

Welches der Beweis des einen Satzes ist. Ferner ist auch folgendes richtig:

$A : a = R^2P : r^2P$

$A : a = R^2 : r^2$

die beyden hintersten Glieder der durch P dividirt.

Sind drey von diesen vier Gliedern der Proportion gegeben, so weiß man nach der Regel Detri, wie man das vierte finden soll, ohne daß wir nöthig haben, uns dabey im geringsten aufzuhalten.

§. 243. Wenn wir ganz allgemein einen Diameter in hundert Theile theilen, welches doch mit allen möglichen Diametern wenigstens in Gedanken angeht, so wäre sein Quadrat = 100. 100 = 10000. Nun ist der Inhalt eines solchen Cirkels, da der Diameter aus hundert Theilen besteht, $\frac{d^2P}{4} = \frac{10000 \cdot 3,141}{4} = 2500 \cdot 3,141 =$ 7852,500 oder 7852,5, also das Verhältniß des Quadrats des Diameters zum Flächeninhalt des Cirkels wie 10000 : 7852,5 oder fast wie 10000 : 7853, auch wenn man beyde Glieder durch 10 dividirt, wie 1000 : 785. Es wird also dieses Verhältniß des Quadrats des Diameters zum Flächeninhalt des Cirkels ein ganz allgemeines Verhältniß seyn, welches man behalten muß, weil man auch daraus den Flächeninhalt eines jeden Cirkels durch eine Proportion finden kann, wenn man seinen Diameter weiß.

Exem-

Exempel: Es sey der Durchmesser eines Kreises = 12 Zoll, so gilt daher folgende Proportion 1000 : 785 = 12^2 : Inhalte des Cirkels, oder 1000 : 785 = 144 : $\frac{785 \cdot 144}{1000} = \frac{113040}{1000}$ = 113,040 Quadratzoll oder ′ 13″ 4‴ Flächenmaas.

§. 244. Wir gehen weiter zu den nothwendigsten Verhältnissen in dem Cirkel, und bemerken in Ansehung der Centriwinkel in dem Cirkel, daß in gleichen Kreisen oder in Kreisen von gleichen Radiis sich die Winkel am Mittelpunkt in Ansehung ihrer Größe ordentlich verhalten, wie die Bogen, wodurch sie gemessen werden. Es seyn nemlich Fig. 156 die beyden Cirkel von einerley Radio, so ist unser Satz, daß die Winkel acb und ACB sich verhalten, wie die Bogen ab und AB, oder acb : ACB = Bogen ab : Bogen AB. Der Beweis dieses Satzes wird ganz leicht seyn. Wir wissen, daß alle Winkel am Mittelpunkte durch ihre Bogen gemessen werden, und diese Bogen ein Theil der Peripherie sind. Nun ist ferner jede Peripherie in 360 Theile getheilt. Es wird also sich verhalten

die Peripherie : Bogen ab = 360° : Graden des Winkels acb

die Peripherie : Bogen AB = 360° : Graden des Winkels ACB

also auch

Winkel acb : Bogen ab = 360° : Peripherie
Winkel ACB : Bogen AB = 360° : Peripherie

auch weil die beyden letzten Glieder in beyden Proportionen einerley sind, indem beyde Peripherien gleich, so gilt also auch

acb : ACB = ab : AB.

Es versteht sich also auch von selbst, daß in einem und eben demselben Cirkel die Winkel am Mittelpunkt sich verhalten, wie ihre Bogen.

§. 245. Allein wenn die Cirkel verschieden sind, so verhalten sich diese Winkel am Mittelpunkte in beyden gegen einander ordentlich, wie ihre Bogen, und verkehrt wie die Radii. Man drückt dieses im Lateinischen aus (anguli sunt in ratione directa arcuum & inversa radiorum). Wir wollen uns gleich hierüber erklären Fig. 157.

Fig. 157. Es sey die Peripherie des grössern Cirkels = p, und sein Radius = R. Es sey die Peripherie des kleinen Cirkels = π, und sein Radius = ρ, so sagen wir, das Verhältnis der beyden Winkel ACB und acb sey folgendes:

Winkel ACB : Winkel acb = Bogen AB . ρ : Bogen ab . R

oder auch weil AC = R und ac = ρ

Winkel ACB : Winkel acb = AB . ac : ab . AC.

Wir beweisen dieses also:

Aus §. 225 wissen wir einen allgemeinen Ausdruck für jede Peripherie, nemlich 2rP, wo wir auch wissen, was r und P bedeutet. Wenn wir das hier anwenden, so wird nach den gegebenen

nen Datis die Peripherie des großen Cirkels, also $p = 2RP$, und die Peripherie des kleinern, also $\pi = 2\varrho . P$. Wir können nun erstlich für jeden Winkel des Cirkels folgende Proportion ansetzen, deren Richtigkeit wir aus §. 244 einsehen:

für den großen Cirkel Winkel ACB : 360° = Bogen AB : p

für den kleinern " " 360 : Winkel acb = π : Bogen ab

welche eben eine solche ist, nur die Glieder sind umgekehrt. Es gilt also nach der Arithm. wenn die Glieder der Proportionen mit einer multiplicirt worden.

Winkel ACB . 360° : Winkel acb . 360° = Bogen AB . π : Bogen ab . p

oder Winkel ACB : Winkel acb = Bogen AB . π : Bogen ab . p.

Wenn wir nun für π und p den eben angezeigten Ausdruck setzen, so wird die Proportion also:

Winkel ACB : Winkel acb = Bogen AB . $2\varrho P$: Bogen ab . 2RP

---

die beyden letzten Glieder durch 2P dividirt

Winkel ACB : Winkel acb = Bogen AB . ϱ : Bogen ab . R

und das war es, was wir beweisen wollten.

Weil, wenn man jedes dieser beyden letzten Glieder $AB.\varrho : ab.R$ mit $R.\varrho$ dividirt, alsdenn der Ausdruck dafür ist:

$$\frac{AB.\varrho}{R.\varrho} : \frac{ab.R}{R.\varrho} = \frac{AB}{R} : \frac{ab}{\varrho}$$

so kann man diese Proportion auch also ausdrücken:

Winkel ACB : Winkel acb = Bogen $\frac{AB}{R}$: Bogen $\frac{ab}{r}$

Dieser Lehrsatz hat übrigens seinen großen Nutzen, und ist wohl zu merken, auf dessen Anwendung wir uns aber übrigens nicht weitläuftig einlassen können, um nicht zu weitläuftig zu werden.

§. 146. Wir berühren jetzt einen wichtigen Lehrsatz, welcher einen großen Einfluß in die Mathematik hat, und erfüllen zugleich unser Versprechen, welches wir in dem Kapitel von der Verwandlung der Figuren §. 102 thaten, es zu beweisen, wie man jedes Parallelogram in ein Quadrat verwandeln könne. Der Lehrsatz ist folgender: Wenn man Fig. 158 von der Peripherie eines Cirkels auf den Diameter desselben AB, wo man will, eine **Perpendikularlinie** DE fället, so ist diese Perpendikularlinie die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten des Diameters, zwischen den Abschnitten AE und EB, welche durch die Stellung dieser Perpendikularlinie gemacht werden. Es gilt daher folgende

Fig. 158.

Pro-

Proportion AE : DE = DE : EB. Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir noch einige Hülfslinien ziehen, nemlich von beyden Enden des Diameters A und B nach dem Punkte D, wo der Perpendikel DE die Peripherie durchschneidet. Wir erhalten nun drey Dreyecke, erstlich △DEB, ferner △ADE, und ferner △ADB, der beyde △ in sich faßt. Nun ist erstlich der große Triangel, der beyde in sich faßt, ADB, dem Triangel ADE ähnlich, denn der Triangel ADB hat bey D einen rechten Winkel, weil er auf dem Diameter steht §. 187. Eben das hat der Triangel ADE bey E nach der Voraussetzung, weil DE ein Perpendikel ist. Ferner ist der Winkel x bey A beyden Triangeln, sowol ADB als ADE, gemeinschaftlich. Folglich ist der Winkel y dem Winkel z §. 151, also die Triangel einander ähnlich. Aber es ist ferner der Triangel DEB auch dem Triangel ADB ähnlich, denn der große Triangel ADB hat bey D einen rechten Winkel, und der Triangel DEB hat selbigen bey E. Ferner ist der Winkel y sowol dem Triangel DEB als ADB gemeinschaftlich, folglich der Winkel n = x, folglich beyde Triangel einander ähnlich.

Da der Triangel ADE ∽ △ADB
und der Triangel DEB ∽ △ADB

so müssen daher, weil beyde einem gleichen dritten ähnlich sind, auch beyde unter einander ähnlich seyn.

Oder also der △ADE ∽ DEB

folglich bey beyden die gleichen Winkeln entgegen stehenden Seiten proportional.

Da nun, wie wir gesehen, z = y und x = n, so muß also folgende sich hierauf gründende Proportion gelten: AE:DE = DE:EB, welches unser zu beweisende Satz war.

§. 247. Weil AE:DE = DE:EB, so ist (nach §. 269 Arithm.) AE.EB = DE.DE, oder AE.EB = DEq. Hieraus sieht man nun leicht, wie man die Seite eines Quadrats finden könne, welches so groß seinem Inhalt nach ist, als ein gegebenes Recktangel. Man setze nemlich die Höhe und Grundlinie des gegebenen Recktangels an einander in eine gerade Linie, theile diese gerade Linie in zwey gleiche Theile, und ziehe mit der Länge eines dieser Theile über diese gerade Linie einen halben Cirkel, dessen Diameter also die an einander gesetzte Höhe und Grundlinie des Recktangels seyn wird, aus dem Punkt, wo beyde an einander gesetzt sind, ziehe man die Perpendikularlinie an die Peripherie, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats, welches dem gegebenen Recktangel gleich ist, und nun leicht kann konstruirt werden. Z. E. es sey in dieser Figur AE = der Grundlinie eines Recktangels; EB = seiner Höhe; in C ist die Mitte dieser Linie AB, also CA = CB der Radius des Cirkels, und die auf E aufgerichtete Perpendikulare DE die Seite des Quadrats, das diesem Recktangel gleich ist. Denn da der Inhalt eines Recktangels durch die

Mul-

Multiplikation seiner Grundlinie in seine Höhe, oder hier durch AE. EB ausgemessen wird, und das Quadrat durch die Multiplikation seiner Seiten mit sich selbst, hier durch DE. DE und AE. EB = DEq, so sieht man, daß unsere Findung der Seite des Quadrats seine Richtigkeit habe.

§. 248. Die Seite eines Quadrats, welches so groß als ein gegebenes Recktangel ist, ist also die mittlere Proportionalgröße zwischen den Seiten des Recktangels, und wenn nun die Seite des Quadrats $= x$, und unbekannt wäre, und die Seiten des Recktangels a und b, so gälte, wie aus vorigem § erhellet, der Schluß $a : x = x : b$, also $ab = x^2$ und $\sqrt{ab} = x$. Wenn man also die Seiten des Recktangels mit einander multiplicirt, und daraus den $\sqrt{}$ zieht, so hat man die Seite eines gleich großen Quadrats gefunden.

§. 249. Wir haben im §. 193 das Maas eines Winkels gefunden, dessen Schenkel auf der Peripherie des Cirkels im Cirkel standen, und dessen Spitze über den Cirkel hinaus reichte. Es läßt sich schon muthmaßen, daß diese durch die Peripherie des Cirkels abgeschnittenen Linien ein gewisses Verhältniß haben werden, und das ist so wirklich. Wir erhalten dadurch Fig. 159 zwey Triangel, welche einander ähnlich sind, so daß, wenn wir auf die Punkte der Peripherie, wo die Schenkel des Winkels stehen, eine Chorde BC ziehen, und gleichfalls, wo die Schenkel Fig. 159.

den Cirkel schneiden, eine Chorde DE ziehen; der Triangel ADE dem ganzen Triangel ABC ähnlich ist. Diese Wahrheit ist sehr leicht zu erweisen:

Die Winkel bey E oder z + x sind = 2 Rektis §. 38,

ferner die Winkel y + x sind auch = 2 Rektis nach §. 192,

weil sie einander im Cirkel in einem Vierecke entgegen stehen, also muß der Winkel y = z seyn. Bey A ist für beyde Triangel ein gemeinschaftlicher Winkel, also der Winkel m gewiß gleich dem Winkel n nach § 151. Wenn also die gleichen Winkeln entgegen gesetzten Seiten einander proportional sind nach §. 140, so wird folgende Proportion richtig seyn:

$$AD : AC = AE : AB$$

also auch $$AD : AE = AC : AB$$

das heißt, die Stücke oder Segmente der Schenkel eines solchen Winkels außer der Peripherie verhalten sich umgekehrt, wie die ganzen Schenkel eines solchen Winkels.

§. 250. Wir betrachteten jetzt dies Verhältniß der Schenkel eines Winkels, dessen Schenkel beyde die Cirkellinie schnitten, und auf einem Bogen des Cirkels standen, jetzt wollen wir den Fall annehmen, daß zwar die Spitze des Winkels außer der Kreislinie sich befinden soll, daß aber nur ein Schenkel desselben die Kreislinie schneiden, und der andere Schenkel sie als eine Tan-

Tangente berühren soll. Und da sind nun drey Fälle zu betrachten.

Erster Fall. Entweder Fig. 160 geht der Schenkel AH, welcher den Cirkel schneidet, nicht durchs Centrum desselben, er ist aber in solcher Lage, daß, wenn man von dem Orte A, wo er auf dem Cirkel steht, an die Stelle, wo der andere Schenkel HB den Cirkel berührt, eine gerade Linie HB zieht, selbige durchs Centrum C des Cirkels geht, also alsdenn steht dieser Winkel mit dem einen Ende des Schenkels auf dem Ende des Diameters AB, und mit dem andern Schenkel berührt er ihn. Fig. 160.

Der zweyte Fall Fig. 161 ist, wo der eine Schenkel des Winkels AH, der den Cirkel schneidet, durchs Centrum C des Cirkels geht, also die Linie, welche von A nach dem andern Orte B, wo der andere Schenkel den Cirkel berührt, gezogen wird, AB eine Chorde ist. Fig. 161.

Der dritte Fall Fig. 162, wo der eine Schenkel HA, der den Cirkel schneidet, nicht durchs Centrum C geht, aber die Linie, welche von A nach dem Orte B, wo der andere Schenkel den Winkel berührt, kann gezogen werden, gleichfalls nicht durchs Centrum geht, also auch eine Chorde ist. Auf alle drey Fälle haben wir Grund zu behaupten, daß die Tangente BH die mittlere Proportionallinie zwischen dem Stücke des andern Schenkels, welches den Cirkel schnei- Fig. 162.

det, und außer dem Cirkel ist, das ist, zwischen HD, und zwischen dem ganzen Schenkel HA ist; daß also auf alle drey Fälle folgende Proportion richtig sey:

$$HD : HB = HB : HA.$$

Fig. 160. Erster Fall Fig. 160. Man ziehe also die Linie AB, welche durchs Centrum geht, und also ein Diameter ist, und noch die Hülfslinie BD von B, wo der eine Schenkel den Winkel berührt, bis an den Ort, wo der andere Schenkel ihn schneidet, so kann man zwey Triangel betrachten, erstlich den Triangel HBA, und noch den Triangel HBD, von welchen wir bald sehen werden, daß sie einander ähnlich sind.

Nun ist der Winkel bey B oder $x + y$ = Recto
weil die Tangente HB auf dem
Diameter steht §. 175. Ferner
ist auch der Winkel : : r = Recto
weil es ein auf dem Diameter ste-
hender Peripheriewinkel ist §. 175.
Ist auch : : : = s = Recto
weil es ein Nebenwinkel eines Rekti ist.

Nun haben wir in dem Triangel HBA den Winkel $x + y$, welcher dem Winkel s in dem Triangel HBD gleich ist. Ferner haben diese beyde Triangel noch den Winkel bey H gemeinschaftlich, also muß $z = y$ seyn. Also $\triangle HBA \backsim \triangle HBD$. Folglich weil nun in ähnlichen Triangeln die gleichen Winkeln entgegen gesetzten Seiten

ten einander proportional sind, so gilt die Proportion HD : HB = HB : HA.

Zweyter Fall Fig. 161. Man ziehe die Hülfslinien AB, ferner aus dem Centro nach dem Orte, wo der eine Schenkel HB den Cirkel berührt, die CB, und endlich von B, bis wo der andere Schenkel den Cirkel schneidet, die BD. Man wird wieder finden, daß der Triangel HBA dem Triangel HBD ähnlich sey. Fig. 161.

Denn erstlich ist $x + y =$ Recto, weil die Tangente auf dem Radius steht §. 175, indem CB = Radio; ferner ist $u + x =$ Recto, weils ein auf dem Diameter stehender Peripheriewinkel ist,

folglich $u + x = x + y$

folglich $u = y$

aber es ist auch $u = z$, weil △ABC ein gleichschenklichter Triangel ist, indem CB und CA beyde Radii sind,

folglich ist auch $z = y$.

Nun ist in den beyden Triangeln HBA und HBD der Winkel bey H gemeinschaftlich, ferner $z = y$,

also muß $m + x + y = s$ seyn §. 151. Folglich gilt wiederum die Proportion

$$HD : HB = HB : HA.$$

Fig. 163. Der dritte Fall Fig. 162. Man ziehe eine Hülfslinie HG, welche aus der Spitze des Winkels H durchs Centrum des Cirkels C geht, und an der Peripherie in G sich endigt. Wir hatten bey dem zweyten Falle bewiesen, daß, wenn ein Schenkel eines solchen Winkels durchs Centrum geht, wie nun hier durch die Hülfslinie HG geschehen ist, alsdenn folgende Proportion wahr sey:

$$HE : HB = HB : HG.$$

Nun wissen wir ferner, wenn wir nun die Schenkel GH und AH betrachten, welche den Winkel GHA machen, und dessen Schenkel beyde auf der Peripherie stehen, daß nach §. 249 folgendes Verhältniß wahr sey:

$$HD : HE = HG : HA.$$

Wenn wir nun beyde Proportionen unter einander setzen, und ihre Glieder mit einander multipliciren, so ist also

$$HE : HB = HB : HG$$
$$HD : HE = HG : HA$$

$$HD : HB = HB : HA.$$ Denn

HE

HE. HD : HB. HE = HB. HG : HG. HA erstere beyde Glieder dividirt durch HE

HD : HB = HB : HA. letztere beyde Glieder dividirt durch HG.

Wir hätten also auf alle drey Fälle diesen Lehrsatz erwiesen.

§. 251. Aus dieser Proportion folgt ferner, daß HB. HB = HD. HA, oder das Quadrat der Tangente ist gleich dem Produkte des einen ganzen den Cirkel schneidenden Schenkels mit dem Stück, welches außer dem Schenkel desselben befindlich ist.

Es haben diese Lehrsätze am mehrsten ihren Nutzen in der Trigonometrie und höhern Geometrie, daher wollten wir sie hier nicht vorbey lassen, da ohnedem ihr Beweis gar nicht schwer ist.

§. 252. Wir haben nun die vornehmsten Proportionen der Linien, welche den Cirkel schneiden oder berühren, betrachtet. Wir wollen noch, ehe wir dieses Kapitel beschließen, auf eine andere Proportion unser Augenmerk richten, welche entsteht, wenn in dem Cirkel selbst Fig. 163 zwey Chorden, wie AB und DE sich einander schneiden. Fig. 163.

Es mögen sich nun diese Sehnen schneiden, auf welche Art es wolle, so sind doch die abgeschnittenen Stücke oder Segmente einander wechselsweise proportional, und die Produkte der Segmente sind gleich, oder, um es hier gleich durch diesen Fall zu erläutern, es gilt alsdenn die Proportion

$$AG : GE = DG : GB$$

---

und also $GE . DG = AG . GB$.

Man ziehe die Hülfslinie AE, EB und AD, so wird man alsdenn beweisen können, daß die Triangel GEB und GAD einander ähnlich sind, und man also diese Proportion hieraus folgern könne. Wir beweisen die Aehnlichkeit dieser beyden Triangel sehr leicht auf folgende Art:

der Winkel $x = y$ denn es sind Vertikalwinkel,

der Winkel $r = m$ denn man kann sie

folglich ——————— als Peripheriewinkel betrachten, die

der Winkel $n = s$ beyde auf einem

folglich ——————— Segment AE stehen

$\triangle GEB \backsim \triangle GAD$

---

folglich $AG : GE = DG : GB$

oder auch $AG : DG = GE : GB$

und folglich nach §. 269 der Arithm.

$$DG . GE = AG . GB.$$

§. 253. Wir hoffen, das nöthigste, was zu der Lehre vom Cirkel für Anfänger gehört, vor-

vorgetragen zu haben. Wir gehen also weiter, fangen ein neues Kapitel an, und tragen noch eine nöthige Lehre vor, welche in die ebene Geometrie gehört.

Das achte Kapitel.

Von der Lage der Linien gegen eine Ebene und der Ebenen gegen einander.

§. 254.

Wir haben bis daher von der Lage, Ausmessung und Vergleichung gerader Linien und Flächen unter einander, und der krummen Cirkellinie und Cirkelfläche geredet; wir haben Figuren gemacht, und selbige betrachtet, ausgemessen und mit einander verglichen. Wir betrachteten alle diese Dinge, als ob sie in einer Fläche, die allerwärts **eben** wäre, liegen, welches man eine Ebene nennt. Jetzt wollen wir nun bloße ebene Flächen betrachten, und ihre Lage gegen Linien und gegen einander bemerken. Es sind uns diese Betrachtungen sehr nöthig, weil wir sonst keine deutliche Begriffe von den **Körpern**, zu deren Betrachtung wir bald schreiten werden, erhalten

halten würden. Wir wiederholen noch einmal den Begrif einer Ebene.

Eine Ebene ist eine solche Fläche, in welcher gerade Linien, welche man von einem oder andern Punkte ihres Umfangs an den andern, an welchen man will, zieht, ganz mit allen ihren Punkten zu liegen kommen. Dieses ist nur eine Eigenschaft der Ebene, welche ihr zukömmt, sie doch aber vollkommen charakterisirt. Wenn man einen geraden Tisch, ein gerades Kartenblatt, einen gläsernen gewöhnlichen Spiegel sich vorstellt, so hat man Begriffe von einer Ebene. Man hat dabey gar nicht nöthig, darauf zu sehen, durch was für gerade oder krumme Linien eine Ebene begränzt sey. Die Umgränzung derselben gehört nicht in ihrem Begrif. Wenn man aus einem geraden Kartenblatte einen Cirkel oder eine noch so vieleckte Figur schneidet, so bleibt doch diese so vieleckt oder rund geschnittene Figur eine Ebene, wie man denn dieses leicht einsehen wird.

§. 255. Wir erinnerten §. 4, daß wir die Oberfläche der Körper ohne alle Dicke betrachteten, und betrachten müßten. Dieses gilt auch hier von den Ebenen. Man hat zwar keine wirkliche Ebenen in der Natur, die nicht Oberflächen gewisser Körper wären. Allein betrachten und vorstellen lassen sich doch immer bloße unkörperliche Ebenen. Wir können uns ferner eine solche gerade Fläche oder Ebene so groß vorstellen, als wir wollen, und als wir es zu unsern Betrach-

tungen

tungen nöthig befinden. Man stellt sie sich gewöhnlich ohne Gränzen, oder vielmehr unbestimmt vor, ob man sie schon so nicht in der Natur haben kann, damit man sie alsdenn so groß nehmen könne, als man es gebraucht. Allein da die Größe einer Ebene in Ansehung ihrer Lage gegen Linien und andere Ebenen gar nichts verändert, so können wir diese Idee allerdings haben, und es werden daher unsere Betrachtungen darüber sehr allgemein werden. In unsern Vorstellungen aber werden wir die Ebenen als Vierecke zeichnen, weil dieses eine bequeme Figur ist, die Lage der Ebene vorzustellen. Das ist nur schlimm, daß alle diese Zeichnungen selbst in einer Ebene, nemlich in der Ebene des Papiers, liegen, worauf sie gezeichnet sind, da es doch Linien und Flächen vorstellen soll, die außer dieser Ebene sich befinden. Dieses verwirrt im Anfange die Einbildungskraft, und die Vorstellung der Ebene ist auch fast nur das einzige schwere in dieser Lehre. Man wird der Einbildungskraft sehr zu Hülfe kommen, wenn man Kartenblätter oder Stücken Pappen also setzt, und gegen einander legt, als die Betrachtungen erfordern, und die verschiedenen Linien, wovon wir reden werden, durch gerade Stücken Drath oder große Nehnadeln vorstellt. Man wird es endlich bald gewohnt, sich an die bloßen Zeichnungen zu halten, und sich dadurch die Lagen der Ebenen vorzustellen. Wir fangen nun die Betrachtungen selbst an.

§. 256. Wir haben §. 5 gesehen, daß man von einem Punkte nach einem andern, er liege, wo er wolle, eine gerade Linie ziehen kann. Durch diese gerade Linie läßt sich nun, wie man leicht begreifen wird, eine Ebene legen, aber sie kann doch unendlich verschiedene Lagen haben, und doch immer durch diese gerade Linie durchgehen. Z. E. Fig. 164. Es sey AB eine gerade Linie, und AEFB eine Ebene, so sieht man gleich, daß man sie durch diese gerade Linie in sehr viele Lagen legen kann. So konnte sie z. E. so liegen, als die Ebene ABCD, oder als die Ebene ABGH, und dazwischen giebt es noch unendlich viele Lagen. Wenn man in ein Kartenblatt eine Falz gemacht hat, so giebt der Knick oder Falz eine gerade Linie, aber man kann um diesen Knick den einen Theil der Fläche des Kartenblatts in sehr viele Lagen legen. Der Deckel einer Schnupftobacksdose, dessen Garnier auch als eine gerade Linie betrachtet werden kann, und den man, wenn man ihn aufmacht, weit oder gering öfnen kann, erläutert gleichfalls dieses. Durch eine jede gerade Linie läßt sich zwar also eine Ebene legen, aber ihre Lagen gegen andere Dinge sind dadurch noch nicht bestimmt.

Fig. 164.

§. 257. Wir wollen zu den zweyen Punkten, die an den Enden der geraden Linie AB Fig. 165 liegen, noch einen dritten Punkt hinzusetzen. Er soll aber nicht mit dieser in einer geraden Linie liegen, denn sonst käme es wieder auf

Fig. 165

die

die vorige Betrachtung heraus, weil alsdenn dieser Punkt ein Theil der geraden Linie AB wäre. Es liege also der dritte Punkt außer der geraden Linie AB, oder welches einerley ist, es liegen drey Punkte nicht in gerader Linie, alsdenn wird durch diese drey Punkte allerdings die Lage einer Ebene bestimmt. Diese drey Punkte mögen ABE seyn, und durch die zwey Punkte AB, welche durch die gerade Linie AB verbunden sind, gehe die Ebene. Nun kann man, wie wir im vorigen § gesehen haben, die Ebene ABCD um die gerade Linie AB in verschiedene Lagen stellen, oder welches einerley ist, herum bewegen. Endlich wird sie auch in den Punkt E kommen. Allein wenn sie durch diesen Punkt E mit durchgehen soll, oder wenn der Punkt E mit in der Ebene liegen soll, so sieht man auch gleich, daß sie die Lage, welche sie hätte, wenn sie durch den Punkt E ginge, nicht wieder verlassen darf, denn unendlich wenig über oder unter dem Punkt E wäre sie nicht mehr in der Lage, welche man doch fordert. Durch die Lage also dieser dreyer Punkte wird die Lage dieser Ebene bestimmt, und da man sich diese Vorstellung von allen möglichen Ebenen machen kann, so sieht man, daß dieser Satz für alle mögliche Ebenen gilt, und wenn auch die Punkte noch so weit aus einander wären, denn man darf alsdenn die Ebene nur groß genug annehmen, um sie so zu legen, daß sie durch alle drey Punkte herdurch geht.

§. 258. Man kann auch durch drey Punkte nur eine Ebene legen oder gedenken. Alle andere, die man noch annehmen wollte, würden mit dieser ersten in eins zusammen fallen, wie aus der Natur der Sache schon klar ist. Es ist überhaupt dieser Grundsatz schon an wichtigen Folgerungen reich. Jedes Dreyeck und jeder ebene geradlinichter Winkel wird in einer Ebene liegen, denn beyde werden durch drey Punkte bestimmt, die bey dem Dreyecke an den Enden der Grundlinie, und an der Spitze, und bey dem geradlinichten Winkel an den äußersten Enden seiner Schenkel, und an seiner Spitze liegen. Auch wird ein Cirkel in einer Ebene liegen müssen, weil er durch drey Punkte §. 171 bestimmt wird, wodurch sich, wie wir eben gesehen, nur eine Ebene legen läßt. Wir sehen hiedurch auch ein, warum eine Sache, welche auf drey Füßen steht, allezeit fest steht, und warum man daher solchen Dingen, die fest stehen müssen, als Gestellen, Spinnrädern, Gueridons ꝛc. drey Füße giebt. Durch die Endpunkte der Füße kann eine Ebene gelegt werden. Das aber folgt nicht, daß eine solche Sache auch wagerecht stehe. Wenn eins der drey Beine länger ist, als die andern, so steht die Sache schief, aber darum doch noch fest.

§. 259. Nimmt man mehr als drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, so können sie freylich alle so liegen, daß sie sich in einer Ebene befinden. Auf einem ebenen Kartenblatte

z. E.

z. E. können viele tausend Punkte gemacht werden, die nicht in gerader Linie liegen. Allein sie können auch so gegen einander gestellt werden, daß sich nur durch einige, oder nur durch drey davon eine und eben dieselbe Ebene legen läßt. Man wird dieses sich sehr deutlich vorstellen können, wenn man in ein Kartenblatt einige Falze macht, und es alsdenn in verschiedene Lagen biegt. Die Endpunkte der Falzen, welche alle gerade Linien sind, stellen so viele Punkte in verschiedenen Lagen vor. Schon bey vier Punkten ist es sehr sichtlich, daß die nicht allezeit nothwendig in einer Ebene liegen, und das wollen wir ietzt durch die 166ste Figur beweisen und erläutern, die man auf einem Kartenblatte nachmachen kann. Es seyn ABCD vier Punkte, die man mit Fleis in eine Ebene gelegt hat. Man ziehe sie mit geraden Linien zusammen, da man also das Viereck ABCD erhält. Nun ziehe man die Linie AD. Man sieht, daß, wenn man nach dieser Linie den Theil ACD um die AD bewegen würde, die vier Punkte nicht mehr in einer Ebene blieben, sondern Punkt C oder B gegen die andern drey eine andere Lage bekäme, und man also hier zwey Ebenen erhieltet, ACD und ABD, die verschiedene Lagen hatten. Ein Tisch, der vier Beine hat, steht sehr oft nicht fest, weil entweder seine Füße nicht gleich lang, oder der Boden uneben ist, und es lassen sich alsdenn daher durch die Enden seiner vier Füße, wie hier, zwey Ebenen legen, davon jede eine andere Lage hat. Fig. 166.

§. 260. Wir haben im 256sten § gesehen, daß man durch eine gerade Linie eine Ebene in mehr als in einer Lage legen könne, und die 164te Figur erläutert dieses genugsam. Wenn man diese verschiedenen dort gezeichneten Ebenen betrachtet, so sieht man, daß sie alle, wenn sie unterwärts verlängert wären, sich schneiden würden, und daß dieses bey dieser Figur in der geraden Linie AB geschehen würde. Allein es ist nicht nur bey dieser Figur, sondern auf alle mögliche Fälle wahr, daß alle Ebenen, die man auf einander setzt, oder vielmehr durch einander gehen läßt, einander nur in **einer** geraden Linie schneiden, und daß sie außer dieser geraden Linie, worinn sie sich schneiden, keinen Punkt mit einander gemein haben können. Die 167ste Figur mag dieses erläutern.

Fig. 167.

Weil man nach §. 255 Ebenen als Dinge betrachtet, welche nur eine Ausdehnung, nemlich Breite und Länge, aber ganz und gar keine Dicke haben, so sieht man daraus gleich, daß der Schnitt AB, wo beyde Ebenen EFCD und GHKI durchgehen, wol eine Länge AB, aber ganz und gar keine Breite haben könne, denn hätte er die, so müßte eine der Ebenen eine Dicke haben, welches aber wider ihren Begrif ist. Da er nur Länge, aber keine Breite hat, so muß AB eine Linie seyn. Es muß ferner dieser Schnitt AB beyden Ebenen auch gemeinschaftlich seyn, denn indem die Fläche GHKI die Fläche CDEF schneidet, so schneidet auch hinwiederum CDEF

die

die Ebene GHK!, also muß der Durschnitt AB nothwendig beyden Ebenen gemeinschaftlich seyn. Allein diese Durchschnittslinie AB muß auch eine gerade Linie seyn. Denn es mag nun AB mal eine Linie seyn, welche es wolle, so ist es doch gewiß, daß man in selbiger zwey Punkte, sie mögen A und B seyn, annehmen kann, welche beyden Ebenen gemeinschaftlich sind; denn da wir oben gezeigt haben, daß die ganze Linie AB in beyden Ebenen läge, so müssen auch zwey Punkte davon darinnen liegen. Man wird auch diese zwey angenommenen Punkte A und B vermittelst einer geraden Linie zusammen ziehen können, diese gerade Linie muß auch sowol in die eine, als die andere der beyden Ebenen fallen, denn ihre beyden Endpunkte A und B sind in beyden Ebenen gemeinschaftlich, und die Ebenen blieben keine Ebenen mehr, wenn nicht die gerade Linie zwischen A und B darinn fiele, weil eben dieses die Erklärung einer Ebene nach §. 254 ist, daß eine gerade Linie zwischen zwey Punkten ganz darinn fällt. Wenn aber eine gerade Linie zwischen den Punkten A und B ganz in beyde Ebenen fällt, so kann es keine andere seyn, als in der sich beyde Ebenen schneiden, denn eine andere Linie ist nicht möglich, weil sie, wenn sie nicht gerade wäre, sie krumm seyn müßte, und also sich in ihr drey Punkte annehmen ließen, die nicht in einer geraden Linie, und doch beyden Ebenen gemeinschaftlich wären, welches aber nicht angeht, weil nach §. 258 durch drey Punkte, die nicht in

einer geraden Linie liegen, nur eine Ebene kann gelegt werden, und alsdenn die Ebenen zusammen fallen, und sich nicht schneiden würden. Es muß daher AB nothwendig eine gerade Linie seyn. Es können auch dieser geraden Linie AB beyde Ebenen keinen Punkt mehr gemeinschaftlich haben, denn hätten sie ihn, so wäre er nicht mit in der Linie, AB könnte also als ein dritter Punkt betrachtet werden, und die Ebenen fielen zusammen. Endlich werden auch beyde Ebenen, wenn sie sich in AB geschnitten haben, sich immer weiter von einander entfernen, und nie wieder zusammen kommen, weil sie einander gleich nach der Linie AB wieder verlassen, und doch in ihrer angenommenen Richtung fortgehen müssen, weil es sonst keine Ebenen bleiben.

Dieses, was von zwey Ebenen gesagt wird, gilt auch von mehrern, die sich alle in einer Linie schneiden, und man kann unendlich viele Ebenen durch eine Linie legen und sich schneiden lassen, der Schnitt wird doch nur eine gerade Linie seyn, weil alle Ebenen ganz und gar keine Dicke haben, und alle diese sich schneidenden Ebenen werden nur die einzige Linie AB, und sonst auch keinen Punkt mit einander gemein haben können. Man sehe zur Erläuterung die 164ste Figur, wo man sich drey in der Linie AB sich schneidende Ebenen vorstellen kann.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen gehen wir nun weiter, und betrachten erst die Lage einiger Linien auf einer Ebene.

§. 261.

§. 261. Wenn wir die Lage einer geraden Linie gegen eine Ebene betrachten, so fällt gleich in die Augen, daß diese gerade Linie entweder ganz senkrecht auf dieser Ebene stehen könne, oder nach einer Seite der Ebene sich mehr oder weniger neigen könne, und solche Neigung einer geraden Linie, den sie mit einer Ebene machet, nennet man ihren Winkel. Es wird aber Fig. 168 der Winkel einer Linie AB gegen eine Ebene DEFG, welche die Ebene in B schneidet, also bestimmet. Man fället von einem willkührlichrn Orte A, der Linie AB, ein Perpendikel AC, und ziehet nach diesem Punkt C, wo der Perpendikel die Ebene erreichet, eine gerade Linie BC, von dem Punkte, wo die sich gegen die Ebene neigende Linie AB die Ebene erreichet, so ist der Winkel ABC der Winkel, welchen die Linie AB mit der Ebene machet. Weil ABC drey nicht in gerader Linie sich befindende Punkte sind, und dadurch nach §. 258 auch die Lage einer Ebene vollkommen bestimmt wird, so könnte man also durch diese drey Punkte eine Ebene legen, darinn sich alle drey Linien des Triangels ABC befänden, und BC würde der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene DEFG seyn. Stünde AB unter einem rechten Winkel auf der Ebene, so könnte man die Linie AC gar nicht ziehen, sondern AB und AC wären einerley Linie, weil, wie wir unten §. 268 sehen werden, sich durch einen Punkt außer der Ebene nur ein Perpendikel ziehen läßt. Es ist dieses eine Erklärung desjenigen, was man einen Winkel einer geraden Linie mit einer

Fig. 168.

Ebene nennet. Wir werden vorzüglich aber die Perpendikel auf der Ebene betrachten, weil uns deren Betrachtung für die Absichten dieser Schrift am nöthigsten scheinen.

§. 262. Wir wollen nun gegen und auf eine gegebene Ebene gerade Linien setzen, und sehen, zu welchen Wahrheiten uns diese Betrachtungen führen werden. Daß man auf eine Ebene eine gerade Linie senkrecht setzen könne, ist kein Zweifel. Es wird nur darauf ankommen, die Kennzeichen zu wissen, ob sie senkrecht auf der ganzen Ebene stehe. Sie steht aber auf der ganzen Ebene senkrecht, wenn sie mit allen Linien, welche durch den Punkt, wo sie die Ebene berühret, gezogen werden, einen rechten Winkel macht. Wenn also z. E. Fig. 169 die Linie AB mit BG, BC, BD, BF ꝛc. rechte Winkel machet, so steht sie auf der Ebene senkrecht, denn alsdenn lenket sie sich nach keiner Seite mehr hin als nach der andern. Hier finden wir nun gleich einen wichtigen Lehrsatz. Er ist folgender Fig. 169: Eine gerade Linie AB, welche auf zwey andern, BG und BD, welche in eben der Ebene liegen und sich schneiden, auf diesem Durchschnittspunkt senkrecht steht, steht auch auf allen andern Linien, welche in dieser Ebene durch den Durchschnittspunkt B gezogen werden, senkrecht, und also auf der ganzen Ebene senkrecht. Man wird sich diese 169 Figur, von welcher wir den Beweis führen, deutlich machen, wenn man anstatt der gezeichneten Ebene FEGD einen gera-

den

den Tisch wählet, anstatt der Linie AB einen steifen geraden Drath, und wenn man die Linien GE, HC, FD, auf dem Tische gezogen hat, an die äußersten Enden derselben in FEDG Nadeln einschlägt, und daran mit Faden aus dem Punkte A die Linie AE, AC, AD, AG, AH, AF ziehet, alsdenn wird der Beweis, den wir jetzt führen wollen, sehr leicht zu verstehen seyn, der überhaupt nicht schwer, sondern nur etwas weitläuftig ist. Wir fangen ihn an. Es kömmt darauf an, daß wir zeigen, daß, wenn man auch nun zu den zwey gegebenen Linien, worauf AB perpendikular steht, noch eine dritte HC in ganz willkührlicher Lage durch B zöge, dennoch AB auch darauf perpendikular stünde. Denn wenn das ist, so ist sie auf der ganzen Ebene perpendikular. Um dieses zu zeigen, müssen wir die Kongruenz verschiedener Triangel erst darthun.

I) Wir haben vorausgesetzt, daß AB auf zwey Linien perpendikular stehe, nemlich auf BD und BG. Man verlängere die BD durch den Punkt, wo der Perpendikel AB die Ebene berührt, so lange bis BF, so lang als BD ist, oder alsdenn ist BD = BF. Eben so verlängere man BG durch den Punkt B nach E hin, bis BE = BG. Nun ziehe man ED und FG aus den Enden dieser Linien, dadurch erhält man zwey Triangel, BED und BFG, die kongruent oder gleich und ähnlich sind.

Denn BE = BG } aus der Construktion
BD = BF }
die Winkel EBD = FBG weils Vertikalwinkel

---

also △BED ≅ △BFG nach §. 49.
Weil in beyden △ zwey Linien und der eingeschlossene Winkel gleich sind, folglich ED = FG, der Winkel BED = BGF, und der Winkel BDE = BFG.

II) Man ziehe noch eine dritte Linie durch B in dieser Ebene willkührlich, welche die gezogenen Linien FG und ED schneide. Es mag einmal die HC seyn. Auch alsdenn ist der △FBH gleich und ähnlich oder kongruent dem △CBD.

Denn es ist BD = BF nach der Konstruktion siehe I.

ferner der Winkel DBC = FBH weil es Vertikalswinkel sind.

auch der Winkel BDC = BFH weil, da nach I die beyden △EBD und BFG kongruent waren, diese Winkel einander decken.

---

folglich △FBH ≅ △CBD nach §. 51 weil in beyden eine Seite und die anliegenden Winkel gleich sind. Folglich ist nun auch daher FH = DC und HB = BC.

III) Nun nehme man einen willkührlichen Punkt A in dem Perpendikel AB an, und ziehe auf

auf die Punkte G und E die Linien AG und AE, so ist nun auch der △ABG kongruent dem △AEB. Denn wir haben gleich in I. angenommen, daß AB auf BG perpendikular stehe, also muß es auch auf der verlängerten BG auf BE perpendikular stehen. Folglich der Winkel ABG = ABE = Recto

ferner BG = BE nach I. aus der Konstruktion.

und AB = AB

---

also △AGB ≅ △ACB weil nach §. 51 zwey Linien und der eingeschlossene Winkel gleich sind. Folglich ist auch AE = AG.

IV) Man ziehe nun auf die Punkte F und D die Linien AF und AD, so ist nun auch △ABF kongruent dem △ABD: Es folget aus eben diesen Gründen. Denn der Winkel ABD ist ein rechter, welches wir in I. angenommen, also auch der Winkel ABF.

Und da ABD = ABF

ferner BD = BF aus der Konstrukt. nach I.

und AB = AB

---

so ist △ABD ≅ △ABF nach §. 51.

also ist AD = AF.

V) Aus allen diesen folgt nun, daß der △AFG auch kongruent sey △ADE.

Denn FG = ED nach I.

ferner AG = AE nach III.

und AF = AD nach IV.

△AFG ≅ △ADE weil nach §. 53 alle drey

Sei-

Seiten gleich sind. Folglich ist nnn auch der stehende Winkel AFH = dem Winkel ADC.

VI) Es folget ferner hieraus, der △AFH ist kongruent dem △ADC. Denn

FH = DC nach II.
AF = AD nach IV.
und der stehende Winkel AFH = ADC nach V.

---

also △AFH ≅ △ADC, weil nach §. 51 zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel in beyden gleich sind. Folglich ist nun auch AH = AC.

VII) Nun folget endlich noch aus allen diesen der Satz, welcher den Beweis vollführet. Nemlich △ABH ist kongruent dem △ABC. Denn

HB = BC nach II.
AH = AC nach VI.
AB = AB

---

folglich △ABH ≅ ABC, weil nach §. 53 alle Seiten beyder Triangel einander gleich sind. Folglich muß nun auch der Winkel ABC gleich seyn dem Winkel ABH. Sind diese beyde Winkel aber einander gleich, so müssen sie beyde rechte Winkel seyn, weil sie Nebenwinkel sind, die einander nicht gleich seyn können, wenn es nicht beyde rechte Winkel sind. Also steht AB auf HC perpendikular. Wir hatten vorausgesetzt, daß AB auf zwey Linien, BD und BG, perpendikular stünde, wir haben die dritte HC willkührlich gezogen, und ebenfalls gezeigt, daß sie auf der pers-

pen-

pendikular stünde. Da sie willkührlich gezogen wurde, so hätte man unendlich viele Lagen dieser Linie durch alle Punkte der Ebene nehmen können, von denen man auf eben diese Art es bewiesen hätte, daß AB perpendikular darauf stünde. Unser Satz ist daher also richtig, wenn eine Linie auf einer Ebene, auf zwey andern, die in eben der Ebene liegen, perpendikular steht, so steht sie auf der ganzen Ebene perpendikular.

§. 263. Daß nicht weniger als zwey Linien in einer Ebene erfordert werden, worauf eine dritte AB perpendikular stehen muß, wenn sie auf der ganzen Ebene perpendikular stehen soll, fällt gleich in die Augen, wenn man nur betrachtet, daß, wenn sie nur auf einer, als z. B. BG ist, perpendikular stünde, oder wenn blos der Winkel ABG ein rechter Winkel wäre, sie alsdenn nach BH, BC oder BD und allen dazwischen fallenden Linien sich neigen könnte, ohne daß der rechte Winkel ABG im geringsten geändert würde, indem man ja AB um das Ende von BG herum bewegen kann, ohne daß der Winkel ABG = Rekto geändert wird, und man kann dieses durch einen auf einem Tisch gesteckten geraden Drath sich sehr deutlich machen.

Anmerkung. Auf diesem Lehrsatz gründet sich die Verfertigung eines Werkzeugs, wodurch man es sogleich mechanisch prüfen kann, ob ein Stift, welchen man auf eine Ebene gesetzet hat,

perpendikular darauf stehe oder nicht, und welches viel bequemer als ein gemeiner Winkelhaken zu gebrauchen ist. Man setze Fig. 170 an einen gemeinen Winkelhaken ABD noch einen Schenkel BC. Dieser Schenkel BC kann unter einem beliebigen Winkel angesetzet werden, nur nimmt man ihn gerne etwas groß, so daß der Winkel CBD, unter welchem er angesetzt ist, sich doch einem rechten Winkel nähere. Wird nun dieses Werkzeug auf eine Ebene gesetzet, so daß die Schärfen BD und BC beyde in die Ebene fallen, und AB an dem Stift lieget, so steht die Linie AB nach dem vorhergehenden Paragraphen auf der ganzen Ebene unter einem rechten Winkel, weil sie auf den Linien BD und BC unter einem rechten Winkel steht, denn die stehenden Winkel ABD und ABC sind beyde rechte Winkel. Man kann durch Hülfe dieses Werkzeuges einen Perpendikel auf einer Ebene prüfen, wenn man es daran hält, oder auch darauf setzet. Man trift es zuweilen bey den Tischlern an, die es sehr nützlich gebrauchen können.

Fig. 170.

§. 264. Daß sich auf einen Punkt B in einer Ebene Fig. 169 nur ein Perpendikel ziehen lasse, scheint schon von selbst aus obigen Betrachtungen zu folgen. Denn wenn würklich AB senkrecht auf der Ebene FFGD steht, und man wollte nun noch auf den Punkt B ein anderes Perpendikel ziehen, so müßte das nothwendig von AB verschieden seyn, und müßte mit AB bey B einen Winkel machen,

Fig. 169.

machen, also sich auf der einen Seite nach der Ebene mehr neigen als AB. Es mag mal dieses andere Perpendikel KB seyn. Dieses macht mit AB den Winkel ABK. Ist nun ABC nach der Voraussetzung ein rechter Winkel, so müßte, wenn KB noch ein Perpendikel auf dem Punkt B wäre, auch KBC ein rechter Winkel seyn, welches aber nicht seyn kann, weil ihm zum rechten Winkel noch der Winkel ABK fehlt. Gleichfalls geht es auch nicht an, daß man von einem Punkt A außer der Ebene mehr als ein Perpendikel AB auf die Ebene setze. Denn man nehme dazu, welche Linie man wolle, nahe oder ferne von AB, wie wir zum Exempel hier die AG nehmen wollen, so läßt sich doch allezeit von dem Berührungspunkte G eine Linie in der Ebene nach dem Punkte B ziehen. Dadurch erhielte man nun einen Triangel AGB. Nun soll AB ein Perpendikel von dem Punkte A auf der Ebene seyn, und AG soll es auch seyn, also wäre ABG ein rechter Winkel, und AGB auch ein rechter Winkel, also befänden sich in dem Triangel AGB zwey rechte Winkel, welches nicht seyn kann, weil nach §. 93 in jedem Triangel nur ein rechter Winkel statt findet.

§. 265. Dieses Perpendikel AB ist auch ferner die kürzeste Linie, welche von dem Punkte A nach der Ebene FEGD kann gezogen werden. Denn weil bey B ein rechter Winkel ist, wird jede Linie, die von A noch nach der Ebene gezogen wird, die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks

ecks vorstellen, wovon AB eine Seite ist. Nun ist nach §. 94 die Hypotenuse allezeit länger als eine der andern Seiten eines rechtwinklichten Triangels. Da AB oder der Perpendikel auf der Ebene von einem gegebenen Punkte A allezeit die kürzeste Linie ist, so ist sie auch die wahre Entfernung des Punkts A von der Ebene, weil jede kürzeste Linie die Entfernung einer Sache von einer andern anzeiget.

Fig. 154. §. 266. Wir wollen nun Fig. 171 zwey Linien auf eine Ebene stellen, welche einander parallel seyn sollen, und es soll eine von diesen Linien, die AB, senkrecht auf dieser Ebene stehen, wir behaupten alsdenn, daß auch die andere Parallele CD auf dieser Ebene senkrecht stehen wird. Oder damit wir diesen Satz mathematisch vortragen: Wenn Fig. 171 AB auf der Ebene LMNO senkrecht steht, und man zieht durch einen Punkt D, welcher in dieser Ebene LMNO sich befindet, mit der AB eine Parallellinie CD, so wird auch diese CD auf der Ebene LMNO senkrecht stehen. Der Satz fällt schon von selbst in die Augen, allein wir müssen, um geometrisch zu verfahren, ihn doch gehörig beweisen. Wir haben angenommen, AB steht senkrecht auf der Ebene, und CD sey seine Parallele. Wenn wir nun beweisen können, daß CD auf zwey Linien in dieser Ebene durch den Punkt D gezogen senkrecht stehe, so ist es auch nach §. 262 richtig, daß CD auf der ganzen Ebene senkrecht stehe, und unser Satz ist alsdenn bewiesen.

Es

Es sey CD mit der Linie AB, die senkrecht auf der Ebene LMNO steht, parallel durch einen Punkt D in der Ebene gezogen. Von dem Berührungspunkt B ziehe man eine gerade Linie BD, welches sich wird thun lassen, weil beyde Punkte B und D in einer Ebene oder Fläche liegen. Nun gedenke man sich, es sey durch die Linien AB und CD eine Ebene gelegt, welches auch angeht, indem sich ja eine Ebene um AB so lange drehen läßt, bis sie durch CD geht. Dieses sey nun die Ebene beyder Parallelen AB und CD. Sie wird die Ebene LMNO in der Linie BD erreichen. Nun ziehe man noch die Linie AD. Diese muß nun in der Ebene der Parallelen AB und CD liegen. In der Ebene LMNO setze man ferner die Linie DE auf die BD senkrecht, welches sich auch thun lässet, und mache diese DE so lang als AB, und ziehe alsdenn noch die BE. Man erhält dadurch zwey Triangel ABD und BDE, welche einander **kongruent** sind, also sich decken.

Denn AB = DE nach der Construktion.
der Winkel ABD = BDE = R nach der Constr.
BD = BD

△ABD ≅ △BDE weil zwey Linien und der eingeschlossene Winkel in beyden gleich sind

folglich ist alsdenn AD = BE.

Man ziehe nun ferner die Linie AE. Hiers durch erhält man, daß nun auch der Triangel AEB dem Triangel AED kongruent wird, und beyde sich also decken.

Denn AB = DE nach der Construktion aus dem vorhergehenden

AD = BE wie eben erst bewiesen

AE = AE

△AEB ≅ AED nach §. 54.

Ist das aber, so sind auch die Winkel, die auf einander passen, gleich. Folglich da AB senkrecht auf der Ebene steht, und also ABE = R, so muß auch ADE = R seyn. Denn wenn beyde eben gemeldete Dreyecke auf einander gelegt werden, so kommen diese Winkel auf einander. Ist aber ADE ein rechter Winkel, und BDE auch einer, weil man DE auf BD unter einem rechten Winkel gezogen hatte, so steht die Linie DE auf zwey Linien, BD und AD senkrecht, diese sind in der Ebene der Parallelen AB und CD, also steht DE auf der Ebene der Parallelen senkrecht, also ist CDE ein rechter Winkel. Da CD und AB parallel sind, so muß CDB + ABD = 2 Rektis seyn, aber ABD ist = Rekto, weil AB senkrecht auf der Ebene steht, also muß auch CDB = Rekto seyn. Folglich da nun CDB = Rekto, und auch CDE = Rekto, so steht CD auf dem Durchschnitt zweyer Linien auf beyden unter einem rechten Winkel, folglich nach §. 262 auf der ganzen Ebene senkrecht. Und dieses war es, was wir

bes.

beweisen wollten. Wir haben diesen Beweis etwas weitläuftig gemacht, um recht deutlich zu seyn, man sieht sonst leicht ein, daß er sich sehr kurz fassen lässet.

§. 267. Es ist leicht begreiflich, daß also auch dieser Satz verkehrt genommen wahr seyn müsse; nemlich zwey gerade Linien AB und CD, welche auf einer Ebene LMNO senkrecht stehen, sind parallel. Denn wenn mit der senkrechten AB eine Parallele durch den Punkt D gezogen wird, so steht die nach vorhergehendem §. senkrecht auf der Ebene, also muß eine senkrechte Linie durch D parallel mit AB seyn.

§ 268. Aus diesem, was wir nun bisher vorgetragen haben, können wir nun die Aufgabe geometrisch auflösen, welche wir §. 263 schon mechanisch vortrugen, nemlich Fig. 172 von einem Punkte A, außer der Ebene LMNO, auf diese Ebene ein Perpendikel zu ziehen, und auch umgekehrt, aus einem gegebenen Punkte P in der Ebene LMNO ein Perpendikel aufzurichten. Fig. 172.

1) Wollen wir aus dem gegebenen Punkte A außer der Ebene den Perpendikel auf die Ebene fällen. Wir werden dieses also bewerkstelligen. Man ziehe in der Ebene LMNO eine Linie DE, wie man wolle; auf diese DE lasse man aus dem gegebenen Punkte A die AC senkrecht fallen, nemlich so, daß ACE = ACD also rechte Winkel sind; auf den Punkt C in der Linie DE setze man

die CH rechtwinklicht, aber ohne bestimmte Länge.

In dieser Ebene, wo nun, wie man einsehen wird, ECH und DCH sich gleich, also rechte Winkel sind, ziehe man aus dem gegebenen Punkte A auf diese Linie CH die AB rechtwinklicht, nemlich man lasse nur aus A ein Perpendikel auf diese Linie CH herab, welches sie einerwärts, hier in B, treffen wird. Wir behaupten, daß, wenn man also verfähret, die AB nicht nur auf der Linie CH, sondern auf der ganzen Ebene rechtwinklicht stehe. Dieses letztere müssen wir nun beweisen, und es wird unser Beweis darauf ankommen, daß wir zeigen, daß durch solches Verfahren die AB auf zwey in dieser Ebene durch den Punkt B gezogenen Linien senkrecht stehe, denn alsdenn steht sie nach §. 262 auf der ganzen Ebene senkrecht.

Man ziehe, um dieses zu beweisen, durch den Punkt B die Hülfslinie GF, und zwar parallel mit DE. Nun ist ECA ein rechter Winkel nach unserer Construktion, und ECH auch ein rechter Winkel nach unserer Construktion. Wenn man also ABC als eine Ebene betrachtet, so muß die Linie DC darauf senkrecht stehen nach §. 262. Weil FB parallel mit dieser EC ist nach unserer Construktion, so muß auch FB senkrecht auf der Ebene ABC stehen nach §. 266. Steht aber FB senkrecht auf der Ebene ABC, so müssen die Winkel ABF und ABC rechte Winkel seyn nach dem §. 262. Sind das aber rechte Winkel, so steht auch

also AB auf diesen zwey Linien BC und BE in der Ebene LMNO senkrecht, also auf der ganzen Ebene senkrecht.

II) Soll man aus einem geaebenen Punkte P in der Ebene ein Perpendikel PQ aufrichten, so fälle man von einem außer der Ebene angenommenen willkührlichen Punkte A ein Perpendikel AB auf diese Ebene nach der eben gelehrten Weise, und ziehe mit dieser AB durch den Punkt P in der Ebene die Parallele PQ, so steht auch diese durch den Punkt D auf der Ebene senkrecht nach dem §. 266, und des Verlangen ist erfüllet. Daß aus einem Punkte A nicht zwey Lothrechte, etwa AB und AC, auf einer Ebene können aufgerichtet werden, folgt schon daraus, wie wir auch schon erwähnet haben, weil es sonst in dem △ABC zwey rechte Winkel gäbe, indem man doch allezeit, wenn von A noch ein ander Perpendikel auf die Ebene fallen könnte, diese beyden Perpendikel durch eine Linie in der Ebene zusammen ziehen könnte, und alsdenn einen Triangel bekäme, der zwey rechte Winkel hätte, welches wider den 93 §. ist und nicht seyn kann.

§. 269. Man siehet also hieraus, daß, da keine andere Linie aus dem Punkte A als die Linie AB auf der Ebene senkrecht seyn kann, die AC nur auf der Linie DE senkrecht ist. Wenn man also aus A ein Perpendikel AB auf die Ebene herabläßet, und aus eben dem Punkt A ein Perpendikel AC auf die Linie DE, und denn

die Punkte C und B zusammen zieht, so ist CB allezeit auf der Linie DE senkrecht. Denn wäre sie es nicht, so müßte es eine andere Linie seyn, z. E. die CR, und auf die müßte denn auch die AB sich senkrecht fällen lassen, weil alsdenn ACR in einer Ebene wären, denn ließen sich aber aus A zwey Perpendikel fällen, welches wider den vorigen Paragraphen und nicht möglich ist. Eben so ist es auch richtig, wenn AB auf der Ebene senkrecht steht, und eine Linie aus B nach DE gezogen ist. Die BC steht auch auf DE senkrecht, so muß auch die AC auf DE senkrecht stehen, nemlich ACD = ACE = Rekto, weil, wenn das nicht wäre, sich sonst gleichfalls zwey Perpendikel aus A auf die Linie DE fällen ließen, welches aus eben den obigen Gründen nicht möglich ist.

§. 270. Wir haben in dem vorhergehenden Paragraphen von zwey Linien geredet, welche sich auf einer Ebene befanden, und einander parallel waren, und wo sich durch diese zwey Linien eine Ebene legen ließ. Wir wollen aber nun mal drey Linien nehmen, und sie nicht in einer Ebene legen, sondern in zwey verschiedenen, und wir behaupten

Fig. 171. alsdenn den Satz Fig. 171: zwey gerade Linien, AB und CD, die mit einer dritten GE parallel sind, sind auch unter einander parallel, wenn sie auch nicht alle drey in einer Ebene liegen. Daß sie unter obigen Bedingungen parallel mit einander sind, wenn sie in einer Ebene liegen, lehrten uns

schon

schon die Sätze von den Parallellinien, denn die lagen alle in einer Ebene. Aber der Satz ist auch richtig, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. Man kann sich dieses recht deutlich vorstellen, wenn man drey Drathstifte auf einem Tisch, unter welchem Winkel man will, einsteckt, so daß zwey einem dritten Stifte parallel sind. Hier in der Figur erscheinen sie senkrecht auf der Ebene LMNO.

Wir führen nun den Beweis unsers Satzes, um völlig geometrisch zu verfahren. Es soll GE die Linie seyn, mit welcher die AB und die CD parallel läuft, um die Ebene LM bekümmern wir uns jetzt noch nicht, die soll nicht da seyn. Weil CD mit EG parallel läuft, so wird sich dadurch eine Ebene CDEG legen lassen, in dieser Ebene ziehe man die ED auf EG senkrecht, also, daß GED = Rekto ist, welches allerdings angeht. Weil ferner AB auch mit EG parallel läuft, so lege man da auch eine Ebene ABEG durch, und ziehe in dieser Ebene auch die EB auf die GE senkrecht, so daß GEB also auch ein rechter Winkel ist. Man ziehe nun B und D zusammen, und lege durch die drey Punkte BDE eine Ebene LMNO, welches sich nur mit einer Ebene thun läßt, weil drey Punkte ihre Lage bestimmen §. 258. Nun ist EG senkrecht auf dieser Ebene, weil GED und GEB rechte Winkel sind §. 262, aber AB und CD sind ihr parallel, also nach §. 266 auch senkrecht auf dieser Ebene, also, da sie beyde darauf senkrecht stehen, müssen sie auch einander

nach §. 267 parallel seyn, welches wir beweisen wollten.

§. 271. Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch einen nützlichen Lehrsatz berühren, welcher uns in der körperlichen Geometrie Dienste leisten kann. Wenn Fig 173 man in der Ebene LMNO ein Perpendikel AC aufrichtet, und um den Punkt C, wo es die Ebene berührt, eine Cirkellinie BDE beschreibt, so mag man einen Punkt in der Perpendikularlinie AC nehmen, welchen man will, hier soll es der Punkt A seyn, er wird von allen Punkten des Umkreises EBD gleich weit entfernt seyn. Wir wollen hier zwey Punkte in dem Umkreise B und D willkürlich annehmen, und hievon es beweisen, man wird sehen, daß sich der Beweis auf alle mögliche Punkte in der Cirkellinie anwenden läßt. Wir wollen nach B und D die Radios CB und CD ziehen, und aus A auf B und D die Linien AB und AD fallen lassen. Wir behaupten, daß die beyden dadurch entstandenen Triangel ACB und ACD und alle auf die Art entstehende Triangel kongruent sind, und daher $AB = AD$. Der Beweis ist sehr leicht. Denn

Fig. 173.

$BC = CD$ weils Radii eines Cirkels
$AC = AC$
der Winkel $ACB = ACD = R$ weil AC senkrecht auf der Ebene steht.

$\triangle ACB \cong \triangle ACD$

also

also AB = AD, und also A von B und D gleich weit entfernt, weil AB und AD die Entfernungen des Punktes B und D von dem Punkte A sind.

§. 272. Wir haben senkrecht auf einer Ebene stehende Linien, und auch Parallellinien, die schief und senkrecht auf der Ebene stehen konnten, betrachtet, wir wollen nun noch Linien betrachten, die mit einer gegebenen Ebene parallel laufen. Es ist aber Fig. 174 eine gerade Linie AB, welche mit einer Ebene LMNO parallel läuft, eine solche, welche die Ebene niemals erreicht, man mag die gerade Linie AB verlängern, und die Ebene vergrößern, wie man will. Diese Erklärung ist zureichend, wenn man überhaupt von der parallelen Lage einer Linie mit einer Ebene redet, aber die Stelle und Richtung der parallelen Linie AB ist dadurch noch nicht bestimmt. Um ihre Richtung zu bestimmen, muß eine Linie CD in der Ebene LMNO gegeben seyn, in der sich unendlich viel Linien nach unendlich vielen Richtungen ziehen lassen, und um ihre Stelle zu bestimmen, muß ein Punkt A gegeben seyn, oder angenommen werden, wodurch die Parallellinie AB gehen soll. Wenn das geschehen ist, so kann man sehr leicht eine Parallellinie mit CD ziehen, und es ist auch sehr leicht zu beweisen, daß diese mit CD parallele Linie AB auch mit der ganzen Ebene LMNO parallel sey, und nie mit ihr zusammen kommen könne. Man lege durch die Linie CD und durch den Punkt A, wodurch die Paralle-

Fig. 174.

le AB geben soll, eine neue Ebene, ihre Lage wird durch die drey Punkte CDA vollkommen bestimmt. Denn ziehe man in dieser Ebene, worinn also nun auch die CD liegt, die AB mit CD parallel, auf die bey den Parallellinien gelehrte Art. CD liegt nun in beyden Ebenen ABCD und LMNO, weil sie in ihrem Durchschnitt liegt. Nun ist es gewiß, AB und CD bleiben allemal in einer Ebene, weils beständig gerade Parallellinien bleiben, man mag sie verlängern, wie man will. Sollte nun also die AB die Ebene LMNO je erreichen, so müßte es in einem Punkte geschehen, der beyden Ebenen gemeinschaftlich wäre. Allein beyde Ebenen haben keinen gemeinschaftlichen Punkt mit einander, als in ihrer Durchschnittslinie nach §. 260, aber da können auch AB und CD nicht zusammen kommen, sonst blieben sie nicht parallel. Es kann daher die AB die Ebene LMNO niemals erreichen, und folglich ist sie ihr parallel.

§. 273. Wir haben eine Linie betrachtet, die außer einer Ebene lag, und einer in der Ebene befindlichen Linie, und zugleich mit der Ebene selbst parallel war. Wir wollen nun zwey Linien Fig. 175 in einer Ebene LMNO unter einem Winkel zusammen setzen, die beyden Linien mögen AB und BC seyn, also der Winkel, den sie einschließen, ABC. Außer dieser Ebene liegen zwey andere Linien in einer andern Ebene, ab und bc, die auch zusammen kommen, und einen Winkel abc ausmachen, mit denen Linien in der Ebene

LMNO

LMNO parallel, also daß ab parallel AB, und bc parallel BC, unter dieser Bedingung werden auch die Winkel ABC und abc gleich groß seyn. Man pflegt dieses durch folgenden Lehrsatz auszudrücken. Wenn zwey Winkel ABC und abc nicht in einer Ebene liegen, und ihre Schenkel AB und ab, CB und cb, die in Absicht der durch die Spitzen beyder Winkel gezogenen geraden Linie Lb nach einer Seite liegen, parallel sind, so sind die Winkel selbst gleich groß.

Der Beweis hieron ist ganz leicht. Man ziehe durch die Spitzen beyder Winkel die Linie Bb, nun mache man AB und ab gleich groß, die vorher nur parallel waren. Also es sey AB = ab, auf eben die Art verfahre man mit CB und cb, also es sey auch CB = cb, man ziehe nun Aa und Cc, imgleichen AC und ac.

Weil BC parallel und gleich ist bc, nach der Konstruktion, so sind auch die Linien Cc und Bb einander parallel und gleich nach dem §. 84, und also Cc parallel bB. Ferner weil auch AB parallel und gleich ab, so sind gleichfalls Bb und Aa einander parallel und gleich, nach eben dem §. 84, also auch aA = bB.

Folglich da Cc ∥ und gleich bB
und Aa ∥ und gleich bB

---

so ist auch Cc ∥ und gleich Aa.

Daher aber muß auch nach eben dem § ac ∥ und gleich AC seyn.

Also $BC = bc$, $AB = ab$ nach der Konstruktion
und $AC = ac$ aus der Demonstration

---

folglich $ABC \cong \triangle abc$, weil drey gleiche Linien einen Triangel bestimmen; also da sich diese beyde Triangel decken, so muß der Winkel $ABC =$ abc seyn, welches wir erweisen wollten.

§. 274. Wir redeten im §. 260 vorläufig davon, wie sich ein Paar oder mehrere Ebenen einander schnitten, und zeigten dabey, daß dieser Schnitt eine gerade Linie seyn müsse. Wenn sich nun ein Paar Ebenen einander schneiden, so müssen sie doch auch eine gewisse Neigung gegen einander haben, und diese Neigung, welche sie gegen einander haben, macht einen Winkel aus, welchen man den **Flächenwinkel** nennt. Es ist nun die Frage, welches dieser Winkel sey, und wie man ihn bezeichnet?

Fig. 176. Es mögen Fig. 176 ACGH und BEDF zwey Ebenen seyn, welche einander in der geraden Linie BD schneiden; in dieser geraden Linie BD nehme man einen Punkt l an, wo man will, und ziehe auf diesen Punkt l in der Ebene BDEF die Linie gl senkrecht, also daß $glB = R$; und in der Ebene ACGH ziehe man die nl auf eben diese Art senkrecht, so ist der Winkel nlg der Neigungswinkel oder Flächenwinkel beyder Ebenen gegen einander. Man mag nun diesen Punkt in der Durchschnittslinie beyder Ebenen annehmen,

men, wo man will, z. E. in m, in D, in B, so wird man doch, wenn man auf die Art verfährt, immer nur eben denselbigen Winkel bekommen. Denn die Schenkel aller dieser Winkel sind parallel, weil sie alle unter rechten Winkeln auf der BD stehen, und ob man schon durch jeden Winkel wieder eine neue Ebene legen könnte, und also die Schenkel der Winkel auf die Art in verschiedenen Ebenen zu liegen kämen, so sind sie doch auch daher, weil sie einander parallel sind, nach vorhergehendem § einander gleich. Da nun das in allen Punkten der Linie BD geschehen würde, so ist also dieses das bequemste Maas, die Neigungswinkel der Ebenen gegen einander zu bemerken. Man kann den Winkel, worunter sich beyde Ebenen schneiden, kürzlich durch die vier Buchstaben EDBH bezeichnen, wovon die beyden mittelsten an der Durchschnittslinie stehen. Stünde die Ebene EBDF auf ACGH senkrecht, so sieht man leicht ein, der Winkel EDBH oder der Winkel gln würde ein rechter Winkel seyn, also stünde gl auf ln senkrecht. Hier in der Figur ist es ein spitzer Winkel, und also würde der Winkel glh ein stumpfer Winkel seyn.

§. 275. Wir wollen nun einmal zwey Ebenen zeichnen, die auf einander perpendikular stehen sollen, und sehen, was wir durch ihre Betrachtung herausbringen. Es mögen Fig. 177 die Ebenen ABCD und EFGH auf einander senkrecht stehen. Es muß also nach unsern vorherge- Fig. 177.

gan-

gangenen Betrachtungen der Neigungswinkel lom, oder EHGA ein rechter Winkel seyn. Es steht also lo nicht nur auf der Schneidungslinie beyder Ebenen GH, sondern auf der ganzen Ebene senkrecht. Es wird dieses einem jeden gleich in die Augen fallen, wenn man sich nur an den Satz erinnert, daß eine Linie, die auf zwey in einer Ebene sich befindenden Linien senkrecht stehe, es auf der ganzen Ebene sey §. 262. Nun liegt GH in Ebene ABCD, und es ist lo darauf senkrecht gezogen. Auf mo steht auch die lo senkrecht. Das wird angenommen, denn sonst stünde die Ebene EFGH auf der ABCD nicht unter einem rechten Winkel, wie man doch hier haben will, oder vorausgesetzt hat. Da also lo sowol auf der GH, als auf der mo senkrecht steht, so steht sie es auf der ganzen Ebene.

§. 276. Wenn wir ferner diese Betrachtungen fortsetzen, so werden wir auch leicht einsehen, daß es gleichviel sey Fig. 177, wenn blos darauf gesehen wird, daß die Ebene EFGH auf der ABCD rechtwinklicht stehe, wie sie darauf stehe, und daß man daher durch die Linie lo, die auf der Ebene ABCD rechtwinklicht steht, unendlich viele Ebenen in unendlich verschiedenen Lagen legen könne, die doch alle rechtwinklicht auf der untern Ebene stehen. Denn wenn lo unverändert bleibt, und also auf der Durchschnittslinie und auf mo immer senkrecht steht, so mag man in Gedanken die Ebene EFGH um diese Linie

nie drehen, wie man will, der Winkel lom wird immer ein rechter Winkel bleiben, weil beyde Linien lo und mo gar nicht verändert werden, obschon der Winkel moH ab- und zunehmen kann, welcher uns aber hier nicht angeht. Es wird auf alle Fälle lo auf der Ebene ABCD perpendikular bleiben, denn sie steht auf zwey Linien mo und oH perpendikular, welche beyde in der untersten Ebene liegen §. 262.

§. 277. Man sieht auch hieraus, daß hieraus folgt, daß, wenn man Fig. 178 zwey oder mehr Ebenen GHIK und DCEF auf eine dritte LMNO perpendikular stellt, auch der Schnitt AB der beyden erstern Ebenen auf der Ebene LMNO perpendikular stehen werde. Allein man kann diesen Satz, der aus dem vorhergehenden schon in die Augen fällt, doch noch auf folgende Art beweisen. Es sey aufgegeben, daß man auf der Ebene LMNO aus dem Punkt B ein Perpendikel aufrichten solle, durch welchen Punkt der Schnitt CF der einen Ebene CDEF geht, welche auf LMNO senkrecht steht. Dieser Perpendikel AB muß nothwendig in die Ebene DCEF fallen, denn sonst stünde diese Ebene nicht senkrecht auf LMNO, welches wir doch vorausgesetzt haben. Aber die andere Ebene geht gleichfalls durch den Punkt B. Denn da sollen sich beyde Ebenen schneiden, und steht nach der Voraussetzung auch senkrecht auf LMNO, also muß AB auch in diese Ebene GHIK fallen. Es ist Fig. 178.

also AB beyden Ebenen gemeinschaftlich. Ebenen aber, die sich einander schneiden, haben keine andere Linie gemeinschaftlich, als wo sie sich schneiden, also ist AB oder die Schneidungslinie selbst die Perpendikularlinie auf der Ebene LMNO durch den Punkt B. Die Wände eines Zimmers geben hier eine sehr sinnliche Erläuterung. Sie stehen auf dem Fußboden des Zimmers senkrecht, und die Linien, wo sie sich in den Ecken des Zimmers schneiden, stehen gleichfalls auf dem Boden des Zimmers senkrecht, wie leicht in die Augen fällt.

§. 278. Kaum würde es nöthig seyn, es zu erinnern, daß Ebenen von gleichen Neigungswinkeln in einander passen müssen, oder ganz in einander gelegt werden können und fallen müssen. Es mögen Fig. 179 der Ebenen ADBC, EFAD, und abcd, efad Neigungswinkel LOM und lom seyn. Es sollen diese Neigungswinkel einander gleich seyn. Man lege bey beyden Ebenen die AD an die ad, also daß der Punkt O auf o fällt, so muß auch LO auf lo fallen, weil beyde senkrecht auf AD und ad gezogen sind, oder weil LOD sowol als lod rechte Winkel sind, und da die Neigungswinkel dieser Ebenen gleich sind, so fällt auch auf die Art OM auf om. Wir haben also in den Ebenen ABDC und abdc drey Punkte, welche zusammen fallen, nemlich DOM und dom, also fallen diese beyden Ebenen zusammen. Eben so fallen auch die Ebenen EFAD und efad

Fig. 179.

zusammen, weil auch drey Punkte in ihnen zusammen fallen, nemlich DOL und dol, und drey Punkte die Lage der Ebene bestimmen.

§. 279. Wir tragen noch einige Betrachtungen über die Parallelebenen vor, und damit werden wir dieses Kapitel beschließen. Parallelebenen sind solche Ebenen, die dergestalt gegen einander liegen, daß sie nie zusammen kommen und sich schneiden können, man mag sie auch vergrößern, wie man will, und also beständig in allen Punkten einerley Entfernung gegen einander haben und behalten. Was übrigens diese Ebenen für eine Figur haben, darauf sieht man bey ihnen nicht, wenn blos von ihrer Lage die Rede ist. Eine Cirkelfläche kann einem Vierecke ganz parallel liegen, obschon die Cirkellinie eine krumme Linie ist, und der Umfang des Vierecks aus geraden Linien besteht. Die Oberfläche eines runden Tisches kann mit der Decke einer Stube ganz parallel stehen, und hindert daran die Figur nicht, wie denn das ein jeder leicht einsehen wird.

§. 280. Sind aber zwey Ebenen Fig. 180 ABCD und EFGH einander parallel, so wird eine gerade Linie NM, welche auf einer derselben ABCD perpendikular steht, auch auf der andern EFGH perpendikular stehen, und dieses ist ein untrügliches Kennzeichen, daß zwey Ebenen einander parallel liegen. Oder auch, wenn eine Perpendikularlinie NM auf einer Ebene ABCD Fig. 180.

aufgerichtet ist, und die andere Ebene EFGH ist also auf diese Linie NM gelegt, daß sie gleichfalls perpendikular darauf steht, so sind diese beyden Ebenen einander parallel. Der Beweis dieses Satzes wird nicht schwer einzusehen seyn.

Wir wollen durch das Perpendikel NM noch eine Ebene OPQR legen, diese wird nun nach dem 276sten § gleichfalls sowol auf ABCD als EFGH senkrecht stehen, weil nach unserer Voraussetzung NM, wodurch sie gelegt ist, auf beyden senkrecht steht. Diese Ebene OPQR wird die andern beyden nun irgendwo schneiden; es mögen diese Schneidungslinien OP und QR seyn, auch auf beyden Schneidungslinien muß die NM rechtwinklicht stehen, denn sie stand nach unserer Voraussetzung auf beyden Ebenen rechtwinklicht, und diese Schneidungslinien gehen durch die Punkte N und M, wo NM die Ebene berührt. Diese beyden Linien OP und QR sind also einander parallel, und können nach §. 279 nie zusammen kommen. Man mag nun aber diese Ebene OPQR um NM drehen, wie man will, so wird man wieder neue Schneidungslinien bekommen, von denen aber auch diese Betrachtungen gelten.

§. 281. Wäre NM zwar auf der Ebene ABCD perpendikular, aber nicht auf der Ebene EFGH, so wäre einer, entweder der Winkel MNQ oder MNP, spitzig und der andere stumpf, und nach der Seite, wo der spitze Winkel wäre, (wir wollen mal nach der Seite NP annehmen)

müßten

müßten also die Linien NP und MR endlich verlängert zusammen laufen, die Neigung dieses Winkels möchte so klein seyn, als sie wollte, und also würden auch nach der Seite die Ebenen zusammen laufen, weil beyde Linien NP und MR in ihren Ebenen bleiben. Da das bey Parallelebenen nicht seyn darf, so sieht man auch, daß durch den Punkt N nur **eine** Ebene mit ABCD kann parallel gelegt werden, weil sich nur **eine** Ebene durch den Punkt N legen läßt, die die Lage hat, daß NM sowol auf ihr, als auf ABCD perpendikular steht, wie wir eben gezeigt haben.

§. 282. Hieraus fließt natürlich die Folge, daß, wenn zwey Ebenen parallel einander liegen, und man zieht zwischen ihnen eine Linie NM, wo man will, welche auf der einen perpendikular steht, sie auch auf der andern perpendikular stehen müsse. Denn wäre das nicht, so wären die Ebenen nicht parallel, sondern würden verlängert sich irgendwo einander schneiden.

§. 283. Aus allem diesem kann man auch noch die Folge deutlich herleiten, daß, wenn zwey Flächen Fig. 181 P und Q einer dritten R parallel sind, auch beyde unter einander parallel seyn müssen. Denn wenn man auf Q einen Perpendikel setzt, so wird der auf R unter einem rechten Winkel gleichfalls zu stehen kommen, weil sie einander parallel sind §. 280. Da er auf R unter einem rechten Winkel steht, so wird er auch Fig. 181.

auf P unter einem rechten Winkel zu stehen kommen, weil auch die einander parallel sind. Er steht also sowol auf der Ebene Q unter einem rechten Winkel, als auf der Ebene P, folglich sind beyde Ebenen, die der dritten R parallel waren, auch unter einander parallel.

Fig. 182. §. 284. Wenn zwey Ebenen Fig. 182 ABCD und EFGH parallel sind, und es schneidet dieselben eine dritte Ebene IKLM, unter welcher Lage es auch sey, so sind die Durchschnitte BS und TV einander parallel. Es wird dieses schon aus den Eigenschaften der Parallellinien deutlich werden. Parallellinien sind solche, welche in einer Ebene sich befinden, und verlängert, wie man auch wolle, doch niemals zusammenlaufen. Daß die Durchschnitte ES und TV in einer Ebene liegen, ist klar, denn sie liegen beyde in der Ebene IKLM. Daß sie nie zusammenlaufen, wenn sie auch noch so sehr verlängert würden, folgt daraus, weil sie auch in den Ebenen ABKD und EFQH mit zugleich sich befinden. Würden sie zusammenlaufen, so müßten es diese beyden Ebenen auch thun, allein diese sind als parallel angenommen, folglich müssen auch nun die Schnitte BS und TV parallel seyn.

§. 285. Es folgt aber auch hieraus noch ferner, daß, wenn man zwischen zwey Parallelflächen ABCD und EFQH zwey Parallellinien, BT und VS, legt, diese auch gleich seyn werden.

den. Denn da man allezeit zwischen diese Parallellinien eine Ebene BSTV legen kann, so werden, wie wir im vorigen § sahen, ihre Schnitte mit den andern beyden Ebenen BS und TV parallel seyn. Ist das aber, so muß, weil BT und VS auch Parallelen sind, und nach §. 84 Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, BT = VS seyn, und eben daher folgt es denn auch, daß auch unter den Bedingungen BS = TV ist, weils auch Parallelen zwischen Parallelen sind.

§. 286. Solche parallele Ebenen Fig. 182 ABKD, EFGH, welche von einer dritten IKLM geschnitten werden, werden auch von dieser dritten Ebene unter gleichen Neigungswinkeln auf einer und eben der Seite der Ebene IKLM geschnitten, oder die Winkel NPQ und POW sind gleich. Es sind nach §. 284 die Durchschnittslinien BS und TV parallel. Man lege auf einen Punkt P der Durchschnittslinie BS ein Perpendikel NP, so nemlich, daß NPB = NPS rechte Winkel sind, dieser wird, in dieser Ebene verlängert, auch die andere Durchschnittslinie TU treffen, und auch, da er auf BS rechtwinklicht stand, und BS und TV Parallelen sind, auch darauf rechtwinklicht stehen nach §. 77. Fig. 182.

Man ziehe auf P in der Linie BS in der Ebene ABCD die QP auch unter rechtem Winkel, nemlich QPS = QPR = Rekto, und auf eben diese Art die OW. Das sind nun die beyden Neigungswinkel der beyden parallelen Ebenen gegen

die dritte, welche sie schneidet, nemlich NPQ und POW. Aber es ist PQ parallel OW, also auch die Winkel NPQ = POW. Das heißt hier, die Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die beyden Parallelen sind gleich.

Fig. 184. §. 287. Wenn Fig. 184 drey parallele Ebenen ABCD, EFGH, IKLM, zwey gerade Linien NS und OT schneiden, so werden diese beyden geraden Linien von den drey parallelen Ebenen in proportionale Theile zerschnitten, so daß also die Proportion gilt NP : PS = OR : RT, und alle andere Proportionen, wie es sich von selbst versteht, die aus dieser folgen.

1) Es mögen die beyden geraden Linien, welche von den drey parallelen Ebenen geschnitten werden, NS und OT seyn. Es mögen diese Linien nun gezogen seyn, wie sie wollen, auch mögen die Parallelebenen nahe oder weit von einander liegen, gleiche Entfernung unter einander haben oder nicht, daran ist nichts gelegen. Man ziehe die Punkte, wo beyde Linien in ABCD geschnitten werden, zusammen, und ziehe die Linie OS, man ziehe ferner die Linie ST in der Ebene IKLM, so bekömmt man zwey Dreyecke, NSO und OST. Da liegt nun das Dreyeck NSO in einer Ebene, und dieses Dreyeck wird durch die mittelste Ebene in PQ geschnitten, weil hier zwey parallele Ebenen, die Ebenen ABCD und EFGH, parallel sind, also müssen auch die Schnitte NO

und

und PQ parallel seyn. Da in dem Dreyecke NOS, NO und PQ parallel sind, so gilt die Proportion NP:PS = OQ:QS.

2) Hat man nun auch ST in der Ebene IKLM gezogen, so wird das Dreyeck OST, welches gleichfalls in einer Ebene liegt, in ST und QR, von den beyden untersten Ebenen geschnitten, und auch diese Schnitte sind parallel, weil hier wieder zwey parallele Ebenen eine dritte schneiden. Es gilt also auch bey dem Triangel OST die Proportion

$$OR:RT = OQ:QS.$$

Wir haben also nach I die Proportion

$$NP:PS = OQ:QS$$

und nach II $OR:RT = OQ:QS$

folglich gilt $NP:PS = OR:RT$.

Wie aus dieser Proportion noch mehrere hergeleitet werden, hat uns die Arithmetik gelehrt, und z. E. auch folgende Proportionen würden richtig seyn: $NS:PS = OT:RT$.

§. 288. Wir glauben das vornehmste in der Lehre von den Ebenen vorgetragen zu haben, und beschließen hiemit dieses Kapitel. Es wird kein einziger Satz darinn schwer seyn, wenn Anfänger ihrer Einbildungskraft durch körperliche Dinge, an einander gelegte Karten: oder Pappenblätter und steife gerade Drathstifte zu Hülfe kom-

kommen. Wir schmeicheln uns, die Figuren deutlich genug gezeichnet zu haben, um verschiedene Ebenen darnach legen zu können. Es werden uns diese Betrachtungen in den Lehren von den Ausmessungen und Vergleichungen der Körper unter einander sehr zu statten kommen, welche wir nun anfangen werden.

Das neunte Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über die Körper und ihre Oberflächen.

§. 289.

Die Gegenstände, mit deren Betrachtung wir uns bis jetzt beschäftigt haben, waren Linien oder Flächen, also Dinge, welche in die **Länge**, oder auch in die **Länge** und **Breite** zugleich ausgedehnt waren, aber ganz und gar keine Dicke hatten. Wir kommen nun zur Betrachtung solcher Dinge, welche nicht nur in die **Länge** und **Breite**, sondern auch in die **Tiefe** ausgedehnt sind. Das sind nun alle Körper, sie mögen klein oder groß seyn. Es ist ohne unser Erinnern bekannt, daß die Körper vielerley Eigenschaften besitzen, welche eine nachdenkende Betrach-

trachtung sehr verdienen. Allein auf alle diese Betrachtungen läßt sich die Geometrie nicht ein, sie sind ein Gegenstand des Naturkündigers. Die Geometrie betrachtet blos die Ausdehnung der Körper, oder den **Raum**, welchen sie einnehmen, also eigentlich in der That blos den **Raum** allein, und weiter nichts von ihnen.

§. 290. Die Gränzen der Körper sind ihre Oberflächen §. 3 und 4, oder die Körper sind in Oberflächen eingeschlossen. Diese Oberflächen sind entweder **eben**, oder sie sind **krumm**, oder **vermischt**. Diese Oberflächen können unendlich verschieden in ihren Lagen gegen einander seyn, und die gekrümmten Oberflächen können noch unendlich verschiedene Krümmungen haben, wie das einem jeden gleich einfallen muß. Nach den Absichten dieser Anfangsgründe können wir uns nur auf die Betrachtung der Körper mit ebenen Oberflächen, und bey den Körpern mit gekrümmten Oberflächen nur auf diejenigen einlassen, deren Krümmung sich auf den Cirkel gründet, so wie die erstern sich auf die gerade Linie gründeten. Wir werden also nur sehr wenig Körper zu betrachten haben, und die Elementargeometrie betrachtet auch nur sehr wenige. Wir fangen mit den Körpern an, deren Oberflächen Ebenen sind.

§. 291. Zwey Ebenen allein können keinen Körper oder Raum einschließen. Diese Betrachtung wird gleich auffallend seyn, denn sie

möchten liegen, wie sie wollen, parallel oder sich schneiden, so sieht man das bald ein. Aber auch drey Ebenen können noch keinen Körper einschließen. Eine leichte Betrachtung wird dieses deutlich machen, und da drey Ebenen noch keinen Raum einschließen können, so wird es alsdenn von selbst folgen, daß es von zwey Ebenen noch weniger möglich ist. Fig. 185. Es sey ACD eine Ebene. Man lege durch eine Seite dieser Ebene AD eine andere ABD, unter welchem Winkel man will. In dieser Ebene ABD ziehe man auch willkührlich eine gerade Linie AB, in dieser geraden Linie nehme man willkührlich einen Punkt an, B, und in der Linie AC auch willkührlich einen Punkt, C, und lege nun durch die drey Punkte A, B und C die dritte Ebene ABC, so erhält man nun zwar, daß um A herum ein Raum eingeschlossen wird, aber man hat denselben noch nicht von allen Seiten eingeschlossen, vorne bey BCD ist er noch offen. Wenn man aber durch die Punkte B, C und D die vierte Ebene legt, so ist ein Raum völlig begränzt, oder man hat einen in einer Ebene eingeschlossenen Körper.

Fig. 185.

§. 292. Die ebenen Flächen, welche einen Körper einschließen, als ABC, ABD, ACD, heißen seine **Seitenflächen**. Diese Seitenflächen müssen durch gerade Linien begränzt werden, als hier BA, DA, welches man die **Seitenlinien** nennt. Wenn diese Linien in einem Punkt zu-

zusammen laufen, welches bey Körpern, weil sie ganz mit Ebenen begränzt sind, allezeit geschehen muß, weil sie sonst nicht begränzt wären, so nennt man die Zusammenkommung solcher Seitenlinien eine **Ecke**, oder eine **solide Ecke**. So finden wir Fig. 185 bey A eine Ecke. Sie entsteht also, wenn man drey oder mehrere Winkel, als hier BAD, BAC und CAD also zusammensetzt, daß ihre Spitzen A zusammen laufen, und allezeit eine Seite AC des Winkels BAC mit der Seite des andern Winkels CAD zusammen hält, oder daß eine Seite AC allezeit zwey Winkeln gemeinschaftlich ist, und überhaupt alle die Flächen, worinn diese Winkel gezogen sind, sich gegen einander neigen. Man giebt daher folgende Erklärung einer **Ecke**. Eine Ecke oder ein körperlicher Winkel (angulus solidus) ist der Raum, der zwischen mehr als zwey Ebenen, die an einander liegen, an dem Punkte, wo sie zusammen kommen, enthalten ist. Man wird sich aus der Figur hievon schon einen deutlichern Begrif machen, und Ecken in Zimmern oder sonst an Körpern werden diesen Begrif genugsam erläutern.

§. 293. Die Seiten der hier gezeichneten Ecke sind Fig. 185 die Winkel BAC, CAD, DAB. Dieser Seiten können viel oder wenig seyn, nur nicht unter drey, weil wenigstens nach §. 291 drey Ebenen erfordert werden, um eine Ecke einzuschließen, und die Winkel in diesen Ebe-

nen

nen liegen. Nachdem nun eine Ecke viel oder wenig Seiten hat, nennt man sie eine dreyseitige vierseitige, fünfseitige ꝛc. Ecke.

§. 294. Eine eben so wichtige Betrachtung ist, daß alle diese Winkel einer Ecke zusammen weniger als vier rechte Winkel betragen müssen. Vier rechte Winkel machen einen Cirkel aus, und wären alle die Winkel einer Ecke vier rechten Winkeln gleich, so würden sie keine Ecke ausmachen, sondern in eine Ebene zusammen fallen. Man kann sich hievon gleich sinnlich überzeugen. Wenn man Fig. 186 einen Cirkel ABD in eine Ebene um einen beliebigen Mittelpunkt C zieht, und in demselben vier oder mehr Ausschnitte, ACB, BCD FCD, FCA macht, man wird alsdenn unmöglich diese Ausschnitte gegen einander neigen, und eine Ecke hervorbringen können. Wir übergehen den strengen Beweis hievon, weil der Satz selbst sinnlich sattsam genug in die Augen fällt, und schon daraus klar genug ist, daß vier rechte Winkel einen Cirkel ausmachen. Noch viel weniger wird sich eine Ecke daher konstruiren lassen, deren Winkel zusammen mehr als vier rechte Winkel wären, weil es nicht einmal von vier rechten Winkeln angeht.

Fig. 186.

§. 295. Diese in der That nur kurze Betrachtung der soliden Ecken mag zu unserm Vorhaben hinreichend seyn. Wir fahren in unsern allgemeinen Betrachtungen über die Körper weiter

ter fort. Da wir nach unsern Absichten keine Körper betrachten können, als solche, die in solche Ebenen eingeschlossen sind, die ihren Grund in der geraden Linie und dem Cirkel haben, und da wir von diesen nur die **nöthigsten** und **nützlichsten** betrachten wollen, so wird die Anzahl der Körper, die wir betrachten wollen, nur sehr klein seyn. Wir werden die Eigenschaften des **Prisma**, des **Parallelepipedum**, des **Cubus**, des **Cylinders**, der **Pyramide**, des **Kegels** und der **Kugel** untersuchen. Wir könnten auch noch wol die Eigenschaften der sogenannten **regulären** Körper untersuchen, allein der Nutzen davon würde nur sehr gering seyn. Wir wollen aber doch eine Erklärung davon geben. **Reguläre** Körper sind solche, davon die Seiten reguläre Polygonen, die alle einerley, alle gleich sind; davon alle Ecken aus gleich viel Seitenlinien bestehen, und alle gleiche körperliche Winkel machen. Man nennt sie auch die platonischen Körper. Es sind ihrer fünfe, und mehrere sind auch nicht möglich.

1) Das **Tetraedrum**. Dieses in vier gleichseitige Dreyecke eingeschlossen, an jeder Ecke kommen also drey Winkel zusammen, und weil der Winkel eines gleichseitigen Dreyecks $= 60^{\circ}$, so ist also der körperliche Winkel oder die Ecke des Tetraedri $= 3 . 60 = 180^{\circ}$.

2) Der **Cubus** oder Würfel. Er ist in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen, wo allezeit drey Winkel an einer Ecke zusammen kommen,

und

und weil jeder dieser Winkel = 90°, so ist der körperliche Winkel des Cubus = 3 . 90 = 270°. Man nennt diesen Köper auch das Hexaedrum, weil er sechs Seiten hat.

3) Das **Octoedrum** ist in acht gleichseitige Dreyecke eingeschlossen, wovon allezeit vier an einer Ecke zusammen kommen, und sein körperlicher Winkel ist daher 4 . 60 = 240°.

4) Das **Dodecaedrum** ist in zwölf reguläre und gleiche Fünfecke eingeschlossen, wovon allezeit drey in einer Ecke zusammen kommen, nun ist der Polygonwinkel des Fünfecks = 108°, also der körperliche Winkel des Dodecaedri 3 . 108 = 324°.

5) Das **Icosaedrum** ist in zwanzig gleichseitige und gleiche Dreyecke eingeschlossen, wovon allezeit fünfe in einer Ecke zusammen kommen, und sein körperlicher Winkel ist also 5 . 60 = 300°.

Es giebt nicht mehr reguläre Körper, und kann nicht mehr geben, weil, man möchte nun zu den Seiten der Polygone nehmen, welche man wollte, so würden außer diesen, wenn drey oder mehr Flächen zusammen stießen, allezeit die Ecke mehr als 360° haben, also in eine Ebene fallen, und keine Ecke formiren.

Wenn man sich hievon noch weiter unterrichten, auch sehen will, wie man die Ebenen zeichnet, und an einander hängt, woraus man diese regulären Körper verfertigen kann, welches man die Netze zu diesen Körpern nennt, so findet man dazu in vielen Schriften, auch in des Hrn.

von

von Wolffens Elementen, die gehörige Anweisung und Zeichnungen. Es ist für Anfänger angenehm, solche reguläre Körper, überhaupt alle, wovon wir reden werden, aus Pappen zu verfertigen, und gar nicht schwer.

§. 296. Wir betrachten nun erstlich das **Prisma** und einige seiner Eigenschaften. Man zeichne Fig. 187 und 188 in eine Ebene eine geradlinichte Figur ABCDE, von so viel oder wenig Seiten man will, die auch unter jeden beliebigen Winkeln an einander liegen können. Auf der Spitze eines dieser Winkel, hier sey es A, setze man nach Wohlgefallen eine gerade Linie AF, schief oder senkrecht, nur daß sie mit der ersten Figur **nicht** in einer Ebene liege. Mit dieser AF ziehe man durch alle Spitzen der geradlinichten Figur ABCDE Parallellinien. Diese, weil sie alle der AF parallel sind, werden auch unter sich parallel seyn nach §. 270. Nun kann man allezeit durch zwey dieser Parallellinien, als AF und BG, BG und CH u. s. w. eine Ebene legen. Diese Ebenen werden alle auf der Ebene ABCDE stehen, oder sie in den Linien AB, BC, CD, DE, EA schneiden. Sie werden sich selbst, da zwey von ihnen allezeit eine gemeinschaftliche Linie haben, auch in den Linien AF, BG, CH, DI, EK einander schneiden, und man hat nun einen begränzten Raum, der aber oben noch offen ist. Man nehme nun einen beliebigen Punkt F in der AF an, und lege dadurch

Fig. 187 & 188.

eine

neue Ebene mit der vorigen ABCDE parallel, welche so groß seyn muß, daß sie alle Seiten der aufrecht stehenden Ebenen berührt, oder alle diese Ebenen schneidet, so bekömmt man die Ebene FGHIK, und nun ist der Raum ganz begränzt, oder man hat einen Körper, welchen man ein **Prisma** nennt.

Man kann sich auch vorstellen Fig. 187 und 188, als wenn eine geradlinichte Figur FGHIK sich nach der Richtung einer geraden Linie AF herunter bewegt, und allerwärts Spuren ihres Daseyns nachgelassen hätte, so kann man sich auch die Entstehung eines Prisma vorstellen. Hier haben wir nun verschiedenes anzumerken.

§. 297. Wenn die Linie AF senkrecht auf der Ebene ABCDE steht Fig. 188, also auch alle ihre parallele BG, CH ꝛc. so heißt das **Prisma** ein **gerades Prisma**. Steht aber die Linie AF und die ihr parallele unter einem schiefen Winkel Fig. 187 auf der Ebene ABCDE, so heißt das **Prisma** ein **schiefes Prisma**.

§. 298. Ferner haben wir nun die Oberflächen des Primatis zu betrachten. Erstlich finden wir die Grundfläche ABCDE, auf welcher die andern Ebenen, welche das Prisma begränzen, aufgerichtet sind, ferner die Oberfläche FGHIK, welche die Figur schließt. Beyde diese Flächen sind einander völlig gleich und ähnlich, und können also beyde als Grundflächen betrachtet

tet werden. Sie sind aber einander daher gleich und ähnlich. Man hat die Ebene Fig. 187 und 188 FGHIK der Ebene ABCDE parallel gelegt nach §. 296. Nun werden beyde diese Ebenen durch eine dritte AFGB geschnitten, also sind nach §. 284 die Schnitte FG und AB parallel. Weil ferner auch FA und GB parallel gezogen sind, und Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, so ist AB = FG und FA = GB, und so kann man das, wie man auch leicht einsehen wird, von allen Seiten erweisen, also GH = BC, CD = HI u. s. w. Da nun Winkel, deren Schenkel parallel liegen, ob sie sich schon in verschiedenen Ebenen befinden, einander gleich sind nach §. 273, so müssen daher der Winkel ABC dem Winkel FGH, der Winkel BCD dem Winkel GHI, und überhaupt alle Winkel der obern Ebene den Winkeln der untern, so wie sie auf einander folgen, gleich seyn. Da nun auch die Seiten beyder Grundflächen, so wie sie auf einander folgen, einander gleich sind, wie wir eben gezeigt haben, so müssen die Grundflächen selbst einander decken, und also einander gleich und ähnlich seyn. Ließe man die Ebene FGHIK sich weiter in eben der Richtung herunter bewegen, oder hätte man sie tiefer, etwa durch L, mit der Grundfläche ABCDE parallel gelegt, so sieht man, daß eben die Betrachtungen und Beweise dafür gelten würden, denn wir nahmen die Länge der AF willkührlich an. Also **man mag das Prisma mit der Grundfläche parallel**

durchschneiden, wo man will, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche allezeit gleich und ähnlich, welches ein eben so merkwürdiger Satz als der erstere ist.

§. 299. Wir betrachten nun die andern Oberflächen des Prismatis, als Fig. 187 und Fig. 188 AFGB, BGHC u. s. w. Diese sind allezeit Parallelogrammen, und man wird bald daran einsehen, daß das nichts daran hindert, wenn auch schon die Grundflächen desselben noch so irreguläre Figuren sind. Denn wenn die Linien der Grundflächen, die einander entgegen liegen, gleich und parallel sind, oder wenn AB = FG und auch parallel, und AF = BG und parallel, so hat man doppelte Gründe nach §. 21, 82, daß die Figur AFBG ein Parallelogram seyn müsse, und also alle die Eigenschaften eines Parallelograms habe. Und so geht es mit jeder andern Seitenfläche, weil auch da alle unsere vorigen Beweise auf passen.

§. 300. Die Prismata haben so viel Seitenflächen, als die Grundflächen Seitenlinien haben, und daher bekommen sie auch ihren Namen, man hat daher **dreyseitige, vierseitige, fünfseitige, sechsseitige** 2c. Prismata, und man nimmt bey diesen Benennungen blos Rücksicht auf ihre Seitenflächen, und nicht auf die Winkel, die sie mit einander machen. Wie groß die Winkel sind, die die Seitenflächen der Grundlinie

nie mit einander machen, ist uns schon aus der Art, wie man die Winkel der sich schneidenden Ebenen mißt, bekannt. Die Fig. 187 und 188 sind fünfseitige Prismata, und Fig. 189 und 190, welche wir, um Anfängern Begriffe davon zu geben, gezeichnet haben, ist ein dreyseitiges, eins ein schiefes, das andere ein gerades. Fig. 189 & 190.

§. 301. Die Höhe eines Prismatis wird durch die Entfernung der einen Grundfläche von der andern gemessen. Ist das Prisma ein gerades, wie Fig. 188 und 190, so ist eine jede Seitenlinie das Maas der Höhe des Prismatis, denn sie steht auf beyden Ebenen senkrecht; ist das nicht, wie Fig. 187 und 189, so muß man die Entfernung der beyden Ebenen, welche die Grundflächen ausmachen, durch eine gerade Linie messen, welche auf beyden Ebenen perpendikular steht.

§. 302. Hat man zwey oder mehr Prismata, welche beyde von gleichen Höhen sind; welche beyde gleiche und ähnliche oder kongruente Grundflächen haben; bey welchen beyden die gleichnamichten Seitenflächen, das ist, diejenigen, welche die Grundflächen in gleichnamichten Seitenlinien schneiden, unter völlig gleichen Winkeln gegen die Grundflächen geneigt sind, so sind die Prismata gleich groß. Denn es fallen alsdenn die Grundflächen sowol als die Seitenlinien und Seitenflächen des Prismatum in einander, wenn man die Prismata selbst in Gedanken

in einander legt, und also müssen sie beyde gleich groß seyn, wie denn überhaupt dieses sehr leicht einzusehen ist.

§. 303. Wir haben die Prismata bis daher ganz allgemein betrachtet, wir wollen jetzt einige Arten besonders vornehmen. Wir können leicht gedenken, daß man auch vierseitige Prismata hat, deren Grundflächen also auch durch vier Seitenlinien begränzt werden. Es sollen nun diese Grundflächen Parallelogrammen seyn, wie Fig. 191. Fig. 191 ABCD und GHFE, so heißt ein solches Prisma ein **Parallelepipedum.**

Es kann dieses Parallelepipedum, so wie alle andere Prismata, gerade oder schief seyn. In Fig. 191 haben wir ein gerades gezeichnet, weil wir das schiefe jetzt nicht betrachten werden. Die Grundflächen können Rechtecke oder andere Parallelogrammen seyn. Sind es Rechtecke, so heißt das Parallelepipedum ein rechtwinklichtes Parallelepipedum. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ist also ein gerades Parallelepipedum, dessen Grundflächen ABDC, GHFE Rechtecke sind. Und dieses wollen wir jetzt vorzüglich betrachten.

§. 304. Ein solcher Körper, welchen wir Parallelepipedum nennen, ist nun allezeit in sechs Seiten, die beyden Grundflächen mit dazu gezählet, eingeschlossen, und diese sechs Seiten sind alle Parallelogrammen. Denn außer den beyden

Grund-

Grundflächen, welche nach der Erklärung Parallelogrammen sind, stehen noch vier Seitenflächen, auf jeder Linie der Grundflächen eine, welche auch nach dem allgemeinen Begrif der Prismatum Parallelogramme sind nach §. 299. Aber in solchem Parallelepipedum sind auch noch jede zwey Seiten, welche einander entgegen gesetzt sind, einander **gleich** und **parallel**. Von den beyden Grundflächen Fig. 191 ABCD und EFGH folgt dieses schon von selbst aus dem Begriffe des Prisma überhaupt nach §. 296, und von den andern Seitenflächen läßt es sich leicht erweisen. Wir wollen es von den Seitenflächen BCHE und ADGF zeigen, der Beweis kann mit einiger Veränderung leicht auf die andern beyden angewendet werden. Also 1) Parallelogrammum BCHE ist gleich Parallelogrammum ADGF. Denn weil GHFE ein Parallelogram ist, so ist GF gleich und parallel der HE, §. 83 und 84. Nun ist ferner auch HB gleich und parallel der GA, weil das für jedes Prisma wahr ist nach §. 298.

Es muß also auch der Winkel EHB = dem Winkel FGA seyn, weil ihre Schenkel parallel sind, und sie in zwey Ebenen liegen nach §. 273. Da nun noch die Schenkel gleich sind, so müssen sich nicht nur die Winkel, sondern auch ihre Schenkel einander decken. Das kann man von allen Winkeln und Seitenlinien dieser beyden Parallelogrammen auf eben die Art zeigen. Sie sind daher gleich groß, und decken sich einander. 2) Sie sind aber auch einander parallel. Denn

beyde Ebenen, sowol BCHE als DGHF, gehen durch Linien, die einander parallel sind, weil EH parallel GF, und BC parallel AD, und hiedurch lassen sich keine Ebenen in einer andern Lage legen.

§. 305. Man wird es bald einsehen, daß, wenn nun eine der Grundflächen GHFE oder ABCD rechtwinklichte Vierecke sind, und der Körper gerade ist, nemlich, daß seine Seitenlinien rechtwinklicht auf der Grundlinie stehen, daß alsdenn alle Seitenflächen auch rechtwinklichte Vierecke seyn müssen, und da alle entgegen gesetzte Seitenflächen einander gleich und parallel sind, so wird man, welche Seitenflächen man will, die einander entgegen gesetzt sind, zu Grundflächen annehmen, und von allen Seitenflächen eben die Betrachtungen anstellen können, welche wir anstellten, wenn wir ABCD und GHFE als Grundflächen annehmen. Die Höhe des Parallelepipedum ist eben, wie bey einem jedem Prisma, die Entfernung seiner beyden Grundflächen von einander, und beym rechtwinklichten Parallelepipedo Fig. 191 kann daher jede Seitenlinie, als BH, oder auch AB, als die Höhe betrachtet werden, weil man jedes Paar seiner entgegen gesetzten Seitenflächen als Grundflächen betrachten kann. Das, was wir im §. 298 und §. 302 von dem Prisma überhaupt gesagt haben, gilt auch vom Parallelepipedo, weil es eine Art des Prismatis ist, wie denn dieser Satz ungemein leicht in die Augen fällt.

Fig. 191.

§. 306.

§. 306. Wir wollen zu den Grundflächen eines viereckten Prismatis Fig. 192 ein rechtwinklichtes Viereck ABCD, EFGH beybehalten, aber es sollen diese rechtwinklichte Vierecke vollkommene Quadrate seyn. Wir wollen ferner auf die Seitenlinien dieser Quadrate rechtwinklichte Parallelogrammen aufrichten. Da die Seiten oder Höhen derselben HB, FA ꝛc. gleich sind einer Seite der Grundflächen, so erhalten wir auf die Art, daß alle Seitenflächen dieses Körpers auch Quadrate werden, welche gleich groß als die Quadrate der Oberflächen sind, und wir bekommen also einen Körper, der in sechs gleich große Quadrate eingeschlossen ist, und ein solcher Körper heißt ein **Cubus** oder ein **Würfel**. Daß man, welche zwey entgegen gesetzte Seiten man will, zu Grundflächen machen kann, weil sie einander parallel und gleich groß sind, folgt schon aus den Betrachtungen vom Parallelepipedo, weil der Würfel in der That ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ist, das von sechs gleich großen Quadraten eingeschlossen wird. Da ferner die Größe eines Quadrats durch die Größe einer seiner Seiten bestimmt wird, und jede Seitenlinie des Würfels auch seine Höhe ausmacht, weil seine Seitenlinien senkrecht auf der Grundfläche stehen, so werden die Würfel gleich groß seyn, welche gleich große Seitenlinien haben. Und bey zwey ungleichen Würfeln wird der der größte seyn, dessen Seitenlinien am größten sind. Wie denn überhaupt alles dieses leicht einzusehen ist. Fig. 192.

§. 307. Wir haben §. 219 gesehen, daß man den Cirkel als ein reguläres Polygon von unendlich vielen, oder sehr vielen Seiten betrachten könnte. Wenn man also die Grundflächen eines Prisma von unendlich vielen Seiten machte, und auf diesen Seiten die Ebenen aufrichtete, welche den Raum umschlössen, so hätte man auch einen prismatischen Körper, und weil alle Seitenflächen eine unendlich kleine Breite hatten, so könnte man sie alle als in einer Rundung liegend sich vorstellen, und man hätte den Körper, welchen man den **Cylinder** oder die **Walze** nennt, und welcher aus diesen Ursachen zu den prismatischen Körpern mit kann gerechnet werden. Wir wollen nun diese Betrachtungen etwas weitläuftiger ausführen. Anstatt des **Unendlichecks** wollen wir zwey Cirkel Fig. 193 und 194 zu den Grundflächen nehmen, sie mögen ABCD und EFGH seyn. Diese beyden Cirkelebenen sollen ferner gleich seyn, und parallel liegen, ihre Mittelpunkte mögen K und I seyn. Diese Mittelpunkte K und I wollen wir durch eine gerade Linie zusammen ziehen. Nun wollen wir ferner in die Umkreise der beyden gleich großen parallel liegenden Cirkel AC und EG eine krumme Oberfläche dicht anbeugen, und zwar so durchaus gleich gerade in der ganzen Länge, um welche Länge beyde Oberflächen von einander entfernt sind, daß eine gerade Linie, welche man mit der KI parallel zieht, ganz in diese krumme Oberfläche falle, so hat man einen Cylinder oder Walze.

Fig. 193 & 194.

Ein

Ein durchaus gleich dick und schlicht gedrehetes Stück Holz, dessen beyde Köpfe auch gerade gedreht sind, stellt einen Cylinder vor. Wenn diese Begriffe noch nicht deutlich genug sind, so werden sie es wol dadurch werden, wenn man sich eine Art gedenkt, wie ein Cylinder entstehen kann. Man stelle sich ein Parallelogram KClG vor, welches sich um eine seiner Seiten Kl herum bewegt, so daß Kl immer unbeweglich an seiner Stelle bleibt, aber daß die andern drey Linien in allen Punkten Spuren ihres Daseyns zurücklassen, so sieht man die mögliche Art der Entstehung eines Cylinders sehr deutlich.

§. 308. Ein Cylinder kann nun, eben wie das Prisma, ein gerader und ein schiefer Cylinder seyn. Es ist ein gerader Cylinder, wenn die Linie, wodurch die Mittelpunkte der beyden parallel liegenden cirkelförmigen Oberflächen zusammen gezogen sind, auf denselben senkrecht steht, so daß Fig. 193 lKC oder KlG rechte Winkel sind. Er ist schief, wenn Fig. 194 lKC oder KlG schief sind. Von dem geraden Cylinder Fig. 193 werden wir nun vorzüglich in diesen Anfangsgründen handeln. Man nennt die Linie Kl, welche die Mittelpunkte beyder cirkelförmigen Grundflächen zusammen zieht, die Axe des Cylinders.

§. 309. Wir sagten §. 298 von dem Prisma überhaupt, daß, wenn es von einer Ebene

mit seinen Grundflächen parallel geschnitten würde, die Durchschnittsfigur den Grundflächen gleich und ähnlich seyn würde. Eben dieses gilt auch vom Cylinder, er sey gerade oder schief. Es sollen Fig. 193 und 194 diese Cylinder durch eine Ebene NM mit den Grundflächen parallel geschnitten werden, und die Durchschnittsfigur NM wird ein Cirkel seyn, der eben so groß ist, als ein Cirkel der beyden Oberflächen ist. Der Beweis hievon wird nicht schwer seyn. Man nehme in einer Peripherie der Grundflächen einen Punkt an, welchen man wolle, es mag hier C seyn. Man ziehe aus dem Mittelpunkte der Oberfläche K nach C eine gerade Linie KC. Weil die Peripherie der Grundfläche eine Cirkellinie ist, so ist KC ein Radius. Man ziehe durch den Punkt C eine Linie CG mit der Axe des Cylinders KI parallel. Diese wird ganz in der gekrümmten Oberfläche des Cylinders liegen nach §. 308, und wird die Cirkelperipherie der untern Grundfläche einerwärts in G erreichen. Wenn man von dem Mittelpunkte der untern Cirkelperipherie I abermals eine Linie IG nach diesem Punkte G zieht, so ist IG abermals ein Radius, der mit KC völlig gleich ist, weil beyde Grundflächen gleich groß sind. Er liegt auch mit KC parallel, weil beyde Grundflächen, imgleichen auch KI und CG nach der Konstruktion parallel liegen. Es ist daher auch KCIG ein Parallelogram, §. 83 und 84. Dieses Parallelogram wird nun durch die schneidende Ebene NM gleichfalls

falls geschnitten, und der Schnitt, wo sie sich schneiden, LM, ist eine gerade Linie nach §. 260. Der Punkt M muß in der Linie CG liegen, weil diese Linie ganz in der gekrümmten Oberfläche lag, und also auch in dem Umkreise der schneidenden Ebene NM. Es ist aber nun ferner LM der KC parallel, weil die beyden Ebenen AC und NM nach der Voraussetzung parallel sind, und es ist auch LM gleich KC, weil Parallelen zwischen Parallelen gleich groß sind.

Man mag nun den Punkt C in der Peripherie der Grundfläche annehmen, wo man will, so gilt dieser Beweis, weil der Punkt K dadurch ganz unverändert bleibt, also wird auf alle Fälle bey allen Peripheriepunkten der schneidenden Ebene LM so groß, als KC, oder = Radio der obern Grundfläche seyn. Da M allezeit in dem Umkreise der Durchschnittsfigur liegt, so muß, wenn LM allezeit = Radio ist, die Durchschnittsfigur allezeit ein gleich großer Cirkel mit den Cirkeln der Grundflächen seyn nach §. 164, welches wir beweisen wollten.

Wie wir gesehen haben, so gilt dieser Beweis nur, wenn die schneidenden Ebenen mit den Grundflächen parallel sind. Sind sie es nicht, so wird die Durchschnittsfigur kein Cirkel, sondern eine andere geometrische Figur, welche man eine Ellipse nennt, von welcher wir hier aber gar nicht reden können.

Die Höhe des Cylinders ist die Entfernung seiner beyden Grundflächen von einander, oder

eine gerade Linie, welche auf beyden Grundflächen perpendikular steht. Uebrigens ist es gleichviel, wo man diese Perpendikularlinie auf beyde Ebenen ziehe, weil alle Linien einander gleich sind, die auf parallelen Ebenen perpendikular stehen.

Dieses sind einige allgemeine Betrachtungen über die Körper, welche wir zu der Klasse der Prismatum zählen können.

§. 310. Wir betrachten eine andere Art von Körpern, die nur eine Grundfläche haben, (denn diese hatten zwey) und übrigens auch viel ähnliches mit einander haben. Das sind die **Pyramide und der Kegel.**

Man nehme eine geradlinichte Figur, welche in einer Ebene liegt, Fig. 195 ABDEF von so viel Seiten man will, die Seiten AB, BD, DE mögen gleich lang seyn, oder nicht. Außer dieser Ebene nehme man willkührlich irgendwo einen Punkt C an, von diesem Punkte C ziehe man nach den Ecken der geradlinichten Figur, welches die Grundfläche abgiebt, die geraden Linien CA, CB, CD, CE, CF, oder man lege auf die Seitenlinien der Grundflächen so viel Ebenen, welche alle durch den Punkt C gehen, so erhält man einen mit so viel dreyeckigten Ebenen oder Triangeln begränzten Körper, als die Grundfläche Seitenlinien hat, und dieser Körper heißt eine **Pyramide.** Die Figur ABDEF heißt nun die Grundfläche der Pyramide, und die Triangel ACB, CBD u. s. w. sind ihre Seitens

Fig. 195.

tenflächen. Es sind allezeit so viele Seitenflächen der Pyramide, als ihre Grundfläche Seitenlinien hat, weil auf jeder Linie, welche die Grundfläche begränzt, nur ein Triangel als Seitenfläche stehen kann. Daher entstehen auch die Namen der Pyramide. Man hat **dreyseitige, vierseitige, fünfseitige, sechsseitige** ꝛc. Pyramiden. Das versteht sich von selbst, daß man sie nicht von weniger Seiten als drey haben kann, weil die Grundfläche durch nicht weniger als drey geraden Linien kann begränzt werden.

Die Entfernung der Spitze C von ihrer Grundfläche ABDEF heißt die Höhe der Pyramide. Es ist dieses ein Perpendikel oder senkrecht auf der Grundfläche stehende Linie, welche aus dem Punkte C auf die Grundfläche ABDEF herab fällt. Denn diese Linie zeigt die Entfernung der beyden parallelen Ebenen an, wovon eine in die Grundfläche der Pyramide fällt, und die andere durch ihre Spitze C geht, und wozwischen sie also steht.

§. 311. Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene irgendwo abschneidet, welche der Ebene der Grundfläche dieser Pyramide parallel ist, so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche **ähnlich**, nicht aber **gleich**, weil sie kleiner ist. Es werde die Pyramide Fig. 195 durch eine mit der Grundfläche ABDEF parallel laufenden Ebene in abdef geschnitten, so ist die Figur abdef ähnlich der Grundfläche ABDEF. Denn dieses

zu

zu beweisen, müssen wir beweisen, daß die Winkel der Durchschnittsfigur in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, den Winkeln der Grundfläche gleich sind, und daß die Seiten, welche in beyden Figuren gleiche Winkel einschließen, einander proportional sind, denn alsdenn ist nach §. 27 und 140 die eine Figur der andern ähnlich. Wir haben vorausgesetzt, daß die Grundfläche und die schneidende Ebene, oder die Ebene, in welcher also die Durchschnittsfigur liegt, einander parallel liegen. Diese beyden Ebenen werden nun durch die dreyeckten Seitenebenen der Pyramide geschnitten. Wir wollen eine davon betrachten. So schneidet der Triangel ACB beyde Ebenen, also sind die Durchschnittslinien AB und ab parallel nach §. 284. Eben so schneidet der Triangel BCD auch beyde Ebenen, also sind dadurch gleichfalls BD und bd parallel. ab und bd, und AB und BD machen die Schenkel zweyer Winkel aus. Da diese Schenkel einander parallel liegen, so sind auch die Winkel abd und ABD gleich groß, wie solches aus §. 273 erhellt. Und auf eben die Art nur die Namen der Linien verändert, kann es von allen Winkeln bewiesen werden, daß sie, so wie sie über den Winkeln der Grundflächen liegen, mit ihnen gleich groß sind, also ABD = abd, BDe = bde u. s. w. Weil ferner in dem Dreyecke ABC die AB der ab, in dem Dreyecke CBD die BD der bd u. s. w. in allen Dreyecken, welche die Pyramide einschliessen, die Umfangslinie des Durchschnitts der Umfangs-

fangslinie der Grundfläche **parallel** liegt, so gilt auch nach §. 142 die Proportion

CB : cb = AB : ab ferner
CB : cb = BD : bd

---

also auch AB : ab = BD : bd.

Da ferner CD : cd = BD : bd
und auch CD : cd = DE : de

---

also BD ; bd = DE : de u. s. w.

Folglich gilt

AB : ab = BD ; bd = DE : de = EF : ef = FA : fa.

Die Figur ABDEF oder die Grundfläche der Durchschnittsfigur abdef ähnlich.

§. 312. Wir bemerken noch bey der Pyramide den Satz, den wir schon bey dem Prisma allgemein bemerkt haben. Wenn Pyramiden gleiche und ähnliche, also kongruente Grundflächen haben, und überdem auch bey diesen Pyramiden die gleichnamigten Seitenflächen gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt sind, so sind die Pyramiden gleich groß. Denn die Grundflächen fallen in einander, die Seitenflächen auch, also auch die Seitenlinien, also auch die Spitzen der Pyramiden, folglich kann eine in den andern Raum gelegt werden. Ueberhaupt ist dieses so einleuchtend, daß es kaum anzuführen nöthig gewesen wäre.

§. 313. Man konnte sich nach §. 307 Prismata gedenken, deren Grundflächen Unendlichecke oder Cirkel wären, und das geht auch von der Pyramide an, und alsdenn wird daraus ein **Conus** oder **Kegel**. Man kann sich seine Entstehung also vorstellen: Fig. 196 und 197. Man beschreibe einen Cirkel ADB; außer der Ebene, wo er liegt, nehme man, wo man will, einen Punkt E an; an diesen Punkt E und an die Peripherie des Cirkels ADB lege man eine krumme Oberfläche also an, daß, wenn man aus E gerade Linien EA, ED, EB, oder welche man will, nach der Peripherie der Grundfläche ADB zieht, diese gerade Linien ganz in diese gekrümmte Oberfläche fallen. Oder man könnte sich auch seine Entstehung also vorstellen: Es bewege sich ein Triangel ECB, er sey nun rechtwinklicht, wie Fig. 196, oder schiefwinklicht, als Fig. 197, um eine seiner Seiten EC, so daß EC unbeweglich bleibt, und nur die Seiten EB und CB sich bewegen, so entsteht gleichfalls dadurch ein Kegel.

Fig. 196 & 197.

§. 314. Der Punkt E, wo die krumme Oberfläche des Kegels sich endigt, heißt die **Spitze** desselben. Wenn man von dieser Spitze eine gerade Linie EC nach dem Mittelpunkte des Cirkels, woraus die Basis des Kegels besteht, fallen läßt, so heißt diese EC die **Axe des Kegels**. Steht diese EC unter einem rechten Winkel oder perpendikular auf der Grundfläche, als in Fig. 196, so ist der Kegel ein **gerader Kegel**; steht

sie

sie schief darauf, wie Fig. 197, so heißt der Kegel ein **schiefer Kegel.** Ein Zuckerhut giebt so ungefehr, aber ohne die geringste Genauigkeit, die Idee eines geraden Kegels. Wir betrachten jetzt nur den **geraden** Kegel.

§. 315. Wenn man Fig. 196 von der Spitze des geraden Kegels E gerade Linien EA, ED, EB an die Peripherie seiner Grundfläche ADB zieht, so sind alle diese Linien gleich lang. Man könnte dieses schon aus der Entstehungsart des Kegels durch die Bewegung der Linie EB und CB um die Linie EC beweisen. Aber es folgt auch aus dem §. 271 ein jeder angenommener Punkt in der Linie EC, welche senkrecht durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht, ist von allen Punkten in der Peripherie der Grundfläche gleich weit entfernt, und E ist gleichfalls ein angenommener Punkt in dieser Linie EC, also müssen auch alle Punkte in der Peripherie der Grundfläche gleich weit davon entfernt seyn. Die geraden Linien von diesem Punkte an die Peripherie oder Grundfläche gezogen, zeigen diese Entfernung an, als EA, ED, EB, also müssen auch diese alle gleich lang seyn. Eine solche gerade Linie als EA, EB, ED, nennt man **die Seite** des geraden Kegels.

§. 316. Bey einer Pyramide §. 311 war die Durchschnittsfigur, welche eine mit der Grundfläche parallel liegende schneidende Ebene

machte, der Grundfläche der Pyramide wieder ähnlich. Auch hierinnen kömmt der Kegel mit der Pyramide überein. Die Durchschnittsfigur
Fig. 198 Fig. 198 adb, welche eine mit der Grundfläche des Kegels ADB parallel liegende schneidende Ebene verursacht, ist gleichfalls ein Cirkel, und kleiner als die Grundfläche, weil der Kegel spitz zugeht. Dieses, daß adb nun ein Cirkel sey, müssen wir jetzt beweisen. Wir werden diesen Satz bewiesen haben, wenn wir darthun können, daß alle Linien, welche man von dem Punkte C, wo die Axe EC die Durchschnittsfigur durchschneidet, an den Umfang der Durchschnittsfigur adb zieht, gleich groß sind, und also die Eigenschaft der Radiorum eines Cirkels haben, folglich adb ein wirklicher Cirkel, wie ADB ist. Es folgt aber dieses auf folgende Art:

Man ziehe die Axe des Kegels EC. Nothwendig wird diese durch die Durchschnittsfigur irgendwo gehen, und das mag in c seyn. Man ziehe Linien von der Spitze des Kegels ED und EB nach der Peripherie seiner Grundfläche. Weil diese Linien nach der Erklärung des Kegels §. 314 ganz in seine krumme Oberfläche zu liegen kommen, so müssen sie auch die Durchschnittsfigur irgendwo schneiden, das mag in d und in b seyn. Man ziehe von dem Punkte c, wo EC durch die Durchschnittsfigur geht, die gerade Linie cb und cd, so wie man in der Grundfläche auch nach dem Punkte, wo ED und EB die Peripherie der Grundfläche erreichte, die Linien CD und CB gezogen

zogen hatte. Diese Linien CD und CB sind nun Radii der Grundfläche, weil sie aus dem Mittelpunkte derselben nach ihrer Peripherie gezogen waren, und also gleich. Man erhält auf die Art dreyeckte Ebenen ECD und ECB. Diese Ebenen schneiden zwey andere parallele Ebenen, nemlich die Ebene der Grundfläche, und die, welche die Durchschnittsfigur verursachte. Wenn aber zwey parallele Ebenen durch eine dritte geschnitten werden, so sind die Schnitte parallel. Diese Schnitte sind nun cd und cb, also CD parallel cd, und CB parallel cb. Da dieses ist, so wird nach §. 284 in dem Triangel ECD die Proportion gelten:

EC : ec = CD : cd und in dem Triangel ECB
EC : ec = CB : cb

——————————— also auch

CD : cd = CB : cb also auch CD : CB = cd : cb. Aber CD = CB, weils Radii eines Cirkels sind, also cd = cb. Auf eben die Art kann man beweisen, daß jede andere von c nach dem Umfange der Durchschnittsfigur adb gezogene Linie, z. E. ac = cd, also auch = cb sey. Da also alle von c nach dem Umfange der Durchschnittsfigur gezogene Linie gleich sind, so muß abd nothwendig ein Cirkel seyn nach §. 24. Die Durchschnittsfigur, die von einer parallelen Ebene mit der Grundfläche verursacht wurde, ist also der Grundfläche ähnlich, weil alle Cirkel einander ähnlich sind.

§. 317. Bey den allgemeinen Betrachtungen über die Körper und ihre Oberflächen ist uns noch die Kugel übrig. Wir werden nur etwas jetzt davon betrachten, weil wir ihre genauere Betrachtung in ein eignes Kapitel versparen, indem die Betrachtung dieses Körpers ungemein wichtig ist, und den Grund von vielen andern wichtigen Betrachtungen legt. Die Kugel Fig. 199 ist ein Körper, welcher von einer solchen gekrümmten Oberfläche umgeben wird, daß alle Punkte in dieser gekrümmten Oberfläche, z. E. A, D, B, von einem einzigen C innerhalb des Körpers gleich weit entfernt sind. Man wird diese Erklärung um so viel leichter begreifen, wenn man sich eine Art der Entstehung der Kugel vorstellt. Man ziehe Fig. 200 über einen Diameter FG einen halben Cirkel FIG, und stelle sich vor, daß dieser halbe Cirkel FIG sich um seinen Diameter FG herum bewege, bis er wieder an seinen Ort komme, so daß aber FG unbeweglich bleibe, so entsteht durch die Spuren, welche die halbe Peripherie FIG auf ihrem Wege zurück lassen soll, eine Kugel. Da FIG ein halber Cirkel ist, dessen Mittelpunkt H ist, und alle Punkte in der Peripherie dieses halben Cirkels gleich weit von H entfernt sind, und durch dieses halben Cirkels Bewegung die Kugel entsteht, so müssen auch alle Punkte auf der Kugel Fig. 199 von einem einzigen Punkte C in derselben gleich weit entfernt seyn.

Fig. 199.

Fig. 200.

Man

Man nennt diesen Punkt C das **Centrum** oder den **Mittelpunkt** der Kugel. Die geraden Linien von diesem Punkt C nach dem Anfange oder Oberflächen der Kugel gezogen, heißen ihre **Radii**. Diese müssen in einer Kugel alle gleich groß seyn, weil sich von allen Punkten der Oberfläche gerade Linien nach C ziehen lassen, und alle Punkte der Oberfläche gleich weit von C entfernt sind.

Verlängert man einen dieser Radiorum, welchen man will, rückwärts von C bis wieder an die Oberfläche der Kugel, z. E. Fig. 199 CB von C nach A, so ist AB der **Diameter** oder **Durchmesser** der Kugel, und weil CB = AB aus obigen Gründen, so ist AB = zweyen Radiis, und weil alle Radii einer Kugel gleich sind, so müssen auch alle Durchmesser einer Kugel gleich seyn, weil es alle doppelte Radii sind.

§. 318. Zwey oder mehrere Kugeln, welche also gleiche Radios, und also auch gleiche Durchmesser haben, sind gleich groß, weil, wenn man beyde in einander legen könnte, so daß die Centra in einen Punkt kämen, die Oberflächen nothwendig in einander fallen müsten, weil auf allen alle Punkte gleich weit von dem Orte, wo die Centra in einander lägen, entfernt wären. Hat man zwey verschiedene Kugeln, so muß aus diesen Gründen diese die größte seyn, welche den größten Radius oder Durchmesser hat, denn die von einem kleinern Radius kann in ihr liegen.

§. 319. Wenn eine gerade Linie gegeben ist in der Kugel, welche von dem Mittelpunkt C anfängt, und kleiner ist, als der Radius, so muß sie nothwendig ganz in der Kugel sich befinden, denn nur die Länge des Radius würde erst die Oberfläche der Kugel erreichen. Ist diese Linie größer als der Radius der Kugel, so muß ihr äußerster Punkt außerhalb der Kugel sich befinden. Oder ganz allgemein, jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt kleiner ist, als der Radius der Kugel, liegt innerhalb der Kugel, und jeder Punkt, dessen Entfernung größer ist, als der Radius der Kugel, liegt außerhalb derselben.

§. 320. Alle Kugeln sind ähnliche Körper, weil sie alle nach §. 317 von ähnlichen Dingen auf eine ähnliche Art entstehen, und also in nichts, als in der Größe verschieden sind. Man hat auch noch mehr Körper, die einander ähnlich seyn können, ob sie es schon nicht allezeit sind, wie man denn auch z. E. ähnliche Parallelepipede, Kegel und Cylinders hat, von denen allen an seinem Orte soll geredet werden.

Die übrigen vielen Betrachtungen von der Kugel und ihren Eigenschaften versparen wir in das ihr bestimmte Kapitel.

Das zehnte Kapitel.

Von der Vergleichung der bisher betrachteten Körper unter einander und ihren Verwandlungen.

§. 321.

Wir lehrten in dem vierten und sechsten Kapitel dieses Abschnitts, wie man ebene in gerade Linien eingeschlossene Flächen mit einander vergleichen, und auch andere ähnliche völlig gleiche verwandeln könnte, so viel für diese ersten Gründe gehörte. Dieses Kapitel, welches wir nun anfangen, wird uns ähnliche Betrachtungen über die bisher betrachteten Körper zeigen. Wir reden erstlich von den prismatischen Körpern. Dazu gehören das eigentliche sogenannte Prisma, Parallelepipedon, Cubus und der Cylinder, weil man auch diesen letztern als ein Prisma von unendlich vielen Seiten betrachten kann. Ehe wir aber diese Vergleichungen anfangen, wollen wir erst einen allgemeinen Grundsatz erklären. Wir wollen Fig. 201 zwey Körper, IKLM und RNOPQ zwischen zwey parallelen Ebenen EH und AD setzen, und annehmen, daß sie zwischen beyden nun so stehen, daß beyder Grundflächen in die eine Fig. 201

Ebene fallen, und beyder Ende eben die andere erreiche. Wir wollen uns übrigens gar nicht darum bekümmern, wie sie übrigens beschaffen sind, ob sie sich in eine Spitze oder Fläche endigen, ob sie eckigt oder rund sind. Wir bekümmern uns jetzt nur um das einzige, daß sie gleich hoch sind, weil sie zwischen zwey parallelen Ebenen stehen. Nun wollen wir diese beyden Körper durch eine dritte mit den beyden vorigen parallelen Ebenen schneiden lassen, dadurch werden Durchschnittsfiguren entstehen, welche gleichfalls bey beyden Körpern in einer Ebene liegen, wie hier z. E. STV und XYWZ sind. Finden wir, daß allezeit, wir mögen die dritte parallele Ebene die Körper schneiden lassen, wo wir wollen, also in allen möglichen Punkten, welche eine Seitenlinie der Körper ausmachen; finden wir, daß allezeit die Durchschnittsfiguren oder Flächen, wie hier STV und XYWZ, ihrem Flächeninhalte nach einander gleich sind, so sind die Körper selbst einander ihrem Inhalte oder Größe nach einander vollkommen gleich. Es ist dabey nicht nöthig, daß die Durchschnittsfiguren auch einander ähnlich sind, nur ihrem Inhalte nach müssen sie gleich seyn. Es ist dieses ein solcher Satz, der keines Beweises bedarf. Doch einige Betrachtungen darüber. Wenn man mit der dritten mit den beyden andern parallelen Ebenen die beyden Körper schneiden läßt, so sind die abgeschnittenen Stücke gleich lang oder hoch, weil auch die abgeschnittenen Stücke zwischen paralle-

len

len Ebenen stehen, und man könnte also auf die Art die Körper in unendlich viel dünne Stücken zerschneiden, die alle gleich hoch sind. Nun sagen wir, daß auch allezeit die Schnitte gleichen Flächeninhalts seyn sollen. Man kann also aus beyden Körpern unendlich viele Scheiben, die erstaunend dünn, aber doch alle von gleicher Dicke sind, machen, man kann sie sich viel feiner und dünner als das dünnste Mohnblatt vorstellen. Aber sie sind auf ihren Oberflächen doch einander nach dem Flächeninhalt gleich, und da sie nun gleich dicke sind, aber doch ihre Dicke unendlich klein ist, worinn sind sie denn nun in Ansehung ihres körperlichen Inhalts verschieden? Wirklich in nichts. Und also müssen auch die Körper gleich seyn, da alle die vielen gleichen Scheibchen zusammen gesetzt, doch die Körper ausmachen.

§. 322. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir nun zuerst zu den prismatischen Körpern. Wir hatten in dem vorhergehenden Kapitel §. 302 nur einen Fall angegeben, wenneher diese Körper gleich groß wären, jetzt erstrecken wir ihn weit allgemeiner. **Alle prismatische Körper, als Prisma, Parallelepipedon, Cubus und der Cylinder, sind gleich groß oder gleichen Inhalts, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.** Es ist dabey nicht nöthig, daß sie zugleich auch ähnlich sind, wenn nur der Inhalt von beyden gleich ist. Zwey Parallelepipeda,

zwey Prismata, ein Prisma und ein Parallelepipedon können zwey gleiche ihrem Flächeninhalt nach, obgleich ihrer Figur nach sehr ungleiche, Grundflächen haben, und sind doch einander völlig gleich. Es folgt dieses schon aus unserm vorhergehenden Grundsatze. Wir wollen indessen doch den Beweis davon führen.

Fig. 202. Es seyn Fig. 202 zwey prismatische Körper, hier ein Parallelepipedon und ein Cylinder (man kann auch jede andere prismatische Körper dafür rechnen). Sie sollen von gleicher Höhe seyn, also wird man selbige zwischen zwey parallelen Ebenen AD und EG setzen können. Sie sollen auch gleiche Grundflächen haben, so daß NOPQ seinem Inhalte nach der Grundfläche RS gleich. Nun lasse man diese Körper durch eine dritte mit beyden andern parallele Ebene acbd, wo man will, schneiden, man erhält dadurch die Durchschnittsfiguren efgh und ik. Diese Durchschnittsfiguren aber sind mit den Figuren der Grundfläche NOPQ und RS völlig gleich, weil die Ebene, wodurch sie geschnitten werden, mit der Ebene, worinn die Grundflächen lagen, parallel ist nach §. 298, und man mag die parallele Ebene ad die beyden Körper schneiden lassen, wo man will, so muß aus dieser Ursache allezeit die Durchschnittsfigur der Grundfläche gleich seyn. Es waren aber die Grundflächen beyder Körper nach der Voraussetzung einander gleich, also auch daher allezeit die Durchschnittsfiguren, und da allezeit die abgeschnittenen Stücke, weil die schneidende Ebene

mit

mit andern beyden parallel ist, immer gleiche Höhen haben, so müssen nach unserm angenommenen Grundsatze §. 321 auch beyde Körper gleich groß seyn. Da man von allen prismatischen Körpern, als Prisma, Parallelepipedon, Cubus und Cylinder, es auf diese Art beweisen kann, so ist unser angegebene Satz richtig.

§. 323. Es hindert auch nichts, wenn schon diese prismatischen Körper schief sind. Man sieht, daß auf alle Fälle doch der allgemeine in §. 321 angeführte Grundsatz dabey gelten müsse, wenn nur ihre Grundflächen und ihre Höhen gleich sind, so müssen sie auch alle gleich groß seyn, weil es doch alsdenn wahr bleibt, daß die schneidende parallele Ebene allezeit in der Durchschnittsfigur auch des schiefen Körpers eine Fläche giebt, die mit der Grundfläche desselben einerley Größe hat nach §. 298, 309; und also auch mit der Durchschnittsfigur des andern prismatischen Körpers gleich ist, und die Höhen beyder Körper bleiben durch die schneidende Ebene auch immer gleich. So sind z. E. Fig. 203 die Parallelepipeda ABCDEFGH und EHFGIKLM beyde gleich groß, obschon das letztere schief ist, denn sie haben erstlich beyde einerley Grundfläche EHFG, weil sie beyde sogar darauf stehen, und einerley Höhe, denn sie stehen beyde zwischen den Ebenen EHFG, und der ihr parallelen größern Ebene ABKM. Man pflegt diese und andere Vergleichungen der prismatischen Körper zweyer Pa- Fig. 203.

rallelepipedorum, Prismatum, Cylinder in den weitläuftigern Anweisungen, z. E. eines Herrn Hofrath Käſtners, Herrn Profeſſor Karſtens, auf eine andere Art zu beweiſen, wie man daſelbſt Käſtners Anfangsgründe 1ſter Theil S. 310 f. und Karſtens Lehrbegrif 1ſter Theil §. 340 finden wird. Auch dieſe Beweiſe gründen ſich auf die Wahrheiten, welche wir hier in dieſer Schrift vorgetragen haben, und man wird ſelbige auch daraus verſtehen. Wir haben aber für Anfänger und den eigenen Unterricht die leichteſten und am wenigſten weitläuftigen Beweiſe erwählt, die aus unſerm Grundſatze §. 321 ganz ſcharf und genau folgen. Wir wiederholen nochmal dieſe Folge. **Alle prismatiſche Körper, als Prisma, es ſey von viel oder wenig Seiten, Parallelepipedon, Cubus und Cylinder, ſind gleichen Inhalts oder gleich groß, wenn ſie gleiche Grundflächen, die ähnlich oder unähnlich ſeyn mögen, und gleiche Höhen haben, und alſo zwiſchen zwey parallele Ebenen geſetzt werden können.**

§. 324. Wir entwickeln noch einige Betrachtungen über die prismatiſchen Körper. Wir werden doch aber dabey beſtändig gerade Körper zeichnen, um der Einbildungskraft deſto beſſer zu Hülfe zu kommen. Es werden doch unſere Sätze auch von den andern Körpern dieſer Gattung richtig ſeyn, wenn man blos ihre Größe betrachtet, weil darinn die Schiefe nichts ändert,

indem

indem man ja allezeit in die Stelle des schiefen einen geraden Körper setzen kann, der von eben der Grundfläche und Höhe ist. **Wenn diese prismatischen Körper gleiche Grundflächen, aber verschiedene Höhen haben, so verhalten sie sich gegen einander ihrem Inhalte oder Größe nach als ihre verschiedenen Höhen.**

Die Körper Fig. 204 AD und HP, welche beyde Parallelepipeda sind, die wir um deswillen erwählt haben, um die Figuren desto deutlicher zu machen, ohngeachtet es von allen prismatischen Körpern gilt. Fig. 204.

Diese beyden Körper sollen gleiche Grundflächen SD und NP haben, ihre Höhen aber AS und HN sind verschieden, sie verhalten sich daher ihrem Inhalte nach also: Parallelepipedon AD : Ppd. HP = AS : HN. Eben so würde auch der daneben stehende Cylinder, der mit dem Parallelepipedon HP gleiche Höhe haben soll, und dessen Grundfläche der NP oder SD gleich seyn soll, sich zum Parallelepipedon AD also verhalten: Ppd. AD : Cylinder QR = AS : xy. Wir wollen nun von beyden Parallelepipedis dieses beweisen, welches für den Cylinder mit gilt, weil er gleiche Höhe und Grundfläche mit dem größern Parallelepipedon hat, also anstatt desselben kann gesetzt werden, und überhaupt für alle prismatische Körper richtig ist.

Man stelle die beyden Parallelepipeda, AD und HP, auf eine Ebene CSZ, lege durch die obere Oberfläche AW des kleinern auch eine Ebe-

ne, welche der untern parallel seyn wird §. 296. Diese Ebene führe man fort, und schneide damit das andere Parallelepipedum. Dieser Schnitt wird IFLK seyn. Und nun ist das abgeschnittene Stück IP des größern Körpers so groß, als das kleinere Parallelepipedum, weel es mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Man kann also nun das abgeschnittene Stück IP des größern Körpers in die Stelle des kleinern AD setzen, und beyder Höhen werden denn nun auch gleich seyn, also IN = AS.

Nun theile man die Höhe HN des größern Körpers in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. Es wird alsdenn ein Theilungspunkt in den Punkt I fallen, wo dieser größere Körper abgeschnitten ist, oder nicht. Fällt er darinn, so gedenke man sich durch alle diese Theile der Höhe IN, mit dem vorigen parallele schneidende Ebenen, so bekömmt man sowol von dem untern abgeschnittenen Theile des Körpers, als von dem obern Stücke, gleiche große Scheiben, weil sie alle gleiche Höhe und Grundflächen haben, indem die Theilungspunkte gleich weit von einander sind, und die schneidenden Ebenen mit der Grundfläche parallel sind. Nur kann die Anzahl dieser gleichen Scheiben in beyden Stücken verschieden seyn. Von jedem Theile werden die sämtlichen Scheiben das Stück des Körpers ausmachen. Diese beyden Stücke Körper werden sich also gegen einander verhalten, als wie ihre Anzahl von Scheiben sich verhält. Diese Anzahl von Scheiben

ben aber verhalten sich gegen einander, als die Zahl der Theilungspunkte beyder Stücke des Körpers, weil eben so viel Theilungspunkte, als Scheiben sind, oder also, als die Zahl der Theile der Linien HI und IN. Also verhalten sich schon beyde Stücke des Körpers, als die Zahl der Theile der Linien HI und IN. Aber die Summe der Theile von HI macht die ganze Seitenlinie HI, und die Summe der Theile von IN die ganze IN aus, welches die verschiedenen Höhen beyder Stücke des Körpers sind. Die beyden Stücke des großen Körpers werden sich also verhalten, wie ihre Höhen, oder es in Proportion gesetzt:

Das Stück IP zum Stück HK = IN : IH,
oder auch HK : IP = IH : IN
und daher ferner HK + IP : IP = IH + IN : IN
oder welches einerley
der ganze Körper HP : Stück IP = die Höhe HN : IN.

Und weil man, wie wir eben gesehen, anstatt des Stücks IP den Körper AD, und anstatt der Höhe IN die Höhe AS setzen kann, so gilt also:

Ppd. HP : Ppd. AD = HN : AS
oder auch AD : HP = AS : HN
welches wir aber beweisen wollten.

Wir haben es jetzt aber nur noch auf den Fall bewiesen, wenn der Theilungspunkt auf I fällt, nemlich an den Ort, wo die Höhe beyder Körper gleich ist. Alsdenn ist das Verhältniß der Zahl der Scheiben beyder Stücke rational, oder läßt sich genau angeben. Wie, wenn das

nicht

nicht wäre, oder das Verhältniß irrational wäre, oder man möchte so viel gleiche Theile, als man wollte, in HI und IN annehmen, doch nicht ein Theilungspunkt in I fiele. Alsdenn nimmt man seine Zuflucht zu unendlich kleinen Theilen, und theilt sowol HI als IN in unendlich kleine Theile, also auch unendlich viele Scheibchen ein, da alsdenn der Fehler kleiner wird, als jede Größe, welche man gedenken kann, oder da man alsdenn ganz sicher annehmen kann, es falle ein Theilungspunkt in I, und da also auch die Proportion richtig bleibt:

$$AD : HP = AS : HN$$

oder prismatische Körper von gleichen Grundflächen verhalten sich, wie ihre Höhen.

Daß, wenn von zwey prismatischen Körpern von gleichen Grundflächen, aber verschiedenen Höhen, deren Inhalt und Höhen bekannt sind, von diesen vier Stücken drey gegeben sind, sich das vierte daraus finden lasse, folgt aus der Natur der Proportion, oder wenn von AD, HP, AS, HN drey gegeben sind, so läßt sich allezeit das vierte daraus finden. Ein jeder wird die Probe selber machen können, wenn wir erst die Ausmessung der Körper gehabt, und also gezeigt haben, wie man den Inhalt eines Körpers ausdrückt.

§. 325. Wenn zwey oder mehrere prismatische Körper einerley Höhen, aber verschiedene Grundflächen haben, nemlich

lich verschiedenen Inhalts, so verhalten sie sich ihrer Größe oder Inhalte nach gegen einander, als ihre Grundflächen, oder als die Größe ihrer Grundflächen sich gegen einander verhält.

Wenn wir also z. E. die beyden Körper Fig. 205 mit einander zu vergleichen hätten, deren einer ein Cylinder, der andere ein fünfseitiges Prisma ist, von welchen beyden die Höhen AB und ab gleich, aber die Grundflächen AC und ac verschieden seyn sollen, so würde die Proportion gelten: Fig. 205.

Der Körper ABC : Körper abc = AC : ac.

Um sich hievon desto lebhafter und leichter zu überzeugen, so verwandle man jeden dieser Körper in ein gerades Parallelepipedon. Es wird dieses geschehen können, wenn man die Grundfläche AC Fig. 205 in ein gerades Viereck Fig. 206 FGEH verwandelt, und die Grundfläche ac gleichfalls in ein gerades Viereck fgeh. Beyden diesen Vierecken gebe man einerley Höhe FE = fe. Sie werden also zwischen zwey Parallellinien, mn und op, zu stehen kommen, weil aber Fig. 205 die Grundfläche ac kleiner ist als AC, und Fig. 206 die Höhen beyder Vierecke gleich sind, so müssen ihre Grundlinien EH und eh nothwendig verschieden seyn, und EH < als eh seyn. Daß das möglich sey, wissen wir aus dem vierten Kapitel von der Verwandlung der Figuren, da, wie wir wissen, auch die Höhe des Vierecks, worinn eine geradlinichte Figur so verwandelt Fig. 206.

worden, gegeben seyn kann. Nun setze man auf FGEH das gerade Parallelepipedon AH, und auf fgeh das gerade Parallelepipedon ah. Man gebe beyden gleiche Höhen, AF = af, so daß man also beyde zwischen parallelen Ebenen stellen kann. Es sey aber diese Höhe AF = af gleich der Höhe AB = ab, welche Fig. 205 der Cylinder und das Prisma hatten.

Hiedurch erhält man, daß der Körper ACB Fig. 205 dem Körper AH Fig. 206, und der Körper acb dem Körper ah Fig. 206 völlig gleich wird, denn sie haben gleiche Grundflächen und Höhen nach §. 324. Es ist also einerley, ob man die Körper Fig. 205 oder Fig. 206, was ihre Größe anbetrift, mit einander vergleicht, denn was von dem einen gilt, gilt auch von dem andern.

Wenn man nun ferner die beyden Parallelepipeda AH und ah betrachtet, so findet man, daß die Flächen BH und bh einander völlig kongruent sind, weil ihre Seiten gleich, auch gleiche Parallelen zwischen gleichen Parallelen sind. Wenn man nun diese beyden Parallelepipeda umkehrt, und die Flächen BH und bh als die Grundflächen betrachtet, so hat man zwey Parallelepipeda von gleichen Grundflächen, aber verschiedenen Höhen, und diese Höhen sind AB und ab, oder EH und eh. Es werden sich also nach dem vorigen § diese beyden Parallelepipeda als ihre Höhen verhalten, oder die Proportion wird gelten müssen:

Ppd. AH : Ppd. ah = EH : eh.

Weil aber ferner Parallelogrammen von gleichen Höhen, aber verschiedenen Grundlinien, sich wie ihre Grundlinien verhalten, und die Grundflächen der Parallelepipedorum Parallelogrammen sind, auch ihre Höhen FE = fe sind, so muß sich verhalten die

Grundl. EH : Grundl. eh = Parallelogr. FH : Parallelogr. fh

oder weil beyde Grundflächen FH = AC und fh = ac, also auch EH : eh = AC : ac, also gilt auch nun die Proportion

Ppd. AH : Ppd. ah = AC : ac.

Aber Ppd. AH ist = dem Körper ACB Fig. 205 und Ppd. ah ist = dem Körper acb ebendaselbst. Also gilt nun, wenn man gleiches für gleiches setzt, die Proportion

Körper ABC : Körper abc = Grundfläche AC : Grundfläche ac.

Und da man das von allen prismatischen Körpern auf die Art erweisen kann, so ist der Satz wahr, welchen wir erweisen wollten.

§. 326. Wir haben die prismatischen Körper mit einander verglichen, wenn sie gleiche Grundflächen und verschiedene Höhen, auch wenn sie gleiche Höhen, aber verschiedene Grundflächen haben. Wie aber, wenn sie sowol verschiedene Höhen als verschiedene Grundflächen haben? Es wird alsdenn ein zusammen gesetztes Verhältniß entstehen, und man wird sowol auf das Verhält-

niß der Höhen, als auch der Grundflächen acht haben müssen. Um nun dieses desto begreiflicher zu machen, wollen wir zwey prismatische Körper von ungleichen Höhen und Grundflächen mit einem dritten vergleichen, welcher dem einen der andern beyden in der Höhe, und dem andern in Ansehung der Grundfläche gleich seyn soll, woraus wir das Verhältniß der beyden in Höhen und Grundflächen verschiedenen prismatischen Körper leicht heraus bringen werden.

Es sollen nun die beyden prismatischen Körper Fig. 207 ABCD und abcd mit einander verglichen werden, welche verschiedene Inhalte der Grundflächen CD und cd, und verschiedene Höhen AC und ac haben. Man nehme nun den dritten prismatischen Körper EFGH, seine Höhe EG soll der Höhe des erstern AC gleich seyn, und seine Grundfläche EF oder GH der Grundfläche des andern ab oder cd.

Fig. 207.

Weil nun prismatische Körper von gleichen Grundflächen sich verhalten, wie ihre Höhen, und cd = GH nach der Voraussetzung ist, so gilt folgende Proportion:

Körper abcd : Körper EFGH = ac : EG.

Weil ferner prismatische Körper von gleichen Höhen sich verhalten, wie ihre Grundflächen, und EG = AC nach der Voraussetzung ist, so gilt auch folgende Proportion:

Körper EFGH : Körper ABCD = GH : CD

und diese beyde Proportionen zusammen gesetzt

abcd : EFGH = ac : EG
EFGH : ABCD = GH : CD

---

abcd : ABCD = ac . GH : EG . CD.

Nun ist aber die Grundfläche GH gleich der Grundfläche cd nach der Voraussetzung, und die Höhe EG gleich der Höhe AC nach der Voraussetzung. Da man nun gleiches für gleiches setzen kann, so gilt folgende Proportion:

abcd : ABCD = ac . cd : AC . CD

oder das Verhältniß zweyer prismatischen Körper ist aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammen gesetzt.

Wenn man für dieses nun einen ganz allgemeinen Ausdruck haben will, und den einen prismatischen Körper P, den andern p nennte, die Grundfläche des Körpers P mit B benennte, und seine Höhe mit A, die Grundfläche des Körpers p mit b, und seine Höhe mit a, so würde folgende Proportion der allgemeine Ausdruck des Verhältnisses beyder Körper seyn:

P : p = A . B : a . b.

§. 327. Betrachten wir diesen allgemeinen Ausdruck ferner, so finden wir nach dem §. 269 der Arithm. daß

p . A . B = P . a . b.

Nun wollen wir einmal, daß p = P, oder daß beyde Körper gleich seyn sollen, obschon ihre Grundflächen und Höhen verschieden seyn sollen,

welches auch, wie man bald einsehen wird, [illegible] geht, denn wenn des einen Grundfläche kleiner ist, als des andern, so darf nur des andern Höhe größer seyn. Ist aber $p = P$, so kann man beydes aus der Gleichung

$$p . A . B = P . a . b$$

wegnehmen, ohne sie zu ändern,

und alsdenn ist $A . B = ab$ das in Proportion gesetzt

giebt folgende $A : a = b : B$.

Und da A und a die Höhen, B und b die Grundflächen bedeutet, so ist dieser allgemeine Satz mit Worten folgender wichtiger Lehrsatz: **Bey prismatischen Körpern von gleicher Größe oder gleichem Inhalt verhalten sich die Höhen verkehrt wie die Grundflächen.**

Ferner, da sich auch die eben gezeigte Proportion $A : a = b : B$ also verändern läßt:

$$B : b = a : A$$

so ist dieses mit Worten ausgedrückt: **Bey prismatischen Körpern von gleichem Inhalt oder Größe verhalten sich die Grundflächen verkehrt, wie die Höhen.**

Wenn also bey zwey prismatischen Körpern von gleichem Inhalt aus den vier Gliedern A, a, B, b, drey gegeben sind, so läßt sich das vierte ohne alle Schwierigkeit nach der gemeinen Regel Detri finden, wie einem jeden aufmerksamen Leser von selbst einfallen wird.

§. 328.

§. 328. Wie sagten im 326sten §, daß das Verhältniß zweyer prismatischen Körper aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammen gesetzt sey, oder daß, wenn P und p zwey prismatische Körper, und A und B des erstern, a und b des zweyten Grundflächen und Höhen bedeutete, folgende Proportion wahr sey:

P : p = A . B : a . b.

Wir wollen nun noch einmal zwey gerade Parallelepipeda von verschiedener Größe vergleichen, wie etwa Fig. 208 gezeichnet sind, und P mag das Parallelepipedum ABCD, und p das Parallelepipedon abcd bedeuten. Die Höhe des Ppd. ABCD ist AC, die Höhe des Ppd. abcd ist ac, die Grundfläche des Ppd. ABCD mag CD vorstellen, und die Grundfläche des Ppd. abcd mag cd seyn. Nun wäre also die Proportion wahr: Fig. 208.

Ppd. ABCD : Ppd. abcd = AC . CD : ac . cd.

Aber wir wissen nach §. 127, daß die Grundfläche durch die Multiplikation ihrer Breite mit ihrer Tiefe ausgemessen wird, und also CD = CG. CH, weil CG die Breite, CH die Tiefe seyn soll. Ferner ist also auch cd = cg . ch. Wenn man also für CD und cd die gleich großen Werthe setzt, so würde die Proportion alsdenn seyn

Ppd. ABCD : Ppd. abcd = AC . CG . CH : ac . cg . ch

oder mit Worten ausgedrückt: Das Verhältniß zweyer geraden Parallelepipedons ist aus den Verhältnissen ihrer Höhen, ihrer

rer Breiten und ihrer Tiefen zusammen gesetzt.

§. 329. Jeder Würfel ist auch ein wahres Parallelepipedon, nur daß seine Seiten alle gleich lang sind, also seine Höhe, seine Tiefe und seine Breite völlig gleich sind §. 306. Es mögen also nun einmal die Figuren 208 ABCD und abcd zwey verschiedene Würfel seyn. Da die AF = AC = AE, und af = ac = ae, oder in jedem die Höhen, Tiefen und Breiten gleich lang sind, so kann man, wenn man die Seite des großen Würfels L, und des kleinern l nennt, anstatt der Proportion

Cub. ABCD : cub. abcd = AC . AF . AE
: ac . af . ae

folgende setzen:

Cub. ABCD : abcd = L . L . L : l . l . l

oder Cub. ABCD : cub. abcd = $L^3 : l^3$.

Also das Verhältniß zweyer Würfel ist aus dem dreymaligen Verhältniß einer ihrer Seiten zusammen gesetzt, oder das Verhältniß zweyer Würfel ist dreymal so groß, als das Verhältniß ihrer Seiten (in ratione triplicata laterum).

§. 330. Aus diesem Verhältnisse läßt sich auch sogleich das berühmte Problem auflösen, welches einstmals das Orakel zu Delphos gab, und worauf die Weisen aus Griechenland lange vergeblich dachten, bis es endlich Eratosthenes von Alexandrien fand, nemlich den Würfel zu

verdoppeln, oder die Seite eines Würfels zu finden, dessen Inhalt nochmal so groß sey, als eines andern gegebenen.

Es sey der gegebene Würfel C, der andere, der nochmal so viel Inhalt haben soll, wird also 2C seyn. Die Seite des gegebenen Würfels sey $= L$, und des doppelt so großen Seite, die wir noch nicht wissen, $= x$. Da sich nun zwey Würfel verhalten, wie die Cubi ihrer Seiten nach vorhergehendem Paragraphen, so wird also folgende Proportion richtig seyn:

$$C : 2C = L^3 : x^3$$

und $x^3 = \frac{L^3 . 2C}{C} = L^3 . 2$, oder $2L^3$, und also

$x = \sqrt[3]{2L^3} = L\sqrt[3]{2}$, oder die Seite des gegebenen Würfels mit der Cubikwurzel aus zwey multiplicirt, giebt die Seite eines nochmal so großen Würfels.

Exempel: Es sey die Seite eines Würfels $= 5$ Zoll, also L hier $= 5$, der $\sqrt[3]{2}$ ist $= 1{,}26\ldots$ also hier $L . \sqrt[3]{2} = 5 . 1{,}26 = 6{,}3\ldots$ Zoll.

Es zeigt aber dieser Ausdruck $L\sqrt[3]{2}$, die erstere mittlere Proportionalgröße zwischen zwey gesuchten mittlern Proportionalgrößen, zwischen einer Linie, die die Seite des gegebenen Würfels anzeigte, und zwischen einer Linie, die noch einmal so lang wäre, und die Seite eines achtmal so großen Würfels angeben würde, oder zwischen L und 2L. Denn $L : L\sqrt[3]{2} = L\sqrt[3]{2^2} : 2L$. Und daß diese beyden Größen zwey mittlere Propor-

tionalgrößen zwischen L und 2L sind, oder daß diese Proportion richtig sey, folgt schon daraus, weil die Produkte der äußern und mittlern Grösßen gleich sind.

Denn $2L^2 = L\sqrt[3]{2} \cdot L\sqrt[3]{2^2}$

weil $L\sqrt[3]{2} \cdot L\sqrt[3]{2^2} = L^2 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = L^2 2^{\frac{3}{3}}$

$= L^2 2^1 = 2L^2.$

Man kann durch die hier gezeigte Proportion auch sehr leicht die Seite des Viertels der drey, vier ꝛc. oder $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ so groß, als ein gegebener ist, auf eine völlig ähnliche Art finden.

§. 331. Im 326sten § bewiesen wir, daß das Verhältniß zweyer prismatischen Körper aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammen gesetzt sey, oder daß §. 326 $P : p = A \cdot B : a \cdot b$. Nun kann es auch kommen, daß die Grundflächen solcher prismatischen Körper auch einander ähnlich seyn können. Was das sey, wissen wir schon, nemlich in Ansehung der Seitenlinien proportional, und der Winkel, wie sie auf einander folgen, gleich, also in nichts als der Größe verschieden. Fig. 209 sollen zwey prismatische Körper ABCD und abcd seyn, deren Grundflächen AB und ab einander ähnlich sind, ihre Höhe BD und bd ist aber verschieden. Die allgemeine Proportion, die für alle prismatische Körper gilt, wird hier auch wahr seyn §. 326.

Fig. 209.

Kör-

Körp. ABCD : Körp. abcd = AB . BD . ab . bd
oder das Verhältniß dieser Körper ist aus den beyden Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammen gesetzt.

Allein weil diese Grundflächen ähnlich sind, so kann man das Verhältniß noch leichter haben, ohne nöthig zu haben, den Inhalt der Grundflächen zu wissen. Uns ist nemlich aus §. 155 bekannt, daß sich ähnliche Flächen verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Wenn man nun in zwey prismatischen Körpern zwey ähnlich liegende Seiten, oder auch Diagonalen §. 155 in ihren Grundflächen wählt, so darf man nur deren Verhältniß in die Stelle des Verhältnisses der Grundflächen setzen, und auch alsdenn würde die Proportion richtig seyn. Es mögen diese ähnlich liegende Seiten EB und eb seyn, ihre Quadrate EBq und ebq, also würde auch diese Proportion gültig seyn:
Körp. ABCD : Körp. abcd = EBq . BD : EBq . bd.
Es ist also das Verhältniß solcher ähnlichen prismatischen Körper aus den Verhältnissen ihrer Höhe und der Quadrate der ähnlich liegenden Seiten ihrer Grundflächen zusammen gesetzt.

Wären beyde Körper von gleicher Höhe, oder BD = bd, so würden diese Größen aus dem letzten Verhältniß der Proportion wegfallen, und die Proportion würde nun seyn

ABCD : abcd = EBq : ebq

oder alsdenn verhielten sich beyde Körper, wie

die

die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten ihrer Grundflächen.

§. 332. Alle Cirkelflächen sind ähnliche Flächen, und anstatt der Seitenlinien ihrer ähnlichen Flächen kann man ihren Diameter annehmen. Oder die Cirkelflächen verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Diametrorum. Dieses kömmt uns bey den Cylindern zu statten, deren Grundflächen Cirkelflächen sind. Ihr Verhältniß wird also aus den Verhältnissen ihrer Höhe und der Quadrate ihrer Diametrorum zusammen gesetzt seyn. Fig. 210. Wenn also Fig. 210 ABE und abe sind zwey Cylinder von verschiedenen Grundflächen und Höhen, und AB und ab mögen die Durchmesser ihrer Grundflächen seyn nach §. 326, wäre nun auch die Proportion wahr:

Cyl. ABC. Cyl. abc = ABDE. BC : abde. bc.

Allein weil ABDE : abde = ABq : abq, so ist auch folgende Proportion richtig:

Cyl. ABC : Cyl. abc. = ABq. BC : abq. bc.

§. 333. Bey prismatischen Körpern von ähnlichen Grundflächen war das Verhältniß derselben aus den Verhältnissen der Höhen und der ähnlich liegenden Seite in den Grundflächen zusammen gesetzt, oder Fig. 209 galt die Proportion, (welche auch bey zwey Parallelepipedis, Fig. 209. überhaupt bey prismatischen Körpern gilt.)

Körper ABCD. Körper abcd = EBq. BD : ebq. bd.

Nun

Nun sollen aber einmal nicht allein die Grundflächen dieser Körper einander ähnlich seyn, sondern es sollen auch die Höhen dieser (oder anderer) prismatischen Körper sich verhalten, wie zwey ähnlich liegende oder gleichnamichte Seiten oder Diagonalen. Hier in den Figuren sollen die Höhen BD und bd sich verhalten, wie die Seiten EB und eb, oder welches gleichviel ist, wie jedes Paar anderer Seiten. Es sey also EB : eb = BD : bd. Solche prismatische gerade Körper, die also beschaffen sind, heißen ähnliche Körper.

Da nun EB : eb = BD : bd ist, und also beyde Verhältnisse gleich sind, so kann man bey solchen Körpern in der Proportion Körper ABCD : Körper abcd = EBq . BD : ebq . bd anstatt BD : bd das andere Verhältniß EB : eb setzen, und die Proportion würde alsdenn seyn:

Körper ABCD : Körper abcd = EBq . EB
= ebq . eb

oder Körper ABCD : Körper abcd = $EB^3 : eb^3$

oder ähnliche prismatische Körper verhalten sich, wie die Cubi oder Würfel ihrer ähnlich liegenden oder gleichnamichten Seiten. Das gilt also für zwey oder mehr ähnliche eigentliche Prismata, oder zwey oder mehr ähnliche Parallelepipeda, oder auch Cylinder.

Ein Exempel soll die Sache erläutern. Die beyden Prismata Fig. 209 mögen ähnliche Körper seyn, und es mögen sich einmal die Grundflächen, wie die Seiten EB : eb = 3 : 2, gleichfalls mögen die Höhen oder BD : bd = EB : eb,

oder

oder auch = 3 : 2 seyn. Nun sind beyde Körper ähnlich, sie verhalten sich also, wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten, ihrem Inhalte nach. Also:

Körper ABCD : Körper abcd = $EB^3 : eb^3 = 3^3 : 2^3$

oder

Körper ABCD : Körper abcd = $27 : 8 = 3\frac{3}{8} : 1$.

Der Körper ABCD würde also $3\frac{3}{8}$ mal größer seyn, als der Körper abcd.

Eben so Fig. 210 wollen wir zwey ähnliche Prismata nehmen. Es verhalte sich nemlich AB : ab = BC : bc, und dieses Verhältniß sey wie 2 : 1, oder AB sey nochmal so lang als ab, und gleichfalls BC nochmal so lang als bc, so würden diese beyden Körper ähnlich seyn, und ihr Verhältniß wäre, wie $AB^3 : ab^3$, oder hier wie $2^3 : 1^3$.

Also Cyl. ABC : Cyl. abc = $2^3 : 1^3 = 8 : 1$ oder der Cylinder ABC wäre achtmal so groß, als der Cylinder abc. Man wird nun leicht auch Exempel von Parallelepipedis machen können. Würfel verhalten sich ohnedem, als die Cubi ihrer Seiten, und sind alle einander ähnlich.

Es ist hier in diesem Paragrapho nur die Rede von geraden prismatischen Körpern. Auf schiefe läßt sich dieses nicht ausdehnen; diese sind nur ähnliche Körper, wenn bey zweyen oder mehrern unter ihnen, außer diesen auch gleiche Neigungen der Seitenflächen und Grundflächen gegen einander, und bey schiefen Cylindern auch glei-

che

che Neigungen der Axen gegen die Grundflächen, neben den angeführten gleichen Verhältnissen statt finden.

§. 334. Ehe wir die Betrachtungen über die prismatischen Körper verlassen, tragen wir noch einige davon vor, welche uns bey den Betrachtungen der in eine Spitze sich endigenden Körper der Pyramide und des Kegels zu statten kommen werden. Jedes dreyeckte Prisma DBC, FGH Fig. 211 ist die Hälfte eines Parallelepipedons, das mit ihm eine gleiche Höhe, aber eine nochmal so große Grundfläche hat. Fig. 211.

Beweis. Man ziehe mit der CB die DA, und nun mit der DC die AB parallel, so entsteht ein Parallelogram ADBC. Gleichfalls ziehe man mit der GH die EF, und mit der FH die GE parallel, so entsteht abermals ein Parallelogram EGFH.

Die Grundflächen des BCDFGH sind davon die Hälften, weil DB und GF hiedurch Diagonalen werden.

Gleichfalls liegen auch die Parallelogrammen ADBC und EFGH einander parallel, denn sie liegen beyde in der Ebene der Grundflächen des Prisma DBCFGH, welche einander parallel liegen. DC und GH, die zu diesem Prismate gehören, sind einander parallel, und weil Kraft der Verzeichnung DC parallel AB, so sind also GH und AB unter einander parallel. Es war aber GH parallel der EF, nach der Verzeichnung,

also ist nun nach eben diesem citirten Paragraphen EF parallel der AB, und ferner aus eben den Gründen EG parallel AD, und FH parallel BC. Legt man also durch EF und AB, GH und DC, EG und AD, FH und BC Ebenen, so müssen daher die Ebenen AF der DH, und AG der BH parallel seyn, es sind gleiche und parallele Parallelogrammen, und der Körper DF ist ein Parallelepipedum nach §. 303. Wenn man ferner durch die beyden Diagonalen DB und GF eine Ebene legt, so machen ferner die Ebenen AF und DH mit der Ebene GF gleiche Winkel nach §. 284, weil zwey parallele Ebenen mit einer dritten sie durchschneidenden gleiche Winkel machen.

Also der Winkel DBC ist = dem Winkel BDA. Man muß nun noch beweisen, daß nun das Prisma DBAEFG dem andern vollkommen gleich sey.

Man nehme also dieses letztere Prisma, und setze es in das andere, aber so, daß zwar die Linie DB in sich selbst zu stehen kommt, aber weil der Winkel DBC = dem Winkel BDA, der Punkt B in D, und also D in B zu stehen kommt. Es geht dieses an, wegen Gleichheit und Lagen der Seiten. Alsdenn werden alle drey Seiten beyder Prismatum jede in eben derselben Ebene stehen, also in einander fallen, und weil beyde Prismata gleich hoch sind, werden sie sich einander völlig decken. Es sind also beyde Prismata

gleich,

gleich, und jedes die Hälfte des Parallelepipedons AH.

§. 335. Der Satz, welcher unmittelbar hieraus folgt, und keines Beweises bedarf, ist also folgender: Machen jede zwey an einander gesetzte gleiche dreyeckte Prismata ein Parallelepipedon aus, das gleiche Höhe und nochmal so große Grundfläche hat, wie wir eben gesehen haben, und geht die Ebene, welche beyde Prismata schneidet, durch die entgegen gesetzten Diagonalen des Parallelepipedon, so kann man also auch durch die Ebene, welche man durch diese Diagonalen der beyden Grundflächen legt, jedes Parallelepipedon in zwey gleiche dreyeckte Prismata verwandeln.

§. 336. Jedes vieleckte Prisma ABCDE, KIHGF, Fig. 212 läßt durch Diagonalen, die aus gleich liegenden Punkten in seinen beyden Grundflächen gezogen werden, wenn man durch diese Diagonalen AC und KH, AD und KG, Ebenen legt, in so viel dreyeckte sich verwandeln, als es Seiten hat, weniger zwey. Dieser Satz wird uns sogleich deutlich seyn, wenn man sich aus der Betrachtung der Flächen §. 98 erinnert, daß sich jede geradlinichte Figur durch Diagonalen, die sich einander nicht durchschneiden dürfen, in so viel Dreyecke verwandeln läßt, als sie Seiten hat, weniger zwey. Nun sind die beyden Grundflächen eines jeden Prismatis geradlinichte Fig. 212.

nichte Flächen, welche einander gleich und ähnlich sind, und einander parallel liegen, wie wir wissen. Wenn man also diese geradlinichte Flächen auf die Art in Dreyecke theilt, wie bey geradlinichten Figuren gelehrt war, so müssen sich durch diese Diagonalen Ebenen legen lassen, welche das vieleckte Prisma in eben so viel dreyeckte Prismata theilen, als die Grundflächen Seiten
Fig. 213. hatten, weniger zwey. Das Prisma Fig. 213 hatte fünf Seiten, also muß es in $5 - 2 = 3$ dreyeckte Prismata können zertheilt werden, man mag die Diagonalen in den Grundflächen ziehen, aus welchen Punkten man will.

Fig. 212. Daß alle die dreyeckte Prismata Fig. 212 ABCKIH, ACDKGH, ADEKGF zusammen genommen, das ganze Prisma ABCDE, KIHGF ausmachen, oder daß die Summe des Inhalts aller dreyeckten Prismatum, worinn ein vielseitiges getheilt ist, dem Inhalte des vielseitigen gleich sey, lehrt die Natur der Sache, denn aus allen den dreyeckten zusammen gesetzt, könnte man das vieleckte als entstanden ansehen.

§. 337. Wir haben bis daher die prismatischen Körper betrachtet, und das nöthigste von ihrer Vergleichung unter einander angezeigt. Wir wenden uns zu den Körpern, welche nur eine Grundfläche haben, und welche sich in eine Spitze endigen, wozu wir den Kegel und die Pyramide zählen. Wir vergleichen sie erstlich unter einander, und nachher mit den prismatischen

schen Körpern. Der erste wichtige Satz, welchen wir bemerken, ist folgender: Pyramiden sowol als Kegel, oder Kegel und Pyramiden, von gleicher Grundfläche und Höhe, sind ihrem Inhalte nach völlig gleich, sie mögen sonst beschaffen seyn, wie sie wollen. Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir Figur 213 eine Pyramide und Kegel zeichnen. Man mag zwey von dieser Art Körpern, welche nur eine Grundfläche haben, zeichnen, welche man will, so wird man diesen Beweis gebrauchen können, er wird also völlig allgemein. Wir berufen uns auf den Grundsatz, den wir §. 321 ausführten, und dessen man sich jetzt wieder erinnern und ihn nachlesen muß.

Fig. 213 GLM ist eine Pyramide, und HPR ein Kegel. Ihre Grundflächen LM und PR sollen einander gleich seyn, und auch ihre Höhen, weil wir sie zwischen zwey parallelen Ebenen AB und EF gestellt haben. Wir behaupten nun, daß beyde Körper ihrem Inhalte nach völlig gleich sind. Man lasse beyde Körper durch eine dritte Ebene CD, die mit den vorigen beyden parallel liegt, wo man will, schneiden. Die Durchschnittsfiguren sind IK und NS, die, wie wir §. 311, 316 gezeigt haben, jede der Grundfläche ihres Körpers LM und PR ähnlich sind. Können wir nun beweisen, daß diese Durchschnittsfiguren IK und NS einander gleich sind, so wie wir die Grundflächen nach unserer Voraussetzung gleich angenommen haben, so sind Fig. 213.

auch beyde Körper gleich, und gilt alles für sie, was wir dort §. 321 sagten. Da wir die Entfernung der schneidenden parallelen Ebene von den andern beyden unbestimmt angenommen haben, so wird das, was wir sagen, für jede Durchschnittsfiguren, in welcher Entfernung sie auch von der Grundfläche sind, gelten müssen. Man ziehe die Axe des Kegels HQ nun, und wo sie durch die Ebenen geht, den Radium der Durchschnittsfigur und der Grundfläche NO und PQ. Weil nach §. 311 die Grundfläche LM der Durchschnittsfigur IK ähnlich ist, und ähnliche Flächen sich verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, so verhält sich also

Fläche LM : Fläche IK = LVq : ITq

aus eben den Gründen, weil die Cirkelfläche PR der Cirkelfläche NS ähnlich ist §. 316. Verhalten sie sich wie die Radii, also:

Fläche PR : Fläche NS = PQq : NOq,

weil IT parallel LV, so ist ferner

LV : IT = CL : CI,

und auch, weil PQ parallel NO, so ist in dem Triangel HPQ

PQ : NO = HP : HN.

Allein wir haben auch gesehen, daß, wenn drey parallele Ebenen zwey gerade Linien (hier CL und HP) schneiden, auch alsdenn ihre abgeschnittenen Theile einander proportional sind. Es wird also auch folgende Proportion gelten:

CL : CI = HP : HN.

Weil diese beyden Verhältnisse einander gleich sind, so müssen auch die beyden erstern Verhältnisse der vorhergehenden Proportionen einander gleich seyn, also auch folgende Proportion daher gelten:

LV : IT = PQ : NO

LVq : ITq = PQq : NOq, folglich alle zur quadratischen Potenz erhoben §. 270, 5 Arith.

aber es war LVq : ITq = Fläche LM : Fläche IK
und PQq : NOq = Fläche PR : Fläche NS
also ist nun auch

Fläche LM : Fläche IK = Fläche PR : Fläche NS

---

und also auch

Fläche LM : Fläche PR = Fläche IK : Fläche NS.

Aber Fläche LM war gleich nach der Voraussetzung der Fläche PR, also muß auch Fläche IK der Fläche NS gleich seyn, oder nach der Regel der Proportion ist PR . IK = LM . NS

---

aber PR = LM

---

folglich IK = NS

und dieses war, was wir erweisen wollten. Man sieht leicht, daß, wenn man statt des Kegels HPR auch eine Pyramide von mehr oder weniger Seiten hätte nehmen wollen, man anstatt der Linien PQ und NO, die wir hier gebraucht haben, eine der Seitenlinien derselben in der Grund-

fläche und Durchschnittsfigur hätte nehmen müssen, und daß der Beweis alsdenn eben so gut gepaßt hätte. Wir folgern noch hieraus, weil Kegel und Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe gleichen Inhalts sind, so lassen sie sich also für einander setzen, oder in einander verwandeln. Es geht dieses überhaupt an, und ist hier noch nicht der Ort, davon zu reden.

§. 338. Mit Hülfe dieses Lehrsatzes können wir nun auch einen andern eben so wichtigen beweisen, welcher uns auch bey der Betrachtung der Pyramiden und Kegel nutzen muß. Jedes dreyeckte Prisma ABCDE Fig. 214 läßt sich in drey gleich große Pyramiden zerschneiden. Fig. 214.

Beweis. Es sey Fig. 214 ABCDEF ein dreyecketes gerades Prisma. Auf die Winkel seiner Grundfläche achten wir jetzt nicht, sie mögen nebst den Seitenlinien desselben seyn, wie sie wollen. Seine Grundflächen sind ABC und DFE. Wir haben es der Deutlichkeit des Beweises wegen auf eine seiner Seitenflächen BCFE gelegt. In die eine seiner Seitenflächen ABDF ziehe man die Diagonale AF, und in die andere Seitenfläche BCFE die Diagonale FC. Man gedenke sich durch diese beyden Diagonalen eine Ebene ACF, so schneidet diese Ebene ein Stück AFCB von dem Prismate ab, welches eine Pyramide ist, die zu ihrer Grundfläche die Grundfläche des Prismatis ABC, und zu ihrer Höhe die Seitenlinie des Prismatis BF hat, und auf

die

die Grundfläche ABC gestellt, in der Fig. 215 gezeichnet ist. Man ziehe ferner in der Seitenfläche ACDE die Diagonale DC, so läßt sich durch die Diagonalen DC und CF abermals eine Ebene DCF legen, welche gleichfalls eine Pyramide DFEC abschneidet, die ebenfalls zu ihrer Grundfläche die Grundfläche des Prisma DFE, und zu ihrer Höhe die CE hat, und weil CE = BF, und die Grundfläche DFE = der ABC, so sind nach vorhergehendem Paragraphen diese beyden Pyramiden ABCF und DFEC gleich (Fig. 215). Fig. 215.
Nun bleibt noch ein Stück in dem Prismate übrig ADCF. Dieses Stück ist gleichfalls eine Pyramide, man muß aber die Fläche ADF als die Grundfläche derselben betrachten, und ihre Spitze ist in C, ihre Seiten sind also AFC, ADC und DFC, ihre Figur ist 216. Diese Fig. 216.
Pyramide ADCF ist aber der Pyramide ABCF vollkommen gleich. Denn man darf nur diese Pyramide ABCF auf eine ihrer Seitenflächen AFB stellen, und die zur Grundfläche annehmen, wie wir Fig. 217 gethan haben, so wird man Fig. 217.
bald davon überzeugt werden. Denn Fig. 214 theilt AF, weils eine Diagonale ist, das Parallelogram ADFB in zwey gleiche Theile, welche in einer Ebene liegen, und beyde Grundflächen der Pyramiden ADCF und ABCF sind, also sind ihre Grundflächen gleich. Da aber beyder Grundflächen in einer Ebene liegen, und beyder Spitzen sich in einem Punkt C endigen, so müssen auch beyde Pyramiden ADCF und ABCF gleich hoch

seyn. Weil beyde gleiche Grundflächen haben und gleich hoch sind, so sind sie auch nach vorhergehendem Paragraphen gleichen Inhalts.

Nun aber war

Pyramide ABCF = Pyramide DFCE

ferner Pyramide ABCF = Pyramide ADCF

---

u. daher Pyramide ABCF = Pyramide DFCE
= Pyramide ADCF

oder alle drey Pyramiden sind einander gleich, weil, wenn zwey Dinge einem dritten gleich sind, sie auch unter einander gleich sind. Also läßt sich jedes dreyeckte Prisma in drey Pyramiden zerschneiden, welche einander vollkommen gleich sind.

Anmerkung. Wir haben nicht ohne Ursache diesen Lehrsatz weitläuftig ausgeführt. Es fällt Anfängern gewöhnlich schwer, ihrer Einbildung diese Pyramiden vorzustellen, sie werden aber sehr viel Erleichterung bekommen, wenn sie sich ein solches dreyecktes Prisma von Holz verfertigen lassen, seine Ecken mit diesen Buchstaben bezeichnen, und es nach den hier gezogenen Linien durchschneiden, da ihnen denn unser Beweis ganz leicht wird zu begreifen seyn.

§. 339. Es ist dieser Lehrsatz reich an Folgerungen, davon wir die nöthigsten anführen wollen. Läßt sich ein jedes dreyeckte Prisma in drey gleiche Pyramiden zerschneiden, so ist auch jede Pyramide der dritte Theil eines dreyeckten

Prismatis, das mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. Denn es sey die Pyramide von viel oder wenig Seiten, also ihre Grundfläche ein Polygon, das regulär und irregulär seyn mag, so läßt sich doch diese Grundfläche in ein Dreyeck verwandeln, das eben den Inhalt als das Polygon hatte. Nach dem vierten Kapitel. Setzt man darauf eine Pyramide von gleicher Höhe als die vielseitige, so sind sie einander gleich nach dem §. 337, der das ganz allgemein bewies. Es mag nun dieses einmal ein solches Dreyeck seyn, als Fig. 214 ABC, aber auf dieses Dreyeck, es zur Grundfläche genommen, läßt sich allezeit ein dreyecktes Prisma ABCDEF setzen, das also, wenn es mit der Pyramide von gleicher Höhe genommen wird, dreymal so groß als die Pyramide ist, laut vorhergehenden Paragraphen. **Also ist die vielseitige Pyramide welche man in eine dreyeckte verwandelt hatte, der dritte Theil eines dreyeckten Prismatis von gleicher Grundfläche und Höhe.**

§. 340. **Wir haben §. 337 gesehen, daß** Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen gleich sind, also wird für den Kegel eben das gelten müssen, was für die Pyramide galt, weil ich an seiner Stelle eine Pyramide stellen kann, **also auch Kegel sind der dritte Theil eines dreyeckten Prismatis von gleicher Grundfläche und Höhe.**

§. 341. Jedes dreyeckte Prisma ist mit einem andern prismatischen Körper, als Parallelepipedon, Cylinder, Cubus, vielecktem Prisma, wenn es mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, auch gleichen Inhalts nach §. 323. Also kann man die vorigen Sätze §. 338 und 340 auch so ausdrücken: Pyramide und Kegel sind der dritte Theil eines prismatischen Körpers, der mit ihnen gleiche Grundfläche und Höhe hat, also z. E. auch eines Parallelepipedons oder Cylinders.

§. 342. Weil die Grundflächen eines Cylinders sowol als eines Kegels Cirkel sind, und wenn sie beyde von gleichen Grundflächen sind, diese Cirkel einander decken, so pflegt man wol den Inhalt des Kegels mit dem Inhalte des Cylinders zu vergleichen, und den obigen Satz also auszudrücken: **Kegel sind der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe**; ohngeachtet der vorhergehende §. 330 angeführte Satz eben so richtig ist.

§. 343. Jeder Kegel und Pyramide läßt sich leicht in einen prismatischen Körper verwandeln, denn man darf nur einen prismatischen Körper, welcher es auch sey, (ausgenommen der Würfel, wobey man etwas anders verfahren muß) von gleicher Grundfläche, als der Kegel oder die Pyramiden, und von $\frac{1}{3}$ der Höhe nehmen, so ist die Absicht erreicht, weil der dritte

Theil

Theil eines prismatischen Körpers auch der dritte Theil seines Inhalts ist. Sollte die Höhe des prismatischen Körpers der Höhe des Kegels oder Pyramide gleichen, so darf man nur die Grundfläche $\frac{1}{3}$ von der Grundfläche dieser Körper machen, so ist auch die Absicht erreicht. Noch mehrere Veränderungen hier anzubringen, leidet die Absicht dieser Schrift nicht. In dem nächsten Kapitel wird noch Anleitung vorkommen, alle solche Aufgaben sehr leicht arithmetisch zu bewerkstelligen.

§. 344. Mit Hülfe dieser bisher angeführten Sätze werden wir nun leicht Kegel und Pyramiden selbst unter einander vergleichen können. Da man diese Körper leicht in gleich große prismatische Körper verwandeln kann, wie uns der vorhergehende § lehrt, so werden wir auch bald einsehen, daß man sie nach eben den Regeln mit einander vergleichen müsse, als man die prismatischen Körper mit einander verglichen hat. Man pflegt gewöhnlich Pyramiden als den dritten Theil eines dreyeckten Prisma zu betrachten, von gleicher Grundfläche und Höhe, und Kegel als den dritten Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche. Das Verhältniß prismatischer Körper war aus dem Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen zusammen gesetzt, wie wir aus dem 326sten § gelernt haben.

Nun seyn Fig. 218 die Pyramide DEFG Fig. 218. und der Kegel cde mit einander zu vergleichen.

Man

Man könnte statt deren zwey Pyramiden, auch zwey Kegel, oder auch welche Kegel von dieser Art man gewollt hätte, genommen haben. Man wird bald sehen, daß das, was wir jetzt sagen werden, auch ohne Veränderung darauf kann angewandt werden, wenn man sich des vorhergehenden nur erinnert. Wir wollen nun die Höhe der Pyramide GDEF = A nennen, und die Höhe des Kegels ecd = a. Die Grundfläche der Pyramide heiße = B, und des Kegels = b.

Wir haben nach §. 343 sowol die Pyramide als den Kegel in prismatische Körper verwandelt, die mit ihnen gleiche Grundfläche, wie auch aus der Figur zu bemerken, haben, aber nur ein Drittel der Höhe, als die Pyramide und der Cylinder haben. Die Höhe BF des Prisma ABCDEF wird also = $\frac{1}{3}$A seyn, und die Höhe bd des Cylinders abcd wird = $\frac{1}{3}$a seyn.

Es ist nun gleich viel, weil wir das Prisma der Pyramide und den Kegel dem Cylinder gleich gemacht haben, welchen von den Körpern, die zu einander gehören, wir nun gebrauchen. Es mag also die Pyramide sowol als das Prisma, weil doch beyde gleich groß sind, unter = C benennt seyn, und der Kegel oder Cylinder unter = c, so würde, wenn man C mit c vergliche, folgende Proportion wahr seyn:

C : c = $\frac{1}{3}$A . B : $\frac{1}{3}$a . b

C : c = A . B : a . b

die beyden hintersten Glieder mit 3 multiplicirt.

Da

Da nun C aus c auch die Kegel und Pyramiden vorstellen können, so sieht man aus dieser Proportion, daß das Verhältniß der Kegel oder Pyramiden, oder der Pyramiden und Kegel unter einander aus dem Verhältniß ihrer **Grundflächen und Höhen** zusammen gesetzt sey, eben wie bey den prismatischen Körpern.

§. 345. Es mag nun C und c allezeit zwey Körper von dieser Art bedeuten, und die Grundfläche des C sey auch immer B, und seine Höhe auch immer A. Gleichfalls sey die Grundfläche des Körpers c immer b, und seine Höhe immer a, so wird die eben betrachtete Proportion $C : c = A . B : a . b$ als eine Grundproportion können angesehen werden, woraus wir alle übrige Folgen leicht herleiten werden.

1) Es sey $B = b$, oder die Grundflächen beyder Körper mögen gleich seyn, so kann B und b aus beyden letztern Gliedern der Proportion wegfallen, weil sie durch $B = b$ können dividirt werden. Es bleibt also noch folgende Proportion:

$$C : c = A : a$$

oder Kegel und Pyramiden von gleicher Grundfläche und verschiedenen Höhen verhalten sich nach ihrem Inhalte, wie ihre Höhen.

2) Unsere Grundproportion war

$$C : c = A . B : a . b.$$

Es sey nun $A = a$, oder die Höhen von Kegeln und Pyramiden mögen gleich seyn, aber die

Grund-

Grundflächen oder B und b verschieden, so kann A = a aus den letzten Gliedern der Proportion weggenommen werden, und es bleibt noch folgende:

$$C : c = B : b$$

oder Kegel und Pyramiden von gleichen Höhen, aber verschiedenen Grundflächen, verhalten sich, wie ihre Grundflächen, ihrem Inhalte nach.

§. 346. $C : c = A . B : a . b$, das war unsere Grundproportion. Also:

$$c . A . B = C . a . b.$$

Nun mag $c = C$ seyn, oder beyde Körper sollen gleich seyn, obschon A und a und B und b, oder die Höhen und Grundflächen verschieden bleiben sollen, welches auch gar wohl angeht, denn was der eine Körper in Ansehung der Grundfläche größer ist, kann der andere in Ansehung der Höhe größer seyn. Ist aber $c = C$, so kann das auch an beyden Seiten der Gleichung weggestrichen werden, und man hat dennoch

$$A . B = a . b.$$

Setzt man das in eine Proportion, so ist es folgende;

$$A : a = b : B \text{ oder auch}$$
$$B : b = a : A$$

oder bey gleichen Kegeln und Pyramiden, die aber verschiedene Grundflächen und Höhen haben, verhalten sich die Höhen, wie Grundflächen verkehrt genommen,

oder

oder die Grundflächen verhalten sich, wie die Höhen verkehrt genommen.

Und wenn dieses bey diesen Körpern, die verschiedene Grundflächen und Höhen haben, geschieht, so sind die Körper gleich.

§. 347. Es können aber auch Grundflächen dieser Körper der Pyramiden und Kegel einander ähnlich seyn, und die Grundflächen der Kegel sind alle einander ähnlich, denn es sind alle Cirkel. Wir wissen, daß ähnliche Flächen sich verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten §. 155; und Cirkelflächen, wie die Quadrate ihrer Radiorum. Es werden also, wenn B und b diese ähnlichen Flächen oder Grundflächen sind, und wenn man die in ihnen ähnlich liegenden Seiten bey den Grundflächen der Pyramiden sowol, als auch die verschiedenen Radii der Kegelgrundflächen, L und l nennt; diese ähnlichen Grundflächen sich verhalten, wie Lq und lq, oder die Proportion ist richtig:

$$B : b = Lq : lq.$$

Weil nun hier zwey gleiche Verhältniss also sind bey ähnlichen Grundflächen, so kann man in unserer Grundproportion $C : c = A . B : a . b$ anstatt $B : b$ die $Lq : lq$ setzen, und sie wird alsdenn folgende werden:

$$C : c = A . Lq : a . lq$$

oder bey Regeln und Pyramiden, die ähnliche Grundflächen haben, und zwar bey Regeln allezeit ist das Verhältniß ihres

Inhalts aus den Verhältnissen ihrer Höhen und des Quadrats der ähnlich liegenden Seiten ihrer Grundflächen zusammen gesetzt.

§. 348. Es seyn aber einmal die Höhen dieser Körper, welche ähnliche Grundflächen haben, auch den an ihnen ähnlich liegenden Seiten proportional, so daß $A : a = L : l$ seyn mögen, daß also z. E. wenn eine ähnlich liegende Seite oder der Radius der Grundfläche bey Kegeln dreymal kleiner wäre, als des andern Körper, auch dieses bey der Höhe zuträfe, oder wenn z E. hier $A : a = L : l = 3 : 1$ wäre; wenn also allgemein die Höhen dieser Körper von ähnlichen Grundflächen einander proportional wären, oder $A : a = L : l$, so läßt sich abermals in der Grundproportion, die wir schon im vorhergehenden Paragraphen in folgende verändert hatten:

$$C : c = A \,.\, Lq : alq$$

anstatt $A : a$ abermals setzen $L : l$, und die Proportion wird seyn:

$$C : c = L \,.\, Lq : l \,.\, lq \text{ oder}$$
$$C : c = L^3 : l^3.$$

Solche Körper heißen ähnliche Körper, und sie verhalten sich, wie die Cubi der ähnlich liegenden Seiten ihrer Grundfläche, oder ähnliche Kegel, wie die Cubi der Radiorum ihrer Grundflächen.

Anmerkung. Man wird finden, daß diese spitzige Körper von einer Grundfläche eben

so

so mit einander verglichen werden, als mit den prismatischen geschahe. Mehrere Betrachtungen über selbige, und über Körper, die gleichfalls also behandelt werden könnten, ob sie schon nicht genau Pyramide oder Kegel sind, überlassen wir weitläuftigern und ausgebreitetern Anweisungen.

§. 349. Wir haben der Betrachtung der Kugel und ihrer Vergleichung unter einander, und auch mit andern Körpern, ein eignes Kapitel zu widmen versprochen. Wir endigen also hier dieses Kapitel, in welchem wir nichts wichtiges vergessen zu haben hoffen. Wir gehen zu der Ausmessung der bisher betrachteten Körper, da man ihrem Inhalt nach einem andern angenommenen Körper bestimmt. Was die Ausmessung der Kugel betrift, so wird selbige auch in das ihr eigene Kapitel verspart werden.

Das eilfte Kapitel.

Von der Ausmessung der bisher betrachteten Körper.

§. 350.

Wir haben den Inhalt oder die Größe der Körper mit und unter sich selbst verglichen.

chen. Alle diese Körper lassen sich nun auch mit einem dazu als die Einheit angenommenen Körper vergleichen, und man kann untersuchen, und auch finden, wie vielmal ein solcher angenommener Körper in einem andern gegebenen enthalten sey. Man nennt dieses einen Körper ausmessen, und dies Kapitel soll zeigen, wie man alle bis daher von uns betrachtete Körper mit andern von uns angenommenen vergleichen könne, oder die Ausmessung dieser Körper lehren. Wir werden uns aus diesen Betrachtungen noch erinnern, daß wir zur Vergleichung verschiedener Linien unter einander, oder zum Maaße der Linien eine Linie, und zum Maaße der Flächen eine Fläche annahmen. Wir werden uns noch erinnern, daß wir zum Maaße aller geradlinichten Figuren, und auch, daß wir sogar zum Maaße der Cirkelfläche eine Fläche, die man eine Quadratruthe, Fuß, Zoll oder Linie nennt, annahmen, und wir wissen, was dieses willkührlich angenommene Maas bedeutet. Es wird uns also jetzt gar nicht sonderbar vorkommen, wenn wir nun finden, daß man zur Ausmessung aller Körper auch einen vierseitigen Körper, der Cubikruthe, Fuß, Zoll oder Linie ist, gebrauchen. Es wird uns das ziemlich begreiflich werden, wenn man betrachtet, daß sich doch alle, wenigstens bisher betrachtete Körper in vierseitige Körper in Parallelepipeda verwandeln lassen, und daß sich ein Parallelepipedum doch mit einem solchen Körper wird ausmessen oder vergleichen lassen.

Man

Man nennt die Körper, womit man andere ausmißt, Cubikruthen, Cubikfuß, Cubikzoll, Cubiklinien, auch noch wol Cubikscrupel. Und was eine Quadratruthe sey, wissen wir aus §. 123. Wenn man sich nun einen Körper vorstellt, der in sechs solche Quadratruthen eingeschlossen ist, die auf einander senkrecht stehen, so ist dieses eine **Cubikruthe**. Oder Fig. 219. Es sey der Körper ABCD ein **Würfel**, also jede seiner Seiten gleich lang, oder also CE = CD = EF ꝛc. so wird er eine Cubikruthe heißen, wenn jede seiner Seiten eine Ruthe lang ist, oder wenn der Körper eine Ruthe in die Länge CE, eine Ruthe in die Breite ED, und eine Ruthe in die Höhe BD hat; und alsdenn ist er in sechs Quadratflächen, jede eine Quadratruthe groß, eingeschlossen. Hätte dieser Würfel zur Länge seiner Seiten einen Fuß, so hieße er ein Cubikfuß; wäre die Länge einer seiner Seiten ein Zoll, so wäre es ein Cubikzoll; und wäre es eine Linie, so wäre es eine Cubiklinie u. s. w. Fig. 219.

Man wird sich auch leicht vorstellen, daß nun eine solche Cubikruthe, als Fig. 219 seyn soll, verschiedene Cubikfuß, oder Zoll, oder Linien in sich enthalte. Das wird sich leicht bestimmen lassen.

Wir wissen von dem Decimalmaaße §. 6, daß eine Ruthe 10 Fuß in sich enthalte, und also wird ein Körper, dessen Seite nur den zehnten Theil die Länge hat, als die Länge der Seite einer Cubikruthe ist, wie Fig. 219 seyn mag,

ein Cubikfuß seyn. Dieses mag der kleine Körper abcd seyn. Weil de nur der zehnte Theil von DE, und ce nur der zehnte Theil von CE = HD ist, so würden sich dieser kleinern Körper zehn Stück von D nach E setzen lassen, und solcher Reihen wird man zehn in der Grundfläche CHED setzen können, das wären also hundert solcher kleiner Körper, als abcd. Man wird aber auch solcher Schichten zehn über einander setzen können, ehe der große Würfel ganz voll geworden ist, weil auch der kleinere Würfel nur den zehnten Theil der Höhe als der größere hatte. Man hat also zehn Schichten, jede von hundert Stück, das macht tausend Stück. Also wenn der größere Körper eine Cubikruthe ist, so enthält der tausend Cubikfuß. Ist er ein Fuß, so läßt sich auf eben die Art zeigen, daß der tausend Cubikzoll, und ein Zoll, daß der tausend Cubiklinien, und eine Linie, daß die tausend Cubikscrupel enthalte. Es ist alles dieses nach dem Decimalmaaße zu verstehen.

Man würde auf diese Art folgende Tabelle bekommen: Eine Cubikruthe hat 1000 Cubikfuß, also 1000000 Cubikzoll, also 1000000000 Cubiklinien. Ein Cubikfuß hat 1000 Cubikzoll. Ein Cubikzoll hat 1000 Cubiklinien. Ist aber die Ruthe nach dem Duodecimalmaaße getheilt, so daß auf eine Ruthe 12 Fuß, auf einen Fuß 12 Zoll, auf einen Zoll 12 Linien gerechnet werden, so würden sich auf die Fläche CD 12 Reihen, jede von 12 Stück, setzen lassen, welches jedes

ein

ein Cubikfuß wäre, und solcher 12 Schichten über einander würden den Würfel voll machen. Man hätte also in einer Schicht 12.12 = 144 Cubikfuß, und also alle 12 Schichten wären 144 . 12 = 1728 Cubikfuß. So hat auf eben die Art ein Cubikfuß 1728 Cubikzoll, und ein Cubikzoll 1728 Cubiklinien.

§. 351. Der Geometer rechnet gewöhnlich nach dem Decimalmaaße, also werden wir uns auch dieser Rechnung bey unsern jetzigen Betrachtungen bedienen. Eben so leicht, als wie bey der Ausmessung der Flächen, läßt sich hier eine Anzahl gegebener Einheiten von einer geringern Gattung, als z. E. Linien oder Zolle, in höhere verwandeln, man darf sie nur durch 1000 dividiren, oder weil bey 1 mit angehängten Nullen keine förmliche Division nöthig ist, nur allezeit von der rechten nach der linken Hand von der gegebenen Größe der geringern Ordnung drey Zahlen immer abschneiden, und selbige nach den geringern Ordnungen nennen, bis man an die höheste kömmt, zu der alle übrige Zahlen gehören, wenn noch welche da sind. Ein Exempel wird alles erläutern. Man hatte 567834569432 Cubiklinien durch 1000 dividirt, gäbe das Cubikzoll, und die Cubikzolle abermal durch 1000 dividirt, gäbe die Cubikfuß und so weiter. Weit kürzer streicht man immer drey Zahlen ab, und man hatte

$$567^{\circ}\ 834'\ 569''\ 432'''$$

oder 567 Cubikruthen, 834 Cubikfuß, 569 Cubikzoll, und 432 Cubiklinien.

Eben so leicht läßt sich eine solche aus verschiedenen cubischen Abmessungen zusammen gesetzte Größe in geringere Benennung verwandeln. Man hatte

$$34^{\circ}\ 50'\ 365''\ 36'''$$

das wären 340050365036 Cubiklinien.

Man setzt eine Null dahin linker Hand in die Klasse der geringern Ordnung, wenn nicht für jede Klasse sich drey Zahlen finden. Man streiche nur auf die vorher gelehrte Art die Zahlen ab, so bekömmt man $34^{\circ}\ 05'\ 365''\ 036'''$, aber da die Nullen vorne linker Hand bey jeder Abtheilung nichts gelten, $34^{\circ}\ 5'\ 365''\ 36'''$.

§. 352. Es könnte aber auch vorkommen, daß man Decimalcubikmaas in Duodecimalcubikmaas verwandeln sollte. Wer die Lehre von Verhältnissen gut inne hat, würde sich hier durch eigenes Nachdenken leicht helfen können. Wir wollen aber doch dieses etwas berühren. Wir nehmen dabey jetzt an, daß die **Ruthe** von beyden gleich lang sey, wie es gemeiniglich ist, nur daß bey dem einen nun diese Ruthe nachher nach der Duodecimalrechnung, und bey dem andern nach der Decimalrechnung getheilt ist. Nun wissen wir, wie viel die **Ruthe**, **Cubikfuß**, **Zoll** oder **Linien** sowol nach dem Decimal- als Duodecimalmaaße habe. Dieses lehrt uns, das gegebene Maas in ein anderes leicht zu verwandeln.

Man

Man setzt das gegebene Maas in einen Bruch, dessen Zähler die Anzahl der Füße, Zolle oder Linien, die gegeben sind, enthält, und der Nenner anzeigt, wie viel eine Ruthe, nach dem Maaße getheilt, Cubikfüße, Zolle oder Linien enthalte. Da die Ruthen von beyden Maaßen gleich seyn sollen, so muß diese Größe der Größe, worinn sie soll verwandelt werden, gleich seyn, welche zum Zähler ein x, weil man die Größe noch nicht weiß, und zum Nenner eine Zahl hat, die anzeigt, wie viel eine Cubikruthe, nach dem Maasse getheilt, Cubikfüße, Zolle oder Linien habe. Ein Exempel mag die Sache erläutern:

200 Cubikfuß Decimalmaas, wie viel sind es Duodecimalmaas? Es hat eine Cubikruthe 1000 Cubikfuß Decimalmaas, und in Duodecimalmaas 1728. Also:

$$\frac{200}{1000}\ \text{Cub. R.} = \frac{x}{1728}\ \text{Cub. Ruthen}$$

$$\text{also } \frac{200 \cdot 1728}{1000} = x$$

$$\text{oder } \frac{345600}{1000} = x$$

$$\text{oder } 345{,}6 = x.$$

Nun muß man noch wissen, was 6 Zehntel Cubikfuß Duodecimalmaas sind, und weil es nur Zehntel sind, hier in Zollen es suchen. Man

darf es nur mit 1728 multipliciren. 1728 . 0,6 = 1036,8 Duodecimalcubikzoll, und weil 0,8 Cubikzoll noch Cubiklinien enthält, so werden das wieder 0,8 . 1728 = 1382,4 Cubiklinien seyn. Also x = 345,6 Cubikfuß Duodecimalmaas wird 345 Fuß, 1036 Zoll, 1382 Cubiklinien seyn, welches 200 Cubikfuß Decimalmaasße gleich ist, wenn die Größe einer Ruthe bey beyden einerley ist. Man würde dieses auch durch die Proportion gefunden haben:

1000 : 1728 = 200 Cub. Fuß Dec. M. : x Duodec. Maas, und also x = 345,6 Cubikfuß Duodecimalmas u. s. f.

Noch ein Exempel Duodecimalcubikmaas in Decimalcubikmaas zu verwandeln. 108 Cubikfuß Duodecimalmaas, wie viel ist es im Decimalmaaße? Weil eine Cubikruthe Duodecimalmaas 1728 Cubikfuß, und im Decimalmaas 1000 Cubikfuß hat, so kann man die Gleichung also in einen Bruch setzen:

$$\text{also } \frac{108 \text{ Cub. R.}}{1728} = \frac{x \text{ Cub. R.}}{1000}$$

$$\text{folglich } \frac{108 \cdot 1000}{1728} = x$$

$$\text{oder } \frac{108000}{1728} = \text{wenn man dividirt}$$

62,5 Cubikfuß = x.

Aber

Aber 0,5 Cubikfuß = 0,5,1000 Cubikzoll = 500 Cubikzoll, also x = 62 Cubikfuß, 500 Cubikzoll Decimalmaas.

§. 353. Wenn man verschiedene andere Maaßen im Duodecimal: oder Decimalmaaße zu vergleichen hätte, so würde man das aus der Lehre von den Verhältnissen leicht finden, wenn man nur wüßte, wie sich diese Maaßen in Ansehung ihrer Länge verhielten. Uns ist es zu weitläuftig, hierüber Betrachtungen anzustellen, die mehr in die praktische Geometrie gehören.

§. 354. Wir gehen nun zur wirklichen Ausmessung der Körper, und der Würfel selbst mag der erste Körper seyn. Wir wissen schon, wie er ausgemessen wird aus §. 350, wenn er genau eine Cubikruthe, Fuß oder Zoll enthält. Wenn das aber auch nicht wäre, so multiplicirt man auf alle Fälle seine Seite dreymal mit sich selbst, und man hat seinen cubischen Inhalt. Denn Fig. 219 CE, ED wird den quadratischen Inhalt der Fläche CHED zeigen, und weil die Höhe FE den andern Seiten gleich ist, die Multiplikation mit FE oder CE, ED, FE oder CE^3 den Inhalt des Würfels. Man reducirt alles vorher auf die geringste Benennung, ehe man die Multiplikation anfängt. Man begreift leicht, warum man also verfahren muß, weil man eine solche Einheit zum Maaße annehmen muß, welche man genau auf die Fläche des Körpers CHED

und auch über einander legen kann. Wir werden nun forthin allezeit Decimalmaas gebrauchen. Es sey Fig. 219 die Seite eines Würfels ED = 2 Fuß, 3 Zoll, 5 Linien, welches = 235 Linien ist, also der Inhalt des Würfels ist 235.235.235 Cubiklinien = 12977875 Cubiklinien, denn wenn jede Seite = 235 Linien ist, so lassen sich auf die Fläche CH, CD 235.235 kleine Körper legen, die eine Linie breit, tief und hoch sind, oder 55225 Würfel, jeder von einer Cubiklinie, und solcher Schichten lassen sich 235 über einander setzen. Diese machen nun nach §. 351 12′, 977″, 875‴, oder 12 Cubikfuß, 977 Cubikzoll, 875 Cubiklinien aus. Nennt man allgemein die Seite eines Würfels ED = L, so ist sein cubischer Inhalt also L^3,

Die Oberflächen eines Würfels sind eben so leicht auszumessen, da er von sechs Oberflächen bedeckt wird, welche alle gleich groß sind, und da der Inhalt einer derselben aus der Multiplikation der Seite mit sich selbst gefunden wird, und also allgemein L^2 ist, so wird aller sechs Oberflächeninhalt = $6L^2$ seyn. Also da in dem eben gegebenen Exempel L = 2 Fuß, 3 Zoll, 5 Linien = 235 Linien, so ist also $L^2 = 235.235 = 55225$ Quadratlinien, und $6L^2 = 55225.6 = 331350$ Quadratlinien nach §. 124 = 33 Fuß, 13 Zoll, 50 Linien Quadratmaas, und eine Oberfläche wird 5 Fuß, 52 Zoll, 25 Linien quadratischen Inhalts seyn.

§. 355.

§. 355. Aus allen vorhergehenden Betrachtungen werden wir auch nun leicht einsehen, wie man ein Parallelepipedon, als z. E. Fig. 203 oder 207 ausmißt. Eben als einen Würfel, man berechne den quadratischen Inhalt seiner Grundfläche, und multiplicire dieses mit seiner Höhe. Es ist bey einem Parallelepipedon gleich viel, welche Seite man zu seiner Grundfläche annimmt. Es sey das gerade Parallelepipedon abcd Fig. 207 auszumessen. Es sey ed = 9, ce = 5 7″, und die Höhe ac = 7′, so würden diese Maaßen zu Zollen gemacht, weil ce noch Zolle enthält, folgende seyn: ed = 90 Zoll, ce = 57 Zoll, und ac = 70 Zoll, und der ganze cubische Inhalt dieses Parallelepipedons = 90 . 57 . 70 Cubikzolle = 359100 Cubikzoll = 359′ 100″ zehntheilichtes Cubikmaas. Fig. 203. 207.

§. 356. Wir haben aus §. 323 gesehen, daß ein schiefes Parallelepipedon einem geraden, das mit ihm einerley Höhe und Grundfläche hat, vollkommen gleich sey, und daß man also das gerade an seine Stelle setzen könne. Man wird es also auch als ein gerades ausmessen können, nemlich durch die Multiplikation seiner Grundfläche mit seiner Höhe. Ein Exempel mag dieses erläutern. Es sey Fig. 220 das schiefe Parallelepipedon ADFI auszumessen, dessen Grundfläche EFHI ein Rhombus oder Rhomboides, also nicht geradwinklicht sey, um das Exempel desto unterrichtender zu machen. Fig. 220.

Man

Man lasse von einem willkührlichen Punkte C seiner obern Grundfläche ein Perpendikel auf die untere fallen, hier ist es also das Perpendikel CG. Das ist also die Höhe des Parallelepipedons. Die Größe seiner Grundfläche findet man, wenn man eine Seite El als die Breite annimmt, und nun (da dieses ein Rhomboides ist) seine Tiefe durch ein von der entgegen gesetzten Linie LK gefälltes Perpendikel FH auf die untere sucht.

Es sey nun die Höhe = CG = 7°, die Breite der Grundfläche El = 9′, und FH das Perpendikel = der Tiefe der Grundfläche = 5′ 7″. Oder alles zur kleinsten Benennung gebracht: CG = 70″, El = 9″, FH = 57″, also der cubische Inhalt des Parallelepipedons = 700 . 90 . 57 = 3591000 Cubikzoll = 3° 591′, oder 3 Cubikruthen, 591 Cubikzoll zehntheilichtes Maas.

§. 357. Die Oberflächen des Parallelepipedons werden, wie jedes Parallelogram, durch die Multiplikation ihrer Breite in ihre Tiefe ausgerechnet, und will man den Inhalt aller Oberflächen zusammen haben, zu einander addirt, oder weil zwey entgegen gesetzte allezeit gleich sind, allezeit zwey zusammen genommen, und denn addirt, wie das Exempel deutlicher zeigen wird.

Exempel: Nach §. 355 war Fig. 207 ed = 9′, ce = 5′ 7″, und ac = 7′; oder ed = 90″, ce = 57″, und ac = 70″; also die Grundfläche ecfd = 90 . 57 = 5130 □ Zoll = 51′ 30″ Quadratmaas. Dieser Grundfläche ist gleich die

Grund,

Grundfläche ahgb, also auch = 51′ 30″, und beyde zusammen addirt 102′ 60″ = 1 Quadratruthe, 2 Quadratfuß, 60 Quadratzoll. Der Fläche ehbd Inhalt ist gleich ed . eh = 90 . 70 = 6300 □ Zoll = 63′ Quadratmaas, und weil ihr die Fläche aecf gleich ist, so machen beyde zusammen 126 Quadratfuß aus, welches ı̊ 26′ ist. Der Fläche ahce Inhalt wird berechnet durch die Multiplikation ce mit ac, hier 57″ . 70″ = 3990 Quadratzoll = 39 Quadratfuß, 90 Quadratzoll, und weil die ahce und gbfd gleich sind, so machen beyde zusammen 79 Quadratfuß, 80 Quadratzoll aus, also wenn man alle Oberflächen zusammen addirt, nemlich

cefd	+ ahgb	= ı̊ 2′ 60″
ehbd	+ aefc	= ı̊ 26′ —″
ahce	+ gbfd	= — 79′ 80″

also die Summe des Inhalts aller Oberflächen. 3 Q. R. 8 Q. F. 40 Q. Z.

§. 358. Wir haben in dem vorhergehenden Kapitel weitläuftig genug gezeigt, daß alle **prismatischen** Körper, nemlich das eigentliche Prisma, Cubus, Parallelepipedon und Cylinder, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen hätten, gleich wären. Wir folgerten daraus, daß man alle Arten von Prismen und alle Cylinder in Parallelepipedons verwandeln könnte. Jetzt im vorhergehenden Paragraphen haben wir gelehrt, wie man ein Parallelepipedon ausmessen sollte.

sollte. Die Folge ist nun ganz natürlich, daß man also alle Prismen auf eben die Art ausmessen muß, als ein Parallelepipedon, weil es mit einem Parallelepipedon von gleicher Grundfläche und Höhe gleiches Inhalts ist. Man mißt also ein Prisma, es sey dreyseitig oder mehrseitig, aus, wenn man den quadratischen Inhalt einer seiner Grundflächen mit seiner Höhe, aber mit eben dem Maas genommen, multiplicirt. Da die Grundfläche eines Prisma, es sey drey- oder mehrseitig, sich allezeit in Triangel eintheilen läßt, da wir §. 129 beym Flächenmaas gelernt haben, ein Dreyeck auszumessen, und da die Summe des Inhalts aller Dreyecke in einer Grundfläche eines Prisma nothwendig dem ganzen quadratischen Inhalt der Grundfläche gleich seyn muß, so haben wir nicht nöthig, etwas weiter davon zu sagen, und dürfen nur diesen Paragraphen noch durch ein Paar Exempel erläutern.

Fig. 214. Exempel: Es sey Fig. 214 das dreyeckte gerade Prisma ABCDEF auszurechnen. Seine Grundflächen sind ABC oder DFE. Man berechne erstlich den quadratischen Inhalt einer seiner Grundflächen, als ABC nach §. 129, dieser mag 1 Fuß, 20 Zoll, 40 Linien Quadratmaas seyn, welches 12040 Quadratlinien ausmacht. Die Höhe, oder in dieser Lage vielmehr Länge des Prisma ist AD, diese mag 1 Fuß, 5 Zoll, 6 Linien Längenmaas, oder 156 Linien seyn. Der Inhalt wird also 12040 . 156 = 1878240 Cubik-

biklinien seyn, welches 1′ 878″ 240‴ Cubikmaas ausmacht.

Anderes Exempel: Es sey das vielseitige Prisma Fig. 212 ABFG auszurechnen. Man suche erst den quadratischen Inhalt der einzelnen Triangel FKG, KGH und KIH. Dieser Triangel Inhalt zusammen addirt, wird der Inhalt der ganzen Grundfläche KFGHI seyn. Weil dieses Prisma ein gerades seyn soll, so ist eine seiner Seitenlinien seine Höhe, es sey hier DG. Die Länge derselben mit eben dem Maaße gemessen, und mit dem Inhalte der Grundfläche multiplicirt, giebt den cubischen Inhalt des ganzen Prismatis. Es sey der □ Inhalt des Prisma Fig. 212 Fig. 212.

$\triangle KFG = 30'' \; 25'''$
des $\triangle KGH = 26'' \; 48'''$
des $\triangle KIH = 42'' \; 52'''$

also die Grundfläche $KFGHI = 99'' \; 25'''$
welches 9925 Quadratlinien sind. Die Höhe DG mag 20″ 9‴ seyn. Man multiplicirt also 9925‴ mit 209‴, dieses macht 2074325 Cubiklinien = 2 Fuß, 74 Zoll, 325 Linien Cubik- oder Körpermaas.

§. 359. Weil ein schiefes Prisma Fig. 187 mit einem geraden von gleicher Grundfläche und Höhe völlig gleichen Inhalts ist, so wird es auf eben die Art als das gerade ausgemessen werden müssen, nur versteht es sich von selbst, daß man seine Höhe durch ein Loth finden müsse, welches Fig. 187.

ches man von einem willkührlichen Punkt seiner obern Grundfläche auf die untere fallen läßt; denn weil die beyden Grundflächen eines schiefen Prisma in zwey parallele Ebenen fallen, so ist das Maas der Entfernung dieser beyden Ebenen, welches die Höhe des Prismatis ist, ein Loth, welches man von einer auf die andere herabläßt.

§. 360. Weil die Seitenflächen eines ge-
Fig. 212. raden Prismatis Fig. 212 Rechtecke sind, so wird ihr quadratischer Inhalt gefunden, wenn man ihre Breite mit ihrer Höhe multiplicirt, oder wie hier DG mit GH, DG mit FG, DG mit KF, DG mit KI, DG mit IH (denn die Höhe aller dieser Rektangel ist gleich). Alle diese einzelne Produkte zusammen addirt, giebt den Inhalt aller Seitenflächen zusammen. Addirt man noch dazu den quadratischen Inhalt der beyden Grundflächen ABCDE und KFGHI, so hat man den quadratischen Inhalt der ganzen Oberfläche.

Fig. 187. Weil die Seitenflächen des schiefen Prisma Fig. 187 rhomboidische Flächen sind, so muß ihr quadratischer Inhalt auf die Art berechnet werden. Die Summen aller dieser Flächen giebt, wie beym geraden Prisma, aller Seitenflächen Inhalt, und dazu den Inhalt der Grundflächen addirt, giebt die ganze Oberfläche.

§. 361. Jeder Cylinder, der mit einem Parallelepipedo gleiche Grundfläche und Höhe hat, ist auch mit ihm von gleichem Inhalte, wie

uns

uns der §. 340 lehrte. Er wird also gleichfalls wie ein Parallelepipedon ausgemessen, nemlich der gerade Cylinder Fig. 193 durch die Multipli Fig. kation des quadratischen Inhalts seiner Grundflä- 193. che EHGF in das Maas seiner Höhe AE.

Wir wissen aus §. 232, daß, wenn man ganz allgemein den Radius eines Cirkels = r setzet, 1 : P als das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie annimmt, (da es denn 3,141... bedeutet) alsdenn der Inhalt der Cirkelfläche = r^2P sey. Wenn also der Durchmesser der Grundfläche eines Cylinders gegeben ist, so ist auch Fig. 193 der Radius IG bekannt, welcher = r ist; also auf diese Art der Inhalt der Grundfläche leicht zu finden. Nun wollen wir allgemein die Höhe eines Cylinders = a setzen, so wird, da diese Höhe mit der Grundfläche des Cylinders multiplicirt werden muß, um seinen cubischen Inhalt zu finden, der allgemeine Ausdruck für den cubischen Inhalt eines jeden Cylinders folgender seyn ar^2P.

Exempel: Es sey Fig. 193 IG = 9″ 3‴ = r, und die Höhe AE = 1′ 6″ = a, also r = 93 Linien, und a = 160 Linien, und $r^2 = 93 \cdot 93 = 8649$. Folglich $ar^2P = 160 \cdot 8649 \cdot 3{,}141\ldots = 4346641{,}440$ Cubiklinien, welches 4 Fuß, 346 Zoll, 641 Linien, und noch $\frac{440}{1000}$ Cubiklinien ausmacht. Ein solcher kleiner Bruch, wenn er in Linien ist, kann bey den mehrsten Fällen negligirt werden.

Fig. 194. Weil ein schiefer Cylinder Fig. 194 mit einem geraden von gleicher Grundfläche und Höhe gleiches Inhalts ist, so wird er auch gleichfalls eben so ausgemessen. Seine Höhe oder a sucht man durch ein Loth von seiner obern Grundfläche mit der Ebene, worauf er steht, herabgelassen, wie bey dem schiefen Prismate.

§. 362. Die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders auszurechnen, erfordert wenig Schwierigkeit. Es ist nicht eben so mit eines schiefen Cylinders Oberfläche, daher wir auch nicht davon in diesen Anfangsgründen reden. Die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders (die beyden Grundflächen nicht mit zugenommen) rechnet man aus, wenn man Fig. 210 eine der Peripherien der Grundflächen, wie hier ADBE, in eine gerade Linie verwandelt, und diese mit der Höhe BC des Cylinders multiplicirt. Man verwandelt dadurch die Oberfläche des Cylinders in ein Viereck, dessen Inhalt man auf die Art findet. Daß dieses Verfahren richtig sey, folgt schon aus der Natur der Sache, weil man doch die krumme Oberfläche des Cylinders in so viel kleine Theile durch parallel mit einander gezogene Linien nr, ms verwandeln kann, als man will. Sind diese Linien unendlich nahe an einander gezogen, so kann man die Zwischenräume derselben an beyden Peripherien, oder den kleinen Bogen nm und rs, als eine gerade Linie ansehen. Die ganze krumme Oberfläche des Cylinders so eingetheilt

Fig. 210.

theilt und an einander gesetzt, würde ein Rektangel ausmachen können, dessen Grundlinie die in eine gerade Linie verwandelte Peripherie der Grundfläche, und dessen Höhe die Höhe des Cylinders wäre.

Wir finden im §. 224, daß, wenn ganz allgemein der Diameter eines Cylinders = d gesetzt wird, und das Verhältniß des Diameters zur Peripherie 1 : P angenommen wird, alsdenn der allgemeine Ausdruck für jede Peripherie sey d.P, oder da d = 2 Radiis, auch 2rP, wo P = 3,141... bedeutet.

Nun wollen wir allgemein die Höhe eines jeden Cylinders = a nennen. Da diese mit der in eine gerade Linie (so viel es sich nemlich thun läßt) verwandelten Peripherie soll multiplicirt werden, um den quadratischen Inhalt der kommenden Oberfläche des Cylinders herauszubringen, so wird also der Inhalt der krummen Oberfläche des Cylinders = a.d.r, oder auch weil d = 2 Radiis = 2r, so ist der Inhalt der Oberfläche des Cylinders = a.2r.P = 2a.r.P.

Exempel: Es sey Fig. 210 der Diameter des Cylinders AB = 5′ 6″, welches hier also d ist, die Höhe BC sey = 24′ 6″, welches hier also = a ist; so wird der Inhalt der krummen Oberfläche, ohne die beyden Grundflächen, = a.d.P = 56″.246″.3,141 = 43270,416 Quadratzoll ausmachen. Dieses sind 4 Quadratruthen, 32 Quadratfuß, 70 Quadratzoll, 416 Quadratlinien.

Wir wissen, daß in allgemeinen Ausdrücken der Inhalt der Cirkelfläche, wenn d den Diameter bedeutet, $= \frac{d^2P}{4}$ nach §. 232, das ist also auch allgemein der Inhalt der Grundfläche eines Cylinders. Solcher Grundflächen sind nun beym Cylinder zwey, die obere und untere. Wenn man den Inhalt beyder Grundflächen wissen will, so wäre der $\frac{2d^2P}{4} = \frac{d^2P}{2}$. Also wollte man die ganze Oberfläche des Cylinders, die beyden Grundflächen mitgenommen, wissen, so müste man diese Formel zur ersten Formel für die krumme Oberfläche addiren, das wäre also $\frac{d^2P}{2} + adP = \frac{d^2P}{2} + \frac{2adP}{2} = \frac{(d+2a)}{2} d.P =$ der ganzen Oberfläche eines Cylinders.

Exempel: Es sey Fig. 210 ab $= 8''$, hier d, bc $= 20''$, hier $= a$, so ist also die ganze Oberfläche des Cylinders $= \frac{(8+2.20)}{2} .8.$ 3,14... $= 48.4.3,141 = 603,072$ Quadratzoll $= 6$ Quadratfuß, 3 Quadratzoll, 7 Quadratlinien, 2 Quadratscrupel.

§. 363. Eine cylindrische Röhre Fig. 221 ist, wenn in einem Cylinder ABCD sich eine cylin-

Fig. 221.

lindrische Hölung abcd findet, welche aber mit dem Cylinder ABCD einerley Axe nm hat. Man könnte also in diese cylindrische Hölung einen Cylinder abcd hineinstecken, welcher mit dem grossen ABCD einerley Höhe nm, aber verschiedene Grundflächen hätte, wie aus der Figur auch gleich sichtbar ist. Eine jede krumme Röhre, ein gerades Futteral oder Etui, eine Perspektivröhre, stellt auf die Art eine cylindrische Röhre vor. Man wird bald auf die Gedanken kommen, daß die cylindrische Röhre kann cubisch berechnet werden, wenn man sie erst als ganz voll ansieht, und als einen gewöhnlichen Cylinder berechnet. Ferner wenn man sich in die cylindrische Hölung abermals einen vollen Cylinder gedenkt, und den wieder cubisch ausrechnet, und was man hier erhalten hat, von dem erstern abzieht, so bleibt natürlich die Röhre AaCc bBdD übrig Man muß dabey den Durchmesser der Grundfläche der ganzen Röhre, die Hölung mitgenommen, oder die CD wissen, und auch den Durchmesser der Grundfläche der Hölung, oder die cd.

Wir wissen aus §. 361, daß der cubische Inhalt eines Cylinders sey, wenn a = seiner Höhe und r = dem Radius seiner Oberfläche gesetzt wird, und 1 : P das allgemeine Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie sey, daß denn der

cubische Inhalt des Cylinders $a . r^2 P$.

Nun sey der Radius der Grundfläche der ganzen Röhre, die Hölung mitgenommen, oder die mD = R, die Höhe nm = a, so wäre der Inhalt

der Röhre, wenn sie voll wäre, also ein Cylinder wäre $= a . R^2P$. Es sey der Radius der Grundfläche der Hölung, oder die $md = r$. Die Höhe ist mit dem vorigen $= a$. So würde der Inhalt eines hier eingeschobenen Cylinders seyn $= a . r^2P$. Diese beyden Werthe müssen nun von einander abgezogen werden, um den Inhalt der Röhre zu finden. Er ist also $= a . R^2P - a . r^2P$, und der Ausdruck verkürzt ist, weil a und P gemeinschaftliche Faktoren $= (R^2 - r^2)\, a . P$ cubischem Inhalt der cylindrischen Röhre.

Exempel: Es sey $MD = R = 9$ Zoll, $md = r = 4$ Zoll, $nm = a = 5$ Fuß, 3 Zoll $= 53$ Zoll, so ist der Inhalt der Röhre AaCc bBdD $= (9^2 - 4^2)\, 53 \cdot 3{,}141 = (81 - 16)\, 53 \cdot 3{,}14 = 65 \cdot 53 \cdot 3{,}141 \ldots = 10820{,}745$ Cubikzoll, $=$ 10 Cubikfuß, 820 Cubikzoll, 745 Cubiklinien.

Hätte man eine vierseitige, fünfseitige, oder überhaupt prismatische Röhre cubisch auszumessen, so lernt man überhaupt durch das Verfahren bey der cylindrischen Röhre, wie man auch hiebey zu Werke gehen müsse, nemlich man berechnet den Körper, als ob er voll wäre, berechnet ferner den Körper, der in der Röhre stecken könnte, und zieht diesen von dem erstern ab, so behält man den Inhalt der Röhre übrig.

§. 364. Wir gehen zu der Berechnung des cubischen Inhalts der Pyramiden und Kegel. Erstlich von der Pyramide. Wir haben aus

§. 338,

§. 338, 339 gelernt, daß jede Pyramide der dritte Theil eines prismatischen Körpers sey, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. Hieraus folgt ihre cubische Ausmessung sehr leicht. Man darf nur eine jede Pyramide als einen prismatischen Körper berechnen, und alsdenn das Produkt durch 3 dividiren. Man berechnet nach §. 358 den cubischen Inhalt eines prismatischen Körpers durch die Multiplikation seiner Grundfläche in seine Höhe. Dieses Produkt durch 3 dividirt, giebt den cubischen Inhalt der Pyramide. Es sey Fig. 222 der Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide BEDF = b, ihre Höhe AC = a, so ist nach diesen Grundsätzen ihr cubischer Inhalt = $\frac{ab.}{3}$ Fig. 222.

Wie man bey Pyramiden, wo ein Loth von ihrer Spitze nicht in ihre Grundfläche fällt, ihre Höhe doch durch ein Loth von ihrer Spitze auf die Ebene ihrer Grundfläche, oder auf die Ebene, darauf sie steht, messen müsse, lehrt die Natur der Sache.

Weil $\frac{ab}{3} = \frac{1}{3}ab$, so pflegt man obigen Ausdruck auch also ins Deutsche zu übersetzen. **Der cubische Inhalt einer Pyramide wird ausgemessen durch die Multiplikation des quadratischen Inhalts ihrer Grundfläche in den dritten Theil ihrer Höhe.**

Exempel: Es sey Fig. 222 der Inhalt der Grundfläche BEDF = 1′ 20″ 40‴ Quadratmaas, also = 12040‴ = b. Die Höhe AC mag 5′ 3″ 7‴ = 537‴ = a seyn, so ist ihr cubischer Inhalt = $\frac{1}{3}$ ab = $\frac{357}{3}$. 12040 = 179 . 12040 = 2155160 Cubiklinien, welches 2′ 155″ 160‴ Cubikmaas ausmacht.

§. 365. Weil einer jeden Pyramide Seitenflächen Triangel sind, so muß ihr Flächeninhalt, wie der Flächeninhalt der Triangel ausgerechnet werden. Wenn man Fig. 222 von der Spitze der Pyramide A, wo auch die Spitze eines jeden Triangels ist, welche die Seitenflächen ausmachen, Perpendikel, als AH, AG u. s. w. auf die Grundlinie eines jeden Triangels, als BE, DF herabfallen läßt, so ist jeder Perpendikel die Höhe eines Triangels, welche die Seitenflächen ausmachen. Jede Höhe, oder jeden Perpendikel mit der Grundlinie, welche ihm zugehört, multiplicirt, und das Produkt durch 2 dividirt, giebt den Inhalt einer Seitenfläche. Addirt man den Inhalt aller Seitenflächen, welche man auf die Art gefunden hat, zusammen, so hat man den quadratischen Inhalt aller Seitenflächen. Nimmt man noch den quadratischen Inhalt der Grundfläche dazu, so bekömmt man den quadratischen Inhalt der ganzen Oberfläche der Pyramide.

§. 366.

§. 366. Wenn man von einer Pyramide, sie mag von viel oder wenig Seiten seyn, wie Fig. 223 ABDFE ein Stück Abdfe durch eine mit der Grundfläche BFDE parallele Ebene abschneidet, so heißt das überbliebene Stück der Pyramide bdfe BDFE eine abgekürzte Pyramide. Es läßt sich dieser abgekürzten Pyramide Inhalt gleichfalls berechnen, und ganz allgemein angeben. Die Berechnung ist auch nicht schwer, aber nur etwas weitläuftig. Wir wollen suchen, sie recht deutlich zu machen, und haben daher eine Zeichnung erwählt, da ein Perpendikel von der Spitze der Pyramide auf die Ebene, worauf sie steht, noch in ihre Grundfläche fällt, obschon sonst, was wir sagen werden, sich bey allen Pyramiden anbringen läßt, und von allen Pyramiden wahr ist. Fig. 223.

Wir wollen erst einmal gedenken, das abgeschnittene Stück Abdfe befinde sich noch an der Pyramide. Von dem Stücke beBE, das wir haben, wissen wir die Höhe, oder können sie messen. Weil AC ein Perpendikel von der Spitze ist, so ist die Höhe des Stücks be BE = cC. Wir wollen dieses cC = f nennen.

Die Höhe AC des abgeschnittenen Stücks ist uns noch unbekannt. Es heiße also Ac = x. Die Grundfläche BDFE heiße = B, und die obere Grundfläche, wo das Stück abgeschnitten ist, die bdfe, heiße = S. Es ist dieses auch die Grundfläche des abgeschnittenen Stücks Abdfe,

welches man als eine besondere Pyramide betrachten kann.

Sowol B als S sind bekannt, oder lassen sich ausmessen. Weil $cC = f$, und $AC = x$ war, so wird $AC = f + x$ seyn, welches die Höhe der ganzen Pyramide wäre, wenn das Stück nicht daran fehlte. Bequemlichkeits halber im Rechnen wollen wir diese $AC = f + x$ einmal $= y$ nennen, weil uns doch, da wir x nicht kennen, seine Länge unbekannt ist.

Wäre die Pyramide noch ganz, so wäre ihr cubischer Inhalt nach §. 364 $= \frac{yB}{3} =$ dem Inhalt der Pyramide ABDFE. Der Inhalt des Stücks Abdfe, das auch als eine Pyramide zu betrachten ist, wäre nach eben dem § $= \frac{xS}{3}$.

Zieht man dieses kleine Stück von der ganzen Pyramide ab, so weiß man den Inhalt der abgekürzten Pyramide beBE, also der Inhalt der abgekürzten Pyramide $beBE = \frac{yB}{3} - \frac{xS}{3}$. Jetzt wird es darauf ankommen, daß wir für y und x bekannte Werthe suchen, und selbige in diese Formel substituiren.

Wir bemerken gleich, daß, wenn wir uns die ganze Pyramide vorstellten, so daß das abgeschnittene Stück darauf gesetzt wäre, weil der Schnitt mit der Grundfläche parallel ist, auch die Umfangslinien des Schnitts mit den Umfangs-

fangslinien der Grundfläche parallel sind, also die Triangel ABD und Abd ähnlich. Ferner haben wir von dem Orte, wo das Perpendikel AC durch den Schnitt geht, nach b die Linie cb gezogen, und wo es die Grundfläche erreicht, nach B die Linie BC. Diese bc und BC sind wieder parallel, weil sie in parallelen Ebenen liegen nach §. 273, also die Triangel ABC und abc sind abermals ähnlich. Ferner wissen wir, daß die mit der Grundfläche parallelen Schnitte ähnliche Figuren hervorbringen nach §. 311, und daß also B der S ähnlich sey. Und endlich wissen wir, daß ähnliche Figuren sich verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten nach dem §. 155, also wird gelten B : S = BDq : bdq.

Aus allen diesen Betrachtungen gelten nun folgende Schlüsse:

AB : Ab = BD : bd

AB : Ab = BC : bc

folglich BD : bd = BC : bc

aber AC : Ac = BC : bc

also BD : bd = AC : Ac

daher auch BDq : bdq = ACq : Acq

aber B : S = BDq : bdq nach §. 155

folglich B : S = ACq : Acq.

Weil

Weil $AC = y$ und $Ac = x$, so gilt also

$$B : S = y^2 : x^2$$

folglich

$$\frac{S}{B} = \frac{x^2}{y^2}$$

folglich

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{B}} = \frac{x}{y}$$

$$y$$

$$\frac{y\sqrt{S}}{\sqrt{B}} = x.$$

Aber weil auch $x = AC - cC$, und $AC = y$, und $cC = f$ (aus dem vorhergehenden), so kann man auch für x den Ausdruck setzen $x = y - f$. Wir haben also zwey Werthe für x, die wir in die Gleichung setzen können. Also gilt nun die Gleichung:

$$x = \frac{y\sqrt{S}}{\sqrt{B}} = y - f$$

$$\cdot \sqrt{B}$$

$$y\sqrt{S} = y\sqrt{B} - f\sqrt{B}$$

also

$$y\sqrt{S} + f\sqrt{B} = y\sqrt{B}$$

und

$$f\sqrt{B} = y\sqrt{B} - y\sqrt{S} = (\sqrt{B} - \sqrt{S})\,y$$

folglich

$$\frac{f\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{S}} = y.$$

Nun

Nun war $x = \frac{y\sqrt{S}}{\sqrt{B}}$ oder $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{B}} . y$. Wenn wir nun statt y in diesem Werthe von x das gefundene substituiren, so wird

$$x = \frac{\sqrt{S} . f\sqrt{B}}{\sqrt{B}\ \sqrt{B}-\sqrt{S}} = \frac{f\sqrt{B} . \sqrt{S}}{(\sqrt{B}-\sqrt{S}) . \sqrt{B}}$$

und weil $\sqrt{B}$ im Zähler gegen $\sqrt{B}$ im Nenner aufgeht, so bleibt $x = \frac{f\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}}$.

Da wir nun Werthe für x und y in lauter bekannten Größen haben, so wird sich die Formel für den Inhalt der abgekürzten Pyramide bald in bekannten Werthen ausdrücken lassen. Sie war aus dem vorhergehenden Inhalt der abgekürzten Pyramide $\frac{yB}{3} - \frac{xS}{3}$, für y und x die gefundenen Werthe substituirt

$$= \frac{f\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}} . \frac{B}{3} - \frac{f\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}} . \frac{S}{3}$$

$$= \frac{Bf\sqrt{B}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{S})} - \frac{Sf\sqrt{S}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$$

und weil beyde Brüche einerley Nenner haben;

$$= \frac{Bf\sqrt{B}-Sf\sqrt{S}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{S})}$$

anders ausgedrückt $= \frac{(B\sqrt{B}-S\sqrt{S}) . f.}{(\sqrt{B}-\sqrt{S})\ 3}$

Dieses

Dieses ist der Inhalt der abgekürzten Pyramide. Allein es läßt sich in dieser Formel der Nenner von seiner Irrationalität noch befreyen, wenn man Zähler und Nenner desselben mit $\sqrt{B} + \sqrt{S}$ multiplicirt, welches, wie bekannt ist, den Bruch nicht ändert,

also der Zähler $B\sqrt{B} - S\sqrt{S}$
multiplicirt mit $\sqrt{B} + \sqrt{S}$

$$+ B\sqrt{B}\sqrt{S} - S^2$$
$$+ B^2 - S\sqrt{B}\sqrt{S}$$

$$B^2 + B\sqrt{B}\sqrt{S} - S\sqrt{B}\sqrt{S} - S^2.$$

Oder bequemer ausgedrückt, weil $\sqrt{B} \cdot \sqrt{S} = \sqrt{BS}$, und zwey Werthe einerley Faktoren gemein haben, $= B^2 - S^2 + (B - S)\sqrt{BS}$. Das wäre der Zähler.

Nun der Nenner $\sqrt{B} - \sqrt{S}$
$\sqrt{B} + \sqrt{S}$

$$+ \sqrt{B} \cdot \sqrt{S} - S$$
$$+ B - \sqrt{B} \cdot \sqrt{S}$$

$$B - S.$$

Also der Bruch, welcher den Werth der abgekürzten Pyramide ausdrückt, wäre nun

$$\frac{B^2 - S^2 + (B - S)\sqrt{BS}}{B - S} \cdot \frac{1}{3}$$

Dieser

Dieser läßt sich nun noch kürzer ausdrücken, weil $B^2 - S^2$ entsteht durch die Multiplikation von $(B+S).(B-S)$, also dieses statt $B^2 - S^2$ substituirt, so wird der Ausdruck

$$\frac{(B+S).(B-S)+\sqrt{BS}.(B-S).f.}{B-S}$$

Hier fällt $B-S$ in den beyden Gliedern des Zählers gegen $B-S$ im Nenner weg. Es bleibt also noch $(B+S+\sqrt{BS}).f = \frac{(B+S+\sqrt{BS})}{3}.f =$ dem Inhalt der abgekürzten Pyramide. Man addirt also erstlich beyde Grundflächen der abgekürzten Pyramide; addirt noch dazu den Werth der Quadratwurzel, welche man aus dem Produkte beyder Grundflächen in einander gezogen hat; multiplicirt diese Summe mit der Höhe der abgekürzten Pyramide, und dividirt dieses alles durch 3, so hat man den Inhalt der abgekürzten Pyramide.

Exempel: Es sey Fig. 223 die Grundfläche BDEF $= 68\,4^{\square} = 6840$ Quadratzoll Quadratmaas, dieses ist hier $= B$; es sey ferner die Grundfläche bdef $= 24\,12'' = 2412$ Quadratzoll, dieses ist hier $= S$; die Höhe Cc sey $8\,1''$ oder 81 Zoll, dieses ist hier $= f$, so ist $B+S = 6840 + 2412 = 9252$, oder $\sqrt{BS} = \sqrt{6840 . 2412} = \sqrt{16498080} = 4061{,}8$; also ist hier

$$(B+S+\sqrt{BS})f = \frac{(9252+4061{,}8)\,81}{3} =$$

13313,8 . 27 = 359472,6 Cubikzoll = 359 Cubikfuß, 472 Cubikzoll, 600 Cubiklinien.

Anmerkung. Man hat noch eine andere Formel für die cubische Ausrechnung einer abgekürzten Pyramide, welche aber falsch ist, da die Buchstaben eben das als in dieser Formel bedeuten. Sie heißt $\frac{(B+S)^2 f}{}$. Siehe Herr Hofrath Käſtners Mathem. 1ſter Theil S. 335 der zweyten Ausgabe. Nach dieser Berechnung wäre der Inhalt dieſer abgekürzten Pyramide = 374 Cubikfuß, 706 Cubikzoll, alſo 15′ 234″ 600‴ gröſſer, als der wahre Inhalt.

Das abgeſchnittene Stück der Pyramide Abdfe Fig. 223 iſt nach dieſer Formel $= xS = \frac{f\sqrt{S}}{\sqrt{B}-\sqrt{S}} . S = \frac{Sf\sqrt{S}}{(\sqrt{B}-\sqrt{S})^3}$, wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{B}+\sqrt{S}$ multiplicirt, $= \frac{S^2 f + Sf\sqrt{BS}}{(B-S).3} = \frac{(S+\sqrt{BS}).Sf}{(B-S)^3}$ leicht zu berechnen iſt. Die Seiten der abgekürzten Pyramide, als DEde werden als Vierecke, die zwey parallele Seiten, DE und de, haben, nach §. 131 berechnet, wenn man ihren quadratiſchen Inhalt ſucht. Die Summe dieſer Vierecke macht den quadratiſchen Inhalt aller Seitenflächen zuſammen, und die Grundflächen DBFE und dbfe dazu addirt, den quadratiſchen Inhalt

der

der ganzen Oberfläche der Pyramide aus, wie das auch ein jeder leicht selbst einsehen wird.

§. 367. Wir haben aus §. 337 gelernt, daß Pyramiden und Kegel, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, gleiches cubischen Inhalts sind. Wir wissen auch aus §. 343, daß Kegel auch der dritte Theil eines prismatischen Körpers sind, der mit ihnen gleiche Grundfläche und Höhe hat. Hieraus folgt schon von selbst, wie man den cubischen Inhalt eines Kegels ausrechnet. Man berechnet ihn als einen prismatischen Körper von gleicher Grundfläche und Höhe, und dividirt das Produkt aus der Grundfläche und Höhe durch 3.

Wenn man des Kegels Fig. 224 Grund- Fig.
fläche ADB = A nennt, seine Höhe CE = f setzt, 224.
so ist also der ganz allgemeine Ausdruck für den cubischen Inhalt jedes Kegels $= \frac{fA}{3}$. Allein da die Grundfläche A des Kegels eine Cirkelfläche ist, und wir wissen, daß, wenn der Radius einer Cirkelfläche gegeben ist, folgender allgemeiner Ausdruck gelte $A = R^2P$, oder wenn D den Diameter des Cirkels bedeutet, $a = \frac{D^2P}{4}$, wo P in beyden Ausdrücken das andere Glied des Verhältnisses des Diameters zur Peripherie, oder 3,141... anzeigt. Diesen Werth von A substituirt, so ist die Formel für den cubischen Inhalt eines Ke-

gels $= \frac{R^2Pf}{3} = R^2P \cdot \frac{1}{3}f$, oder $\frac{D^2P}{4} \cdot \frac{1}{3}f = \frac{D^2P \cdot f}{12}$.

Alle diese Ausdrücke sind gleichgültig. Man pflegt gewöhnlich zu sagen: **Der Inhalt eines Kegels werde gefunden durch die Multiplikation seiner Grundfläche in den dritten Theil seiner Höhe**, welches auch durch diese Ausdrücke angezeigt wird.

Exempel: Es sey Fig. 224 der Radius CA $=$ 74′, oder 74 Zoll $=$ R; die Höhe CE $=$ 16′ $=$ 160 Zoll $=$ f, so ist $R^2P = 74 \cdot 74 \cdot 3{,}141\ldots = 17200{,}116$, und $\frac{R^2P \cdot f}{3} = \frac{17200{,}116 \cdot 160}{3} = 917339{,}520$ Cubikzoll $=$ 917 Cubikfuß, 339 Cubikzoll, 520 Cubiklinien.

§. 368. Wenn durch eine Ebene, die mit der Grundfläche ADCB des Kegels Fig. 224 parallel liegt, ein Stück Eadb von einem geraden Kegel abgeschnitten wird, so heißt das übergebliebene Stück adb; ADB ein gerader abgekürzter Kegel (conus truncatus). Man findet Körper von solcher Beschaffenheit manchmal im gemeinen Leben, als z. E. manche Arten von Trinkgläsern ꝛc.

Wir wollen nun eine allgemeine Formel für seinen cubischen Inhalt angeben und beweisen. Bey einem solchen abgekürzten Kegel, wenn ich ihn mir ganz gedächte, würde seine Axe EC von

seiner

seiner Spitze E bis an das Centrum seiner Grundfläche C gehen, und zugleich, da die Durchschnittsfigur auch ein Cirkel ist, indem sie von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, den Mittelpunkt dieser Cirkelfläche in C durchstechen. Also ist mir bekannt die Grundfläche ADE, also auch, da sie eine Cirkelfläche ist, ihr Radius CA, oder ich kann ihn doch wenigstens messen, diesen wollen wir allgemein = R nennen, und der Inhalt dieser Grundfläche ADE wird also = R^2P seyn.

Da der Kegel durch eine mit der untern Grundfläche parallele Ebene abgeschnitten ist, und die Durchschnittsfigur, oder auch die obere Grundfläche adb gleichfalls eine Cirkelfläche ist, und da sie mir auch bekannt ist, so ist ihr Radius ac = r, und ihr Inhalt = r^2P.

Von der Axe EC, welche bey einem geraden Kegel, wie dieser ist, auch die Höhe desselben ist, ist mir bekannt das Stück der Axe oder die Höhe des abgekürzten Kegels cC, das heiße = h. Der Theil der Axe, welcher zu dem abgeschnittenen Stück gehört, oder die Ec ist mir noch unbekannt, und daher sey Ec = x. Es würde also die Axe des Kegels, wenn er noch ganz wäre, Cc + cE, oder in Zeichen = h + x seyn = EC.

Ferner bemerken wir noch, daß, wenn man von dem Orte, wo die Axe beyde Grundflächen adb und ADB durchsticht, eine Seite mit den Radiis ac und AC zusammen hängt, die ac

der AC nach §. 273 parallel ist, und man sich daher zwey ähnliche Triangel, Eac und EAC, vorstellen kann.

Nach diesen Bemerkungen werden wir die Formel für den abgekürzten Kegel bald finden. Wäre er, der Kegel, noch ganz, so wäre nach vorhergehendem Paragraphen sein Inhalt $= \frac{R^2P.f+x.}{3}$.

Betrachten wir das abgeschnittene obere Stück des Kegels Eadb, so kann man das gleichfalls als einen besondern Kegel betrachten, dessen Grundfläche auch adb wäre, und seine Höhe Ec, es muß also nach vorhergehendem Paragraphen sein Inhalt seyn $= \frac{r^2P.x.}{3}$. Zieht man den Inhalt dieses kleinen Kegels von dem Inhalt des ganzen Kegels ab, so hat man den Inhalt des abgekürzten Kegels, dieser wird daher seyn $= \frac{R^2P.h+x}{3} - \frac{r^2P.x.}{3}$. Hier ist uns nichts unbekannt, als x, welches wir noch suchen müssen.

Weil der Triangel Eac ähnlich dem Triangel EAC (aus dem vorhergehenden), so gilt folgende Proportion:

Ec : EC = ac : AC in den gegebenen Zeichen

$x : x + h = r : R$ folglich

$$xR = rx + rh$$

$$xR - xr = rh$$

$$(R - r)x = rh$$

$$x = \frac{rh}{R - r}$$

Also wird daher $h + x = \frac{rh}{R - r} + h$ unter einer-

ley Benennung gebracht $= \frac{rh + Rh - rh}{R - r} =$

$\frac{Rh}{R - r} = h + x$. Dieses $h + x$ sowol als x in die Gleichung für den abgekürzten Kegel gesetzt, so wird $R^2P \cdot \frac{h + x}{3} = R^2P \cdot \frac{RP}{3(R-r)} = \frac{R^3Ph}{3(R-r)}$;

und $r^2P\frac{x}{3} = \frac{r^2Prh}{3(R-r)} = \frac{r^3Ph}{3 \cdot (R-r)}$.

Folglich $R^2P \cdot \frac{h + x}{3} - r^2P \cdot \frac{x}{3} = \frac{R^3Ph}{3(R-r)} - \frac{r^3Ph}{3(R-r)}$,

und weil dieses Brüche von einerley Nennern sind $=$

$\frac{R^3Ph - r^3Ph}{3(R-r)}$, anders ausgedrückt $= \frac{(R^3 - r^3) \cdot Ph}{R - r} \cdot \frac{}{3}$.

Aber wenn man den Bruch Zähler und Nenner $\frac{R^3 - r^3}{R - r}$ durch $R - r$ dividirt, so fällt der Nenner in diesem Bruche weg, denn es läßt sich dadurch dividiren, also:

$$
\begin{array}{l|l}
R - r) \quad R^3 - r^3 & R^2 + rR + r^3 \\
\quad R^3 - rR^2 & \\
\hline
\quad + rR^2 - r^3 & \\
\quad + rR^2 - r^2R & \\
\hline
\quad + r^2R - r^3 & \\
\quad + r^2R - r^3 & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Also diesen Quotienten statt des Bruchs $\frac{R^3 - r^3}{R - r}$ in den Ausdruck für den abgekürzten Kegel gesetzt, so wird derselbe $= (R^2 + rR + r^2) \frac{Ph}{3} =$ dem cubischen Inhalt des abgekürzten Kegels.

Exempel: Es sey Fig. 224 des Radius CA $= 74$ Zoll $= R$; der Radius ac $= 37$ Zoll $= r$; die Höhe des abgekürzten Kegels cC $= 80$ Zoll $= h$; P bedeutet 3,141... so ist der Inhalt des abgekürzten Kegels $= (R^2 + rR + r^2) \frac{Ph}{3} =$

$$= (74^2 + 37 \cdot 74 + 37^2) \cdot \frac{3{,}141 \cdot 80}{3}$$

$$= (5476 + 2738 + 1369)\ \frac{251{,}28}{3} =$$

802672,08 Cubikzoll = 802 Cubikfuß, 672 Cubikzoll, 80 Cubiklinien.

§. 369. Nachdem wir den cubischen Inhalt des ganzen und des abgekürzten Kegels betrachtet haben, wollen wir auch den Inhalt seiner Oberfläche betrachten und suchen. Wir werden aber unsere Betrachtungen nur auf die Oberflächen der **geraden** Kegel einschränken. Die Berechnungen der Oberflächen der schiefen Kegel sind weit mehrern Schwierigkeiten unterworfen, die wir bey den ersten Anfangsgründen nicht berühren können.

Es sey Fig. 225 ABD ein gerader Kegel, dessen Oberfläche (ohne die Grundfläche BD dazu genommen) man sucht. Man theile die Peripherie BDH der Grundfläche eines solchen Kegels in Gedanken in unendlich viele Theile, als BE, EF solche Theile vorstellen soll, die daher alle so klein sind, daß man den kleinen Cirkelbogen, den sie einschließen, von einer geraden Linie nicht unterscheiden kann. Nach diesen Theilungspunkten der Peripherie ziehe man auf der Oberfläche des Bogens von der Spitze A des Kegels gerade Linien, als AE, AF, so erhält man auf die Art Triangel ABC, ABF ꝛc. von einer sehr kleinen Fig. 225.

Grundlinie. Diese Triangel sind alle gleichschenklicht, weil AB = BE = AF, oder weil diese Linien gehörig gezogen, allezeit eine Seitenlinie des Kegels vorstellen. Auf die Art kann man die ganze Oberfläche jedes geraden Kegels in solche schmale Triangel eintheilen, welche alle gleichschenklicht seyn, und alle auch eine gleiche Höhe haben werden. Man betrachtet auf die Art den geraden Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten, deren Seitenlinien der Grundfläche unendlich klein sind.

Wenn man nun eine Seite des Kegels AB als die Höhe ab eines Triangels annimmt, Fig. 226. einen solchen Triangel, als ABE auf dem Kegel war, in gleicher Höhe und Grundlinie macht, wie nun abe seyn wird, und alle die andern Triangel, welche die ganze Oberfläche des Kegels nun ausmachen, daran setzt, wie man hier mit AEF schon gethan hat, so erhält man auf die Art einen geradlinichten Triangel abd, welcher der ganzen Oberfläche des Kegels gleich seyn wird. Weil seine Grundlinie bd aus allen Theilen der Peripherie BDH besteht, so ist die Grundlinie dieses Triangels, welcher die Oberfläche des geraden Kegels vorstellt, gleich der Peripherie der Grundfläche des Kegels, und seine Höhe ab gleich einer Seite des Kegels. Es wird uns nicht schwer fallen, für diesen Triangel einen allgemeinen Ausdruck zu finden, wornach sich alle Oberflächen der geraden Kegel berechnen lassen.

Es

Es wird dieser geradlinichte Triangel, worinn die Oberfläche des geraden Kegels verwandelt ist, als ein jeder anderer Triangel nach §. 129 berechnet, und wenn wir allgemein seine Höhe ab = x setzen, und seine Grundlinie bd = y annehmen, so wäre sein Flächeninhalt $\frac{yx}{2}$, und das wäre denn auch der Flächeninhalt des geraden Kegels. Nun müssen wir einen Ausdruck für x und y aus den uns bekannten Linien des Kegels, wenn der Kegel gegeben ist, oder wenn wir ihn messen können, suchen.

Da die Grundlinie bd Fig. 226 gleich ist der Peripherie der Grundfläche des Kegels Fig. 225, nach unserer Voraussetzung; da die Grundfläche des Kegels ein Cirkel ist, so ist, wenn wir ihren Durchmesser BD = D setzen, und das bekannte Verhältniß des Diameters zur Peripherie 1 : P annehmen, der allgemeine Ausdruck für jede Peripherie der Grundfläche des Kegels = D. P oder 2rP, und das ist also = bd Fig. 226 = y.

Wenn wir ferner betrachten, daß die Axe AC des geraden Kegels Fig. 225 auf seiner Grundfläche Mittelpunkt C senkrecht steht, und also, wenn von dem Mittelpunkt C bis an den Punkt, wo eine Seitenlinie, welche es sey, hier AB, eine gerade Linie BC gezogen wird, so erhält man einen geradlinichten rechtwinklichten Triangel ABC, dessen eine Seite AB die Seite des

geraden Kegels ist, welche Seite sich durch das pythagorische Theorem wird finden lassen.

In diesem Triangel ABC ist uns bekannt die Axe des geraden Kegels AC, welche auch seine Höhe ausmacht, sie sey = a. Ferner ist uns bekannt die Seite CB = dem halben Diamer oder Radius des Cirkels, sie sey = $\frac{1}{2}$D, oder auch r. Also AB ist unbekannt, es ist = x.

Also $ABq = ACq + CBq$ oder in Zeichen $x^2 = a^2 + \frac{1}{4}D^2$

$$x = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}D^2)} = AB.$$

Da wir nun wissen, was x und y sey, so ist das in der Formel für den Inhalt des Triangels abd Fig. 226 substituirt, der Inhalt der Oberfläche des geraden Kegels $= \frac{yx}{2} = \frac{DP.\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}D^2)}}{2}$ oder weil $\frac{1}{2}D = R$, also $\frac{1}{4}D^2 = R^2$, ferner $DP = 2RP$, so wird auch folgende Formel gelten: Inhalt der Oberfläche des geraden Kegels $= \frac{2RP.\sqrt{(a^2 + R^2)}}{2} = RP\sqrt{(a^2 + R^2)}$.

Exempel: Es sey Fig. 225 der Durchmesser BD der Grundfläche = 20″, hier also = D, und also der Radius = 10″, hier = R. Ferner sey die Höhe des Kegels oder die AC = 48″, hier = a, so ist also der quadratische Inhalt der Oberfläche ohne die Grundfläche nach der ersten Formel

Fig. 225.

$$\text{mel} = \frac{DP.\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}D^2)}}{2} = \frac{20.3{,}141.\sqrt{(48^2 + \frac{20^2}{4})}}{2}$$

$$= 62{,}82 . \sqrt{(4304 + \frac{400}{4}} = 62{,}82 . \sqrt{4404}$$

$$= \frac{62{,}82 . 66{,}36...}{2} \quad \frac{2084{,}36...}{2} \text{ Quadratzoll}$$

= 20 Quadratfuß, 84 Quadratzoll, 36 Quadratlinien.

Nach der andern Formel würde eben das herauskommen. Sie ist $RP\sqrt{(a^2 + R^2)} = 10.3{,}141.\sqrt{(48^2 + 10^2)} = 31{,}41.\sqrt{(4304 + 100)} = 31{,}41 . \sqrt{4404} = 31{,}41 . 66{,}36 = 2084{,}36...$ Quadratzoll = 20′ 84″ 36‴ Quadratmaas, welches mit dem vorigen einerley ist.

§. 370. Will man den Inhalt der ganzen Oberfläche eines geraden Kegels, die Grundfläche mitgenommen, wissen, so addirt man zu dem Inhalt der Oberfläche den Inhalt der Grundfläche noch zu, wie denn das einem jeden selbst einfallen muß. Der allgemeine Ausdruck für die Grundfläche des Kegels ist, weil es eine Cirkelfläche, entweder $\frac{D^2P}{4}$ oder R^2P.

§. 371. Die Oberfläche des geraden abgekürzten Kegels zu berechnen, folgt aus den vor-

vorhergehenden Betrachtungen. Wir haben vorher im §. 369 gezeigt, daß die Oberfläche Fig. 227. 227 eines jeden ganzen Kegels einem Triangel gleich sey, dessen Höhe AD (wir haben hier nur der Bequemlichkeit halber einen rechtwinklichten Triangel gezeichnet, weil eine seiner Seiten seine Höhe anzeigt) gleich ist der Höhe einer Seiten des Kegels ad, und seine Grundlinie ED gleich ist der Peripherie der Grundfläche des Kegels dfed. Wenn man an solchem Triangel AED von der Höhe AD ein solches Stück AB abnähme, als die Seite ab des abgekürzten Stücks des Kegels wäre, und wenn man mit ED durch den Punkt B eine Parallellinie CB zöge, und es wahr wäre, daß diese CB eben so groß wäre, als die Peripherie der Grundfläche des abgeschnittenen Stücks des Kegels abc, welchen man auch als einen ganzen Kegel betrachten kann, so wäre es auch richtig, daß der Triangel ACB den Inhalt der Oberfläche des abgeschnittenen Stücks des Kegels abc vorstellte, und daß also nothwendig das Trapezium CBED der Oberfläche des abgekürzten Kegels cbde gleich seyn müßte. Für dieses Trapezium wird sich leicht ein allgemeiner Ausdruck finden lassen, wenn man seine Seite BD, welche, weil sie senkrecht ist, seine Höhe bestimmt, messen kann. Wir müssen aber nun erst beweisen, daß, wenn man AB der ab gleich macht, und durch den Punkt B mit der ED parallel die Linie CB zieht, alsdenn die CB gleich sey der Peripherie der Grundfläche des abgeschnittenen Stücks abc.

Wir

Wir wissen, daß, weil CB ∥ mit ED, folgende Proportion gelte:

AD : AB = ED : CB.

Wir wissen auch, daß, wenn an die Axe des geraden Kegels ist, alsdenn bm und dn Radii des Abschnitts und der Grundfläche sind, die einander parallel liegen, und also folgende Proportion gilt: ad : ab = dn : bm.

Allein die Radii zweyer Cirkel verhalten sich, wie ihre Peripherie, wie wir das in der Lehre vom Cirkel bewiesen haben, also gilt:

dn : bm = Peripherie dfe : Peripherie bc.

Es folgt also auch: Periph. dfe : Periph. bc = ad : ab. Aber ad = AD und ab = AB, weil wir es so konstruirt haben, also kann man eins fürs andere setzen, also wird gelten:

AD : AB = Peripherie dfe : Peripherie bc

folglich auch Peripherie dfe : Periph. bc = ED : CB aber Peripherie dfe ist gleich ED, oder sind gleiche Größen, also muß Peripherie bc auch gleich der CB seyn.

Da wir nun hiervon überzeugt sind, so wird sich für das Trapezium CBED, welches die Oberfläche des abgekürzten Kegels ist, leicht ein Ausdruck finden lassen.

Wir wissen aus §. 131, daß ein Trapezium ausgemessen wird, wenn man die Summe seiner parallelen Seiten durch die halbe Höhe multiplicirt, also des Trapeziums, das sich hier befindet, CBED Inhalt wäre: (CB + ED) . $\frac{1}{2}$BD, nun ist CB = der Peripherie des Cirkels bc nach

un-

unserm Beweis, also = 2r . P. ED = der Peripherie des Cirkels de = 2R . P. BD ist gleich der Seite des Kegels bd, welchen wir e nennen wollen (denn wenn der abgekürzte Kegel mir bekannt ist, so wird sie sich messen lassen, also auch bekannt seyn). Also wird der allgemeine Ausdruck für die Oberfläche des abgekürzten Kegels (ohne Grundfläche) seyn = (CB + ED) . $\frac{1}{2}$BD = (2R . P + 2r . P) $\frac{e}{2}$ = $\frac{(R + r)\ 2P\ .\ e}{2}$ = (R + r) P . e.

§. 372. Hier haben wir e, oder die Seite des abgekürzten Kegels als bekannt angenommen. Wenn das nicht wäre, und nur die Radii bn und dn der Oberflächen des abgekürzten geraden Kegels gegeben wären, nebst der Höhe desselben mn, so ließe sich doch die Seite bd leicht finden. Weil der Kegel gerade ist, so wäre ein Perpendikel von b auf den Durchmesser de gefällt, welches Perpendikel br seyn würde, gleich der Höhe mn, und rn und bm wären auch gleich, weil Parallelen zwischen Parallelen gleich sind. Wir wollen nun die Höhe mn = br = h nennen, ferner bm = rn = Radius der obern Grundfläche = r, und dn der untern Grundfläche = R, so ist dr = dn − rn = R − r, und weil bey r ein rechter Winkel, so ist also bdq = drq + brq, oder in Zeichen $e^2 = (R - r)^2 + h^2$, also $e \sqrt{(R - r)^2 + h^2)}$.

§. 373.

§. 373. Exempel: Die Formel für die Oberfläche des abgekürzten Kegels war $(R + r) . P . e$. Es sey nun Fig. 227 $bd = e = 10$ Fuß, 5 Linien $= 1005$ Linien, es sey $dn = R = 400$ Linien oder 4 Fuß, es sey $bm = r = 300$ Linien oder 3 Fuß, und P ist wie gewöhnlich 3,141... so ist $(R + r) . P . e = (400 + 300) . 3,141 . 1005 = 700 . 3156,705 = 2209693,5$ Quadratlinien oder $\square$ 2ó 96″ 93,5‴ Quadratmaas.

Noch ein Exempel, wo e gesucht wird, und also nur die Radii der Grundflächen nebst der Höhe $= h$ des abgekürzten Kegels gegeben sind:

$mn = h = 5$ Zoll
$bm = r = 1$ Zoll
$dn = R = 3$ Zoll

so ist also $bd = e = \sqrt{((R - r)^2 + h^2)} = \sqrt{((3 - 1)^2 + 5^2)} = \sqrt{(2^2 + 5^2)} = \sqrt{(4 + 25)} = \sqrt{29} = 5,38 = e$. Folglich die Oberfläche des abgekürzten Kegels $= (R + r) . P . e = 4 . 3,14 . 5,38 = 67,5728$ Quadratzoll $= 67″ 57‴$ Quadratmaas.

Will man die ganze Oberfläche des abgekürzten Kegels nebst den Grundflächen wissen, so addirt man beyde Grundflächen R^2P und r^2P zu der Formel $(R + r) Pe$ noch hinzu.

§. 374. Die Betrachtungen über den abgekürzten Kegel bringen uns auf die Ausmessung der Fässer. Wir werden aber nur sehr wenig davon berühren, da wir keine praktische Anweisung der Geometrie schreiben, und die hier gelehrten

lehrten Grundsätze größtentheils zureichend sind, die Schriften derer, die weitläuftig und praktisch geschrieben sind, zu verstehen. Da die Fässer nicht alle auf einerley Art verfertigt sind, so kann man keine allgemeine Regel, sie auszumessen, angeben; überdem sind auch die Methoden, die wir jetzt angeben wollen, nicht mathematisch genau, indessen kann man sie doch, wo es auf eine Kleinigkeit nicht ankömmt, wol gebrauchen. Es lassen sich die mehrsten davon als zwey zusammen gesetzte abgekürzte Kegel betrachten, die völlig gleich sind, deren große Grundflächen in der Mitte des Fasses, wo das Spundloch ist, nemlich Fig. 228 in BE zusammen kommen, und deren kleinere Grundfläche sich an beyden Boden in CD und AF befindet. Es versteht sich von selbst, daß, wenn man auf diese Art den Inhalt eines Fasses ausmessen will, man die Dicke der Stäbe und die Bodendicke abrechnen muß, und nur den inwendigen Raum des Fasses betrachtet. Ganz strenge ist dieses nicht richtig, weil Fig. 228 die Linie AB als eine Seite des abgekürzten Kegels keine gerade, sondern eine etwas krumme Linie ist. Weiß man, wie viel Cubikzoll eine Kanne flüssige Materie einnimmt, so kann man auch wissen, wie viel alsdenn in solchem Fasse ist, und das erstere kann man leicht erfahren, wenn man den innern Raum des Gefäßes, womit eine Kanne gemessen wird, welches gewöhnlich cylindrisch ist, ausmißt. Oder man kann auch den inwendigen Raum eines Fasses ABCDEF Fig. 228 als einen

Cy-

Fig. 228.

Cylinder betrachten, welcher die mittlere arithmetische Größe zwischen zweyen andern Cylindern ist. Beyde Cylinder haben einerley Länge AC. Bey dem einen Cylinder aber ist der Durchmesser der Grundfläche die af, welche = der Spundtiefe BE ist, und das ist der Cylinder afnm. Bey dem andern Cylinder ist gleichfalls die Länge = AC, aber der Durchmesser der Grundfläche der Durchmesser des Bodens oder die AF, und das ist der Cylinder AFCD. Zwischen diesen beyden Cylindergrößen eine mittlere arithmetische Größe genommen, wird den Inhalt des Fasses ziemlich geben. Wegen der sehr verschiedenen möglichen Gestalten des Fasses läßt sich aber kein Beweis dafür führen, welcher nur für eine Art der Figur des Fasses strenge richtig seyn würde. Wir lassen uns hier nicht ein, um nicht weitläuftig zu werden, wie man den Inhalt der flüssigen Materie von Fässern, die nicht voll sind, mißt, und verweisen die Lehrbegierigen an die Verfasser, die besonders hievon geschrieben haben. So viel wird man bald einsehen, daß die Maasstäbe, welche man dazu macht, nur für einerley Art Fässer, wozu sie gemacht sind, können gebraucht werden.

§. 375. Ganz irreguläre Figuren, als Bildsäulen, Steine, und tausend andere Arten Dinge lassen sich cubisch ausmessen, wenn man sie in ein cylindrisches oder anderes reguläres Gefäß voll Wasser legt, und sieht, wie viel Was-

ser, wenn das Gefäß voll gewesen ist, noch in selbigem bleibe, wenn man sie herausnimmt. Der Raum, der leer bleibt, ist der cubische Inhalt ihrer Größe, denn so viel Raum hatten sie eingenommen, und das Wasser heraus gedrängt. Man nimmt Sand zu dieser Art Messungen, wenn die Materie, die man ausmessen will, kein Wasser vertragen kann. Wenn man weiß, wie viel ein Cubikfuß, Zoll oder Linie von einer gleichen Materie, als man ausmessen will, wiegt; so kann man auch durch Wägen den cubischen Inhalt einer irregulären Figur erfahren, doch dieses letztere gehört nicht in die Geometrie, von welcher wir doch nur reden.

§. 376. Wir lehrten im vorhergehenden Kapitel, wie man die Körper in andere von gleichem cubischen Inhalt verwandeln könne, und bewiesen unsere Betrachtungen aus geometrischen Gründen. Jetzt, da wir die arithmetische Berechnung des Inhalts de Körperr gezeigt haben, wird es uns gar nicht schwer fallen, durch leichte Gleichungen die Körper in andere zu verwandeln, oder ihre Seiten und Grundflächen und Höhen zu finden, welche die verlangten Körper haben müssen, die mit dem gegebenen von gleichem Inhalt, oder nach gewissem Verhältniß größer oder kleiner seyn sollen. Ein Paar Exempel werden dieses erläutern, wie denn überhaupt sich bey Gleichungen nicht allezeit Regeln geben lassen, sondern der Verstand sie selbst einsehen muß.

Er-

Erstes Exempel: Man soll ein Parallelepipedon in einen Cubus verwandeln, das heißt, einen Cubus verfertigen, der eben so viel Körperinhalt als das Parallelepipedon hat. Bey dem Cubus darf man nur die Länge einer seiner Seiten wissen, beym Parallelepipedo aber weiß man, daß sein cubischer Inhalt aus der Multiplikation seiner Länge in seine Breite und in seine Höhe gefunden wird, wie wir in diesem Kapitel sattsam gezeigt haben. Es mag die Höhe seyn = a, die Länge = l, und die Breite = f, so wäre der Inhalt des Parallelepipedons a . l . f, der Inhalt des Cubi, dessen Seite mir noch unbekannt ist, x^3, weil beyde gleiches Inhalts seyn sollen. So ist also $a . l . f = x^3$

$\sqrt[3]{a . l . f} = x$ oder = der Seite des zu findenden Cubus.

Es sey a = 4 Fuß, l = 9 Fuß, und f = 6 Fuß, so ist $4 . 9 . 6 = x^3$

---

oder $216 = x^3$

$\sqrt[3]{216} = 6 = x$ oder die Seite eines eben so großen Würfels ist = 6 Fuß.

Zweytes Exempel: Man soll einen Würfel in ein Parallelepipedon verwandeln, von welchem die Breite und Länge, also die Grundfläche, aber nicht die Höhe gegeben ist (denn von allen drey Dingen müssen doch zwey gegeben seyn, sonst

muß man, wenn nur eins gegeben ist, das zweyte nach Wohlgefallen annehmen, wenn sonst keine Dinge da sind, wodurch es sich bestimmen läßt). Es sey die Seite des Würfels = a, also sein Inhalt = a^3, die Länge des Parallelepipedons = l, die Breite = f, und die Höhe unbekannt, also = x. Also weil beyde Körper gleich seyn sollen, so ist

$$l \cdot f \cdot x = a^3$$

$$x = \frac{a^3}{l \cdot f}$$

Bloß dieses x hatte man zu finden, um ein gleiches Parallelepipedon zu machen. Es sey a = 8 Zoll, also $a^3 = 512$ Cubikzoll; es sey l = 8, f = 4, so ist $x = \frac{512}{8 \cdot 4} = \frac{512}{32} = 16$, und 8.4.

16 ist auch = 512.

Drittes Exempel: Man soll eben dieses Parallelepipedon in einen Kegel verwandeln, dessen Höhe gegeben ist, und F heißen mag, aber nicht der Durchmesser seiner Grundfläche, also auch nicht seine Grundfläche; diese müssen wir also suchen. Der Inhalt des Parallelepipedons sey nach dem ersten Exempel = a.l.f, oder mit einem Zeichen = e. Der allgemeine Inhalt eines Kegels wurde §. 367 ausgedrückt $\frac{D^2P \cdot F}{12}$. Hier ist nun der Durchmesser unbekannt, also er sey = x,

x, also der Inhalt des Kegels ist $\frac{x^2 . P . F}{12}$, und weil Kegel und Parallelepipedon gleich seyn sollen, so ist also $c = \frac{x^2 . P . F}{12}$

$12c = x^2 . P . F$

$12 . c = x^2$

$\frac{P . F}{12}$

und $\frac{\sqrt{12c}}{\sqrt{P . F}} = x$ oder der Durchmesser der Grundfläche des Kegels.

Es sey $c = 512$ Cubikzoll, F oder die Höhe des Kegels $= 10$ Zoll, P oder das gewöhnliche Glied des Verhältnisses des Diameters zur Peripherie $= 3,14$, so ist $x = \frac{\sqrt{12 . 513}}{\sqrt{3,14 . 10}} = \frac{\sqrt{6144}}{\sqrt{31,4}} =$

$\frac{78,4}{5,6} = 14$, also $x^2 = 14 . 14 = 196$; also der Inhalt des Kegels $= \frac{x^2 . P . F}{12} = \frac{196 . 3,14 . 10}{12}$

$= \frac{196 . 31,4}{12} = \frac{6154,4}{12} = 512,8$ Cubikzoll,

welches etwas zu groß ist, weil, da sich aus dem Zähler von $\frac{12 . 512}{3,14 . 10}$ die Wurzeln nicht genau ausziehen lassen, man sie etwas zu groß genommen hat. Ueberhaupt läßt sich dieses niemals ge-

nau ausrechnen, weil P, welches mit in Rechnung kömmt, oder die 3,141... eine Irrationalgröße ist, woraus sich keine Wurzel genau ziehen läßt.

§. 377. Zur Anweisung und Uebung mögen diese Exempel hinreichend seyn. Wir beschließen dieses Kapitel, und stellen in den beyden letzten Kapiteln der Geometrie Betrachtungen über die Kugel an, wo wir alles hinbringen wollen, was dazu gehört, und sich nach unserer Meynung für diese Anfangsgründe schickt.

Das zwölfte Kapitel.

Von der Kugel und den Kugelschnitten.

§. 378.

Wir haben schon am Schluß des Kapitels bey den Betrachtungen über die Körper überhaupt §. 317 einige vorläufige Betrachtungen über die Kugel und einige wenige ihrer Eigenschaften angestellt. Wir haben dort eine Erklärung von der Kugel gegeben, ihre Entstehung gezeigt, gelehrt, daß alle Punkte auf ihrer Oberfläche gleich weit von einem Punkte in ihr entfernt

wären, welchen wir ihren Mittelpunkt nennten; von ihren Radiis und Durchmessern und deren Gleichheit geredet; gezeigt, daß Kugeln von gleichen Radiis gleich groß sind; gelehrt, daß Kugeln, die größere Radii haben, größer, und solche, die kleinere Radii haben, kleiner sind; bemerkt, daß gerade Linien vom Mittelpunkt nach der Peripherie, die kleiner als der Radius, ganz in der Kugel blieben, und solche vom Mittelpunkt an, die größer als der Radius, aus der Kugel heraus gingen; bemerkten, daß alle Kugeln ähnliche Körper wären, und daß, was also allgemein von einer bewiesen würde, allen anginge. Wir haben endlich versprochen, der Kugel ein besonderes Kapitel zu widmen. Wir halten jetzt unser Versprechen, und wir ersuchen unsere Leser, dieses jetzt angezeigte sich zu erinnern, weil wir darauf weiter fortbauen werden. Dieses Kapitel wird von der Kugel und einigen ihrer Schnitte handeln, welche durch eine Ebene geschehen können. In noch einem Kapitel werden wir noch mehr von ihren Schnitten reden. Wer etwas weiter gehen will, und die sphärische Trigonometrie, oder die Lehre von den soliden Ecken der Körper gründlich studiren will, wird in dem folgenden Kapitel eine Vorbereitung dazu finden. So viel man aber von der Kugel zum Gebrauch des gemeinen Lebens zu wissen nöthig hat, wird man in diesem Kapitel antreffen. Wir fangen unsere Betrachtungen an.

Fig. 229. §. 379. Wenn man eine Kugel Fig. 229 ABDE durch eine Ebene BD oder FG, wie und in welcher Lage man will, schneidet, so nennt man das Stück, das von der Kugel abgeschnitten wird, einen **Abschnitt** der Kugel, die Durchschnittsfigur BD oder FG einen **Kugelschnitt**, und dieser **Kugelschnitt ist allemal eine Cirkelfläche, und ihr Umkreis daher auf der Kugel allemal ein Cirkel.**

Wenn wir die Lage der Ebene betrachten, welche eine Kugel schneidet, so geht sie entweder, wie die Ebene BD, durch den Mittelpunkt C der Kugel durch, so wird man doch von diesem Punkte C nach allen Punkten der Peripherie der Kugel, wo die Ebene in die Kugel eindringt, als z. E. nach B, H, I, D, Linien ziehen können, die auch alle in dieser Ebene liegen. Diese Linien werden alle unter einander gleich seyn, denn nach §. 317 sind alle Linien, aus dem Mittelpunkte der Kugel nach irgend einem Punkte der Peripherie gezogen, Radii der Kugel und gleich. Sind aber alle Linien CB, CH, CI, CD, und so nach allen Punkten des Umkreises der Durchschnittsfigur gezogene Linien = Radiis der Kugel, also gleich, so muß nach §. 24 die Durchschnittsfigur, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, nothwendig ein Cirkel seyn.

Nun gehe aber die schneidende Ebene FG nicht durch den Mittelpunkt, auch alsdenn ist die Durchnittsfigur ein Cirkel. Wir können die

ses auf eine Art beweisen, woraus wir verschiedene wichtige Folgerungen herleiten werden.

Man fälle auf die Ebene FG, welche die Kugel außer dem Mittelpunkt schneidet, aus dem Centro der Kugel ein Loth CM. Dieses Loth muß nothwendig auf die Durchschnittsfigur FG innerhalb der Kugel kommen; denn thäte es das nicht, und käme es außerhalb der Kugel erst auf diese Ebene, so wäre es, da es aus dem Centro gezogen ist, größer als der Radius der Kugel, weil es noch aus der Kugel wegginge, ehe es die schneidende Ebene erreichte, und da doch ein Loth immer die kürzeste Linie ist, welche von einem Punkte nach einer Ebene kann gezogen werden nach §. 265, und man nach der Durchschnittsfigur, indem sie in der Kugel ist, doch aus dem Mittelpunkte C Linien ziehen kann, die kleiner sind, als eine Linie, die noch außerhalb der Kugel erst die schneidende Ebene erreichte, so muß das Loth aus dem Mittelpunkte C nothwendig die Durchschnittsfigur einerwärts treffen, also innerhalb der Kugel seyn. Das mag nun seyn, wo es wolle. Es sey einmal in M, so ist ferner gewiß, daß alle andere Linien, die man aus dem Mittelpunkt C nach den Punkten zieht, wo die schneidende Ebene in die Kugel dringt, gleich lang sind, als CN, CL oder CK, denn es sind alle Radii der Kugel nach §. 317.

Weil nun bey M nach der Voraussetzung ein rechter Winkel ist, so entstehen daraus rechtwink-

winklichte Triangel, deren einer gemeinschaftlicher Schenkel CM, und die andern CN, CL, CK u. s. w. alle unter einander gleich sind, folglich wird auf alle Fälle folgendes wahr seyn:

1) $CKq = CMq + MKq$

also $CKq - MKq = CMq$

2) $CLq = CMq + MLq$

also $CLq - MLq = CMq$

3) $CNq = CMq + MNq$

also $CNq - MNq = CMq$

folglich da alle diese Gleichungen CMq gleich sind, so ist $CKq - MKq = CLq - MLq = CNq - MNq$, aber CK, CL und CN sind gleich, weils Radii der Kugel sind, also auch CKq, CLq und CNq, also kann man dieses aus allen dreyen Gleichungen wegnehmen, und sie bleiben dennoch gleich. Folglich wird

$MKq = MLq = MNq$, den $\surd$ ausgezogen

$MK = ML = MN$.

Ist das aber wahr, und kann man das, wie man einsieht, behaupten, man mag die Punkte K, L, N in dem Umkreise der Durchschnittsfigur annehmen, wo man will, so muß die Durchschnittsfigur FG ein Circel seyn, von welcher MK, ML, MN Radii sind, welches wir erweisen wollen.

§. 380. Es wird uns leicht fallen, aus allen diesen noch wichtige Folgerungen herzuleiten. Weil MK = ML, K und L mögen angenommen werden, in welchem Punkte des Umkreises der Durchschnittsfigur, wo man will, und CM ein Loth ist, so muß der Punkt M, wo das Loth aus dem Centro C der Kugel die Durchschnittsfigur erreicht, nothwendig in der Mitte der Durchschnittsfigur liegen, und da die Durchschnittsfigur ein Cirkel ist, nothwendig das Centrum dieses Cirkels FG seyn. Also ein Loth aus der Kugel Mittelpunkt auf die schneidende Ebene gesetzt, die nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht, erreicht die Ebene im Centro der Durchschnittsfigur, welche ein Kreis ist, und da nur ein Loth von einem Punkte nach dem andern möglich ist, §. 264, ein Loth auf diesem Mittelpunkt des Kreises, der durch den Durchschnitt einer Ebene entsteht, die nicht durch den Mittelpunkt geht, aufgerichtet, geht auch durch den Mittelpunkt der Kugel.

§. 381. Ferner: Man nehme den Punkt K Fig. 229 an jedem Orte des Umkreises der Durchschnittsfigur an, wo man will, so ist aus dem bewiesenen klar:

daß $CKq = CMq + MKq$

also $CKq - CMq = MKq$.

Nun mag die schneidende Ebene näher nach dem Cen-

Centro der Kugel rücken, so bleibt CK immer gleich, denn es ist immer ein Radius der Kugel aus dem Centro C an ihre Peripherie gezogen, also CKq bleibt auch immer dasselbige, aber CM oder der Perpendikel nimmt ab. Also je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunkt kömmt, je kleiner wird CM, folglich auch CMq. Weil nun CKq — CMq = MKq, so muß MKq, also auch MK wachsen, je mehr CM abnimmt, weil immer weniger von CKq in der Gleichung abgezogen wird. Es ist aber MK der Radius des Cirkels, der durch den Durchschnitt der Ebene entsteht, also wenn MK größer wird, so muß auch der Cirkel der Durchschnittsfigur größer werden. Folglich je näher die schneidende Ebene dem Mittelpunkte der Kugel kommt, je größer werden die Cirkel der Durchschnittsfiguren.

§. 382. Es ist leicht begreiflich, daß, wenn die schneidende Ebene den Mittelpunkt C der Kugel erreicht, alsdenn sich kein Perpendikel MC mehr fällen läßt, folglich alsdenn MC, und daher auch MCq = Null wird. Weil nun CKq — CMq = MKq, so muß man, wenn CMq = Null wird, setzen: CKq — Null = MKq

oder CKq = MKq

also CK = MK.

Oder alsdenn sind die Radii sowol von dem Mittelpunkte C der Kugel nach ihren Oberflächen,

als

als auch vom Mittelpunkte des Umkreises des Durchschnittskreises nach seiner Peripherie gleich. Grösser kann also kein Kreis einer Durchschnittsfigur werden, denn er muß doch sich auf der Oberfläche der Kugel befinden. Es sind also unter allen Durchschnittsfiguren dieses die **größten Kreise** (circulus maximus), **deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.** Es müssen auch alle solche **größten Kreise sich auf einer Kugel völlig gleich seyn, weil bey allen ihre Radii dem Radio der Kugel gleich sind.**

§. 383. Alle andern Kreise, die durch die schneidenden Ebenen auf der Kugel entstehen, heißen **kleinere Kreise.** Weil die Cirkel der Durchschnittsfiguren, oder die daher entstehenden Kreislinien auf der Kugel immer größer werden, je näher die schneidenden Ebenen dem Mittelpunkte kommen, so müssen auch die Cirkel immer kleiner werden, je mehr sich die schneidenden Ebenen vom Mittelpunkte entfernen. Wenn Fig. 230 CM ein Perpendikel auf dem Kreis KO ist, also seine Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel anzeigt, so ist, wie wir wissen, $MKq = CKq - CMq$. Je mehr CM wächst, oder je länger der Perpendikel wird, welcher von dem Mittelpunkte auf die Fläche KO kann gezogen werden, desto weiter also die schneidende Ebene vom Mittelpunkt entfernt wird, desto größer wird auch CMq, desto mehr wird also von CKq abgezogen, und also Fig. 230.

so desto kleiner muß MKq, das mit beyden in Gleichung gesetzt ist, folglich auch desto kleiner MK, oder der Radius der Durchschnittsfigur werden.

Wenn in der Gleichung MKq = CKq — CMq die CM, oder der Perpendikel so lang als der Radius der Kugel wird, so wird MKq = Null, oder es giebt alsdenn gar keine Durchschnittsfigur, keinen Cirkel auf der Kugel mehr. Denn da CK = Radio der Kugel ist, und CM auch = Radio der Kugel seyn soll, so könnte man anstatt MKq = CKq — CMq setzen MKq = r^2 — r^2 = o, weil ein r^2 das andere aufhebt. Das geschieht, wenn die schneidende Ebene nur die Kugel berührt, weil alsdenn es gar keine Cirkel mehr auf der Kugel giebt, **so muß auch die berührte Ebene die Kugel nur in einem Punkte berühren**, berührte sie selbige in mehreren, so könnte man von dem Perpendikel aus der Kugel Mittelpunkt auf diese Ebene, in dieser Ebene eine Linie, und darauf aus C noch einen Radius der Kugel ziehen, und CM würde nicht = Null seyn können. Die Ebene, die eine Kugel berührt, ist daher für die Kugel eben das, was Tangente für den Cirkel ist. **Sie wird auf dem Radius der Kugel senkrecht stehen, und eine senkrecht auf den Berührungspunkt gesetzte Linie wird durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.** Ein sehr glatter, etwa marmorner Tisch, auf welchem eine gute Billiardkugel lieg., kann als eine die Kugel

berührende Ebene so ziemlich betrachtet werden. Mathematisch strenge ist weder die Kugel eine wahre Kugel, noch der Tisch eine wahre Ebene. Vielleicht ist es auch nicht einmal möglich, daß Menschen Hände so etwas genaues verfertigen können.

Wenn zwey schneidende Ebenen gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, so sind die Durchschnittsfiguren, und also die Cirkel auf der Kugel gleich. Denn Fig. 230 sollen die beyden Perpendikel aus C auf beyde Durchschnittsfiguren, oder

CM = CN seyn, also CMq = CNq

CK = CL = Radio der Kugel, also CKq = CLq

folglich CMq − CKq = CNq − CLq

aber CMq − CKq = MKq und CNq − CLq = LNq

also MKq = LNq den √ ausgezogen,

also MK = LN.

MK und LN sind beyde Radii der Durchschnittsfiguren. Folglich auch beyde Durchschnittscirkel gleich, weil sie gleiche Radii haben.

§. 384. Es sey Fig. 231 AFBA ein **Circulus maximus** der Kugel. Da er Circulus maximus ist, so geht er auch nach §. 282 durchs Centrum C der Kugel, und eine gerade Fig. 231.

Linie

Linie AB von dem einem Punkte der Peripherie durchs Centrum C, bis wieder an die Peripherie gezogen, wird also ein Durchmesser der Sphäre seyn §. 282. Man richte hier auf C ein Perpendikel DC auf, welches man bis an den entgegen gesetzten Punkt E verlängert, dieses steht auf AB senkrecht, und DC und CB, CE werden Radii der Kugel, aber auch Radii des größern Cirkels ADBE, und die ganze Linie DE ein Durchmesser. Weil DC und CE auf CB senkrecht stehen, so ist der Bogen DB sowol als der Bogen BE ein Quadrant, also beyde gleich. Man stelle sich nun vor, daß die Kugel entstehe, wenn der Durchmesser DE unbeweglich bleibt; aber daß sich um ihn, wie um eine Axe, der halbe Cirkel DBE bewegt, bis er wieder an seine Stelle kömmt. Da dieser halbe Cirkel DBE aus zwey gleichen Bogen, DB und BE, besteht, die sich gleich um eben die Axe bewegen, gleiche Räume beschreiten, bis sie wieder in ihre alten Stellen kommen, so kann das Stück der Kugel, welches durch die Bewegung des Quadranten DB entsteht, nicht größer seyn, als das, was durch die Bewegung des Quadranten BE hervorgebracht wird. Durch beyder Bewegung wird die ganze Kugel hervorgebracht, also muß jedes eine halbe Kugel hervorbringen, aber durch die Bewegung des Radii CB, welcher beyden Quadranten zugehört, wird der Circulus maximus AFBA hervorgebracht. Also muß der Circulus maximus die Kugel in zwey gleiche Theile theilen.

Da

Da sich auf den Mittelpunkt C der Kugel und des Circuli maximi allezeit ein Perpendikel DC ziehen läßt, der Circulus maximus mag liegen, wo er will, so ist dieses auf alle Fälle richtig.

§. 385. Man nennt einen solchen Durchmesser der Kugel DE, von dem man sich vorstellt, daß durch die Bewegung eines halben Cirkels um ihn die Kugel entstanden sey, die **Axe** der Kugel, und die beyden äußersten Punkte dieser Axe in D und E nennt man die **Pole** der Kugel. Man wird in einer Kugel unendlich viele Durchmesser ziehen können, und von allen sich vorstellen können, daß durch die Bewegung eines halben Cirkels um sie die Kugel entstanden sey. Man kann also unter unendlich vielen Diametris einen für die Axe der Kugel annehmen, die andern heißen aber alsdenn alle nur Durchmesser. Man sieht auch ein, daß man unter allen unendlich vielen Punkten auf der Kugel zwey, die an den äußersten Enden eines Diameters liegen, zu Polen annehmen kann. Diese Punkte sind allezeit einander entgegen gesetzt, weil sie an den äußersten Enden des Diameters, welches eine gerade Linie ist, sich befinden.

§. 386. Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Ausmessung der Kugel, die uns nicht mehr schwer werden wird. Wir stellen erst Betrachtungen über die Größe ihrer Oberfläche

an, ehe wir zu ihrem körperlichen Inhalte übergehen.

Fig. 232. Es sey Fig. 232 AD die Axe einer Kugel, A und D ihre beyden Pole, AGID ein halber Cirkel, von welchem man sich vorstellen kann, daß durch seine Herumdrehung um die Axe AD die Kugel entstanden sey. Man nehme auf diesem halben Cirkel über CI oder unter CI, hier über CI, also in einem der Quadranten einen Punkt G an, wo man wolle, man gedenke sich einen andern Punkt g an diesem erstern Punkt unendlich nahe. Man fälle von dem Punkt G auf den Diameter DA ein Perpendikel HG, und ziehe an diesem Punkt G eine Tangente gGB, eine solche Tangente an G wird verlängert, die verlängerte Axe AD irgendwo, hier in B, schneiden, weil bey H ein rechter Winkel ist, also bey G ein spitzer, indem nur der Radius auf einer Tangente senkrecht steht §. 175. Man ziehe gleichfalls hg aus dem bey dem Punkte G unendlich nahen angenommenen Punkte G auf AD senkrecht, es würden also HG und hg unendlich nahe einander liegen. Der Theil der Tangente Gg wird alsdenn gleichfalls unendlich klein, und man kann annehmen, daß sie beyde an **unendlich** nahe Linien HG und hg stoße. Man erhält also ein Dreyeck Bhg, das von dem Dreyecke BHG **unendlich** wenig verschieden ist. Es fällt in die Augen, wenn man den halben Cirkel AGID sich um die Axe BD, nebst dem Dreyecke Bhg bewegen ließe, so beschreibt das Dreyeck Bhg, indem der Punkt g

nun

nun durch die Cirkellinie fg geht, einen Kegel, dessen Radius der Grundfläche die hg ist. Nimmt man von diesem Kegel den ab, welcher durch die Bewegung des Dreyecks BHG durch die Cirkellinie FG entstanden war, und dessen Radius der Grundfläche HG ist, so hat man ein unendlich schmales Stück einer abgekürzten Kegelfläche FGfg erhalten, welche sich ganz in der Oberfläche der Kugelfläche befindet. Denn man muß immer betrachten, daß das Stückchen der Tangente Gg so unendlich klein ist, daß es in die Cirkelperipherie fällt, und das Theil der Cirkelperipherie, darinn es fällt, als eine gerade Linie betrachtet werden kann.

Wir haben aus §. 371 gelernt, daß, wenn man die Seite eines geraden abgekürzten Kegels = e nennte, den Radius seiner untern Grundfläche = R, und seiner obern Grundfläche = r annähme, und durch P das zweyte Glied des Verhältnisses des Diameters zur Peripherie, wenn der Diameter = 1 ist, oder durch P = 3,141... verstünde, alsdenn der Ausdruck für die Oberfläche des abgekürzten geraden Kegels, die Grundflächen nicht mit gerechnet, sey, = P. e. (R + r).

Hier bey unsrer Kugel liegen nun die Linien HG und hg einander unendlich nahe. Dieses sind die Radii der beyden Grundflächen des abgekürzten Kegels in der Kugel. Weil sie so unendlich nahe liegen, kann man ohne Irrthum R = r annehmen, und der Ausdruck also für einen abgekürzten Kegel, dessen Oberfläche unendlich klein

wäre, würde seyn P. e. 2R oder 2RPe. Das Stückchen Gg, welches hier das e in der Formel ist, ist eine unendlich kleine Größe, und man begreift gleich, daß es solcher unendlich kleinen abgekürzten Kegeloberflächen eine unendliche Menge auf der Kugel, und auch auf dem abgeschnittenen Stücke der Kugel Afg geben muß. Für dieses e wollen wir nun einen andern Ausdruck suchen.

Man ziehe GE auf die hg senkrecht, weil bey H und h rechte Winkel sind, und nun bey E auch ex constructione, so wird GE mit Hh parallel und gleich, also auch mit AC parallel seyn. Man ziehe auch den Radium der Kugel CG, und dieser mag = ϱ seyn.

Wir behaupten nun, daß die beyden Triangel HGC und der unendlich kleine Triangel GEg einander ähnlich sind, und dadurch werden wir einen Ausdruck für Gg = e finden. Sie sind ähnlich. Denn der

Winkel H oder CHG = Recto = GEg ex constructi.

ferner weil GE perpendikular auf HG und hg steht, so müssen die Winkel HGC + CGE = Recto, und weil CG ein Radius auf der Tangente, so muß auch CGE + EGg ein rechter Winkel seyn §. 175.

Da HGC + CGE = CGE + GEg

so ist : : : : HGC = GEg
folglich der Winkel : GCH = GgE

und also $\triangle HGC \backsim \triangle GEg$
nach §. 151.

Also wird nun auch folgende Proportion gelten müssen:

$HG : GC = GE : Gg$ in den dafür gesetzten Zeichen

$R : \varrho = GE : e$ also

es wird also $e = \frac{GE \cdot \varrho}{R}$.

Der Ausdruck für die unendlich kleine abgekürzte Kegelfläche auf der Kugel war $2R \cdot P \cdot e$. Wenn man für e das gefundene setzt, so wird sie nun $= \frac{2RP \cdot GE \cdot \varrho}{R} = \frac{2R \cdot P \cdot GE \cdot \varrho}{R} = 2\varrho \cdot GE \cdot P$,

(wo, wie schon gesagt, ϱ den Radium der Kugel bedeutet).

Nun haben wir noch eine unendlich kleine Größe in diesem Ausdrucke, die GE, sie sey aber noch so unendlich klein, so ist sie doch, wie wir oben gezeigt haben, gleich der Hh, einem Theilchen des Radius. Man theile nun die ganze Länge Ah der Axe, die durch solchen Abschnitt der Kugel durchgeht, in bloß solche unendlich kleine Theilchen, als die Hh = GE ist, so ist offenbar, daß man einem jeden solchen unendlich kleinen Theilchen eine unendlich schmale Fläche auf der Kugelfläche zugehört, als die FfGg ist.

Allein eine jede solche unendlich schmale Fläche würde auch der andern gleich seyn. Denn man könnte die Punkte G, g annehmen, wo man wollte, und allezeit würde man dafür den Ausdruck 2ϱ. GE. P bekommen, denn R fällt aus der Gleichung heraus, und ϱ kömmt anstatt dessen in alle solche Gleichung für die unendlich schmalen Kugelstücke hinein, wo 2ϱ. P unveränderliche Größen sind, und GE wird in allen gleich groß angenommen. Es wird dieses einem im Anfange wunderlich vorkommen, aber man darf nur betrachten, da GE immer gleich groß bleibt, und auch immer doch eine unendlich kleine Größe ist, so wird, je näher G nach A rückt, der Winkel HBG immer stumpfer, also die Tangente BG liegt immer flächer in Ansehung der CB auf der Kugel, also bey einer gleichen GE wird doch die Binde FfGg immer größer, obschon die GE immer gleich unendlich klein bleibt, was also dem Umfang um die Kugel abgeht, ersetzt die Binde des abgeschnittenen Umfangs.

Alle solche Theilchen, als Hh = GE ist, zusammen, machen den ganzen Theil der Axe Ah aus. Wenn man nun so vielmal 2ϱ. GE. P addirte, als solcher Theilchen in Ah stecken, so hätte man den Ausdruck für das ganze Stück der Oberfläche dieses abgeschnittenen Stücks der Kugel, aber weil alle Hh = GE die ganze Ah ausmachen, so darf man nur 2ϱP mit Ah multipliciren, um diesen Werth auch zu bekommen. Der Inhalt also der ganzen Fläche, die auf dem abge-

geschnittenen Stücke sich befindet, ist also = 2ϱP . Ah.

Weil Ah und AH unendlich wenig verschieden sind, indem ihre Differenz hH unendlich klein ist, so wird auch dieser Ausdruck eben das sagen. Die Oberfläche eines solchen abgeschnittenen Stücks der Kugel ist = 2ϱ . P . AH.

§. 387. Ist also die Höhe eines solchen Kugelabschnitts, oder die AH gegeben, imgleichen der Radius der Kugel, so wird sich die Oberfläche desselben leicht berechnen lassen.

Z. E. es sey der Radius einer Kugel 8 Zoll, also ϱ = 8 Zoll, die AH = 2 Zoll, so ist die Oberfläche dieses Abschnitts = 2ϱ . P . AH = 2 . 8 . 2 . 3,141 . . . 100,512 Quadratzoll = 1 Fuß 51 Linien Quadratmaas.

§. 388. Ist die AH, oder die Höhe des Abschnitts nicht gegeben, aber doch der Radius der Kugel, wovon sie genommen, ist = ϱ, und der Radius der Grundfläche des Abschnitts oder die HG, welchen wir R genennt haben, so läßt sich für die Höhe des Abschnitts, oder für AH leicht ein Ausdruck finden. Denn weil CA = Radius der Kugel = ϱ, so ist also AH = AC — CH = ϱ — CH.

Weil ferner $CGq = GHq + HCq$

also $CGq - GHq = HCq$ oder in Zeichen

$$\varrho^2 - R^2 = HCq$$

also $\sqrt{(\varrho^2 - R^2)} = HC$.

Folglich ist $AH = \varrho - HC = \varrho - \sqrt{(\varrho^2 - R^2)}$.

§. 389. Wir wissen aus dem vorhergehenden Paragraphen, daß Fig. 233 die Oberfläche eines Kugelabschnitts $HKG = 2\varrho . P . AH$, wo ϱ den Radius der Kugel bedeutet. Wir wollen nun von dem Pol A bis an den Abschnitt in G die Sehne AG ziehen, und ferner vom Pole D bis nach G die Linie GD, so werden wir noch einen andern Ausdruck für AH finden.

Fig. 233.

Es ist der $\triangle ADG$ ähnlich dem $\triangle AHG$, denn nach §. 187 ist, weil AD ein Diameter, der Winkel AGD in eben diesem Triangel = Recto = dem Winkel AHG in dem Triangel AHG, und zwar ist dieser letztere Rektus nach der Construktion der Winkel bey A beyden Triangeln commun, also ist der Winkel AGH = dem Winkel GDA, und daher beyde eben benannte $\triangle$ ähnlich. Es gilt also die Proportion:

$$AH : AG = AG : AD$$

oder $AD : AG = AG : AH$ und in Zeichen

$2\varrho : AG = AG : AH$, also ist $AH = \frac{AGq}{2\varrho}$.

Folg.

Folglich der Werth für den Inhalt der Oberfläche, welcher war $2\varrho . P . AH$, wenn man anstatt AH das eben gefundene substituirt, $= 2\varrho . P . AGq = AGq . P$. Nun wissen wir noch,

$$\frac{}{2}$$

der Inhalt einer Cirkelfläche ist $r^2 P$. Wenn man nun AG als den Radius eines Cirkels nimmt, so wird $AGq = r^2$, und es wird also AG, so nach dem gefundenen Ausdruck für den Werth der Oberfläche des Abschnitts eines so großen Cirkels Radius seyn, als der Inhalt der Oberfläche des Abschnitts ausmacht, oder der Inhalt der Oberfläche eines Abschnitts der Kugel ist gleich dem Inhalt eines Cirkels, dessen Radius die Sehne zwischen dem Pol und dem Abschnitt ist.

§. 390. Wenn der Kugelabschnitt größer wird, so kömmt die schneidende Ebene immer dem Mittelpunkte der Kugel näher nach §. 383, wenn sie den Mittelpunkt erreicht, so theilt sie die Kugel in zwey gleiche Theile. Der Abschnitt LAl Fig. 233, wo die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, wird also eine halbe Kugel seyn, der Bogen Al muß daher ein Quadrant seyn nach §. 384. Nach vorhergehendem Paragraphen wird also die Sehne Al der Radius eines Cirkels seyn müssen, welcher so viel Flächenraum in sich enthält, als die Oberfläche dieser halben Kugel ausmacht.

Weil der Bogen AI ein Quadrant ist, so ist der Winkel ACI ein rechter Winkel, und der Triangel ACI, welcher durch die beyden Radios AC und CI, und die Chorde AI, die das Maas des Cirkels ist, welcher der Oberfläche der halben Kugel gleicht, gemacht wird, ein rechtwinklichter Triangel. Nun läßt sich leicht ein Ausdruck für die Sehne AI finden. Es ist nemlich

$AIq = ACq + CIq$ oder in Zeichen

$AIq = \varrho^2 + \varrho^2 = 2\varrho^2.$

Wenn AI der Radius des Cirkels ist, welcher der Oberfläche der halben Kugel gleicht, so wissen wir, daß, da der allgemeine Ausdruck für die Fläche eines Cirkels ist $= r^2P$, also der Inhalt eines solchen Cirkels seyn würde $AIq \cdot P$, aber AIq ist, wie wir eben gesehen, $= 2\varrho^2$ (ϱ bedeutet den Radium der Kugel), also $AIq \cdot P = 2\varrho^2P$.

Da $\varrho =$ dem Radio der Kugel, so ist der Inhalt des Circulus maximus der Kugel $= \varrho^2P$, also $2\varrho^2P$ ist der Inhalt der Oberfläche zweyer größten Cirkel der Kugel, also **die Oberfläche einer halben Kugel ist gleich dem Inhalte der Oberfläche zweyer großen Cirkel der Kugel.**

§. 391. Jede Hälfte der Kugel ist der andern vollkommen kongruent, denn sie entsteht von kongruenten Dingen auf gleiche Art, eine Hälfte paßt also in die Oberfläche der andern Hälfte. Eine ganze Kugel wird also nochmal so

viel

viel Oberfläche haben, als eine halbe, und der Ausdruck für sie muß seyn $2\varrho^2 . P . 2 = 4\varrho^2 P$, oder die Oberfläche der ganzen Kugel ist gleich der Oberfläche von vier größten Cirkeln der Kugel.

Exempel: Man giebt gewöhnlich den Durchmesser der Erdkugel zu 1720 Meilen an, also ist der Radius derselben $= \frac{1720}{2} = 860$ Meilen $= \varrho$, folglich ihre Oberfläche $= 4 . 860^2 . 3{,}141\ldots = 9292334{,}4$ Quadratmeilen.

§. 393. Wir haben gesehen, wie groß die Oberfläche eines Abschnitts, der kleiner als die halbe Kugel, einer halben und ganzen Kugel sey. Aber auch die Oberfläche eines Abschnitts, der größer ist, als die halbe Kugel, ist einer Cirkelfläche gleich, welche zum Radius die größte Sehne hat, die zwischen dem Pol und dem Abschnitte sich befindet, oder Fig. 234 die Oberfläche des Abschnitts der Kugel DKG ist gleich einer Cirkelfläche, deren Radius die Sehne DG ist. Fig. 234.

Der ganzen Kugel Oberfläche war gleich vier Circulis maximis, oder mit einem allgemeinen Ausdruck $= 4\varrho^2 . P$, weil nun AD ein Diameter der Kugel, also $= 2\varrho$, so ist sein Quadrat $= 4\varrho^2$

also $\frac{ADq = 4\varrho^2 . P}{ADq . P = 4\varrho^2 P}$

oder

oder der ganzen Kugel Oberfläche ist auch einem Cirkel gleich, dessen Radius der Diameter der Kugel ist.

Man ziehe von dem Pole A nach dem Ende der Sehne, welche zwischen dem Pole D und dem Abschnitte G steht, noch eine Sehe AG, so ist AG der Radius des Cirkels für die Oberfläche der Kugel KAG nach §. 389, und der Ausdruck dafür wäre AGq. P.

Aber durch die Lage der Sehnen DG und AG erlangen wir auch einen rechtwinklichten Triangel AGD, denn der Winkel AGD ist = Recto, weil er mit beyden Schenkeln auf dem Diameter steht, AD ist die Hypotenuse dieses Triangels. Es gilt also folgender Satz:

$$ADq = AGq + GDq . P$$

$$ADq . P = AGq . P + GDq . P$$

$$ADq . P - AGq . P = GDq . P.$$

Aber ADq. P war die Oberfläche der ganzen Kugel, AGq. P war die Oberfläche des Abschnitts KAG. Wenn man von der Oberfläche der ganzen Kugel die Oberfläche des kleinen Abschnitts KAG abzieht, so muß der Rest nothwendig die Oberfläche des großen Abschnitts DKG seyn. Dafür gilt nun der Ausdruck GDq. P, wenn man GD als Radius betrachtet, $= r^2 P$, also ist GD der Radius eines Cirkels, dessen Oberfläche so groß ist, als die Oberfläche des Kugelabschnitts

schnitts DKG, der größer ist, als die halbe Kugel. Und dieses ist es, was wir erweisen wollten.

§. 394. Wenn Fig. 235 zwey Ebenen, (wovon FG und Fg Linien seyn sollen, die sich darinn befinden) die einander parallel sind, und die Kugel schneiden, so sind die Cirkel, die dadurch in der Kugel entstehen, parallel, FG und Fg sind ihre Durchmesser. Der Platz der Oberfläche auf der Kugel, der zwischen zweyen solchen Parallelcirkeln sich befindet, hier der Theil der Oberfläche der Kugel FfGg, heißt eine Zone. Den Oberflächeninhalt einer solchen Zone zu finden, muß uns aus dem vorhergehenden leicht seyn. Wir wissen nach §. 386, daß, wenn ϱ = dem Radius der Kugel, und Ah oder AH die Höhe eines Abschnitts derselben bedeutet, (nur ist hier Hh nicht wieder unendlich klein, sondern eine bestimmte Größe) alsdenn der Inhalt der Oberfläche des Abschnitts fAg der Kugel seyn würde = $2\varrho . P . Ah$. Der Inhalt der Oberfläche des Abschnitts der Kugel FAG würde seyn = $2\varrho . P . AH$. Wenn man von der Oberfläche des Abschnitts FAG die Oberfläche des Abschnitts fag abzieht, so bleibt die Oberfläche der Zone übrig. Setzt man nun für die Oberflächen dieser Abschnitte die ihnen zugehörigen Werthe, so hat man einen Ausdruck für die Oberfläche der Zone, also $2\varrho . P . AH - 2\varrho . P . ah$ = der Oberfläche der Zone FfGg, oder = $2\varrho , P . (AH - ah)$ aber

AH

AH — ah ist = Hh, also 2ϱ . P . Hh = der Oberfläche der Zone, aber Hh ist die Höhe der Zone, 2ϱ . P ist = d . P, die Peripherie eines grösten Cirkels auf der Kugel §. 225. **Also die Peripherie eines grösten Cirkels auf der Kugel mit der Höhe der Zone multiplicirt, giebt den Inhalt der Oberfläche der Zone.**

Fig. 236. §. 395. Wenn Fig. 236 AH eine Axe der Kugel ist, wodurch zwey oder mehr Ebenen unter verschiedenen Winkeln liegen, so entstehen so viel verschiedene Circuli maximi durch die Kugel, die allezeit ein Stück aus der Kugel als ABHECA, AEHFCA schneiden, ein solches Stück kann man einen **keilförmigen Ausschnitt** der Kugel, oder auch wol bloß einen **Ausschnitt** der Kugel nennen. Von dem körperlichen Inhalt eines solchen Ausschnitts werden wir nachher reden, jetzt sprechen wir von dem Inhalte der Oberfläche eines solchen Ausschnitts. Eine Spelte aus einem Apfel geschnitten, giebt einige Idee eines solchen Ausschnitts.

Es ist uns bekannt, daß eine Kugel entsteht, wenn ein halber Cirkel ABH sich um den unbeweglichen Durchmesser AH dreht. Nun sey BD gleichfalls ein halber Cirkelbogen von eben dem Durchmesser, und dessen Ebene auf AC senkrecht steht, und dessen Centrum mit dem Centrum des erstern in einen Punkt fällt, der Bogen AB wird also ein Quadrant. Nun fällt in die Augen,

gen, daß, wenn der halbe Cirkel ABH sich um die Axe AH dreht, der Punkt B beständig auf dem halben Cirkel BD bleibt, und der Bogen BD als das Maas angenommen werden kann, wie viel Grade irgends ein Punkt, der in der Cirkellinie ABH liegt, beschrieben hat. Da ABH unbiegsam bleibt, so muß, wenn ABH sich durch **gleiche** Krümmungen auf BD bewegt hat, auch jeder Punkt in ABH einen gleichen Weg beschrieben haben, also die ganze Krümmung ABH eine gleiche Oberfläche auf der Kugel gemacht haben. Hat ABH sich **nicht durch gleiche** Krümmungen des Bogens BD bewegt, so werden die Oberflächen verschieden seyn, nachdem sein Weg kürzer oder länger gewesen ist, oder nachdem die Theile des Bogens BE, EF verschieden sind. Die Oberflächen ABHEA, AEHFA müssen sich in Ansehung ihrer Größe alsdenn verhalten, als die Bogen BE, EF. Diese Bogen aber verhalten sich wie die Winkel, welche sie messen §. 244, oder hier wie die Winkel BCF, ECF. Dieses sind aber die Winkel der Ebenen, welche sich hier unter einander schneiden, also auch die Winkel, worunter sich diese größten Cirkel, welche die Ausschnitte verursachen, einander schneiden. Also verhalten sich die Oberflächen solcher Ausschnitte, wie die Winkel, unter welchen sich die verschiedenen Circuli maximi, welche die Ausschnitte verursachen, einander schneiden. Wenn man also die Oberfläche einer halben Kugel, oder die Hälfte dieser Oberfläche, welches ein Aus-

schnitt von 90 Grad also seyn muß, weiß, und wenn nun die Winkel bekannt sind, welche zwey schneidende Cirkel, die einen Ausschnitt verursachen, machen, so läßt sich allezeit daraus die Oberfläche eines Ausschnitts finden.

Weil ein jeder Cirkel 360 Grad hat, und die ganze Oberfläche der Kugel vier Circulis maximis gleich ist, so läßt sich schließen:

360°:4 Circulis maximis = die gegebenen Grade zur verlangten Oberfläche eines Ausschnitts.

Z. E. es sey der Bogen EF, oder Winkel ECF von 20 Graden, so schlösse man: 360°:4 Circulus maximis = 20 Grad : $\frac{4 \text{ Circ. max. } 20}{360}$ =

$\frac{80 \text{ Circ. max.}}{360}$ = $\frac{2}{9}$ Circulis maximis.

§. 396. Wenn man nun eine solche Ebene Fig. 236, welche auf der Axe AH senkrecht steht, wie hier BGD ist, durch die Kugel legt, sie gehe nun durch den Mittelpunkt C, wie hier, oder nicht, so nennt man solche Cirkelstücke, als nun ABECA, AEFH sind, pyramidenförmige Stücke der Kugel. Es gelten für die Größe ihrer Oberflächen eben die Betrachtungen des vorigen Paragraphen, denn nun sieht man gleich, daß man nur die Bewegung des Bogens AB durch gleiche oder ungleiche Räume auf dem Bogen BD zu betrachten hat. Es werden sich daher die Oberflächen der pyramidenförmigen Ausschnitte

te verhalten gleichfalls wie die Winkel, die ihre schneidenden Cirkel unter einander machen, oder wie die Bogen BE, EF.

Wenn nun die Oberfläche eines ganzen Abschnitts, als ABD ist, welchen man aus §. 386 finden kann, und die Winkel BCE, ECF bekannt, so läßt sich durch die Proportionskegel gleichfalls der Inhalt der Oberfläche eines solchen pyramidenförmigen Stücks leicht finden. Man schließt nemlich:

360°: zum Inhalt der Oberfläche des ganzen Abschnitts = die gegebene Anzahl von Graden: Inhalte des pyramidenförmigen Stücks.

Exempel: Es sey der Oberflächeninhalt des Abschnitts ABD = 80 Quadratzoll, der Winkel ECB = 60 Grad, so schlösse man:

360°: 80 = 60 zur Oberfläche des pyramidenförmigen Stücks AEF.

Diese Oberfläche AEF wäre also = $\frac{60 \cdot 80}{360}$ = $13\frac{1}{3}$ Quadratzoll = 13 Zoll, 33 Linien Quadratmaas.

§. 397. Es mag alles so bleiben, wie es in beyden vorigen Paragraphen gewesen ist, nur daß wir die Kugel noch mit einer Ebene IM, welche der vorigen BD parallel ist, schneiden wollen, wodurch parallele Cirkelflächen IM, BD entstehen, auf welchen beyden die Axe der Kugel AH senkrecht steht. Es entstehen nun viereckte Stücke auf der Oberfläche der Kugel IKBE, BELF, welches Theile der Zone IBMD sind. Fig. 236.

Allein an den Betrachtungen der vorigen beyden Paragraphen ändert das nichts, daß wir jetzt nur die Bewegung des Stücks IB des Bogens ABH zu betrachten haben. Es werden sich daher solche viereckte Stücke der Kugel, die sich zwischen Parallelkreisen und denen auf den Parallelkreisen senkrechten Bogen großer Kreise befinden, als IKBE und KLFE sind, gleichfalls wie die Winkel, welche diese schneidenden senkrechten Kreise mit einander machen, oder wie die Bogen, die diese Winkel messen, nemlich wie BF : EF, oder auch wie IK. KL verhalten.

Wenn man also die Oberfläche der Zone weiß, die ganz um die Kugel geht, und man weiß die Grade eines solchen Bogens, als BE ist, so läßt sich daraus der Inhalt des viereckten Stücks finden. Man schließt:

360° : zur ganzen Oberfläche der Zone = die gegebene Anzahl Grade : zu des viereckten Stücks IBKE Oberfläche.

Exempel: Es sey die Oberfläche der ganze Zone 50 Quadratzoll, der Winkel, den die Circuli maximi ABH und AEH mit einander machen, = 60 Grad, so schlösse man: 360° : 50 = 60 : zur Oberfläche des viereckten Stücks IKBE, und die Oberfläche IKBE wäre = $\frac{50 \cdot 60}{360} = 8\frac{1}{3}$ Quadratzoll, oder 8 Zoll, 33 Linien Quadratmaas.

§. 398. Der allgemeine Ausdruck für die Oberfläche einer Kugel war:

$4\rho^2 P$ §. 391.

Nun

Nun sey eine Kugel = S, ihr Radius = R, es sey eine andere Kugel = s, ihr Radius = r, so wäre der ersten Kugel Oberfläche $4R^2P$, der andern Kugel Oberfläche = $4r^2P$. Also wenn man gleiches für gleiches setzt, so würden sich beyder Kugeln Oberflächen verhalten, wie diese gefundene Werthe, oder es wäre

die eine Oberfläche : andern Oberfl. = $4R^2P : 4r^2P$

$4P$

die beyden letzten Glieder durch

$4P$ dividirt

die eine Oberfläche : zur andern = $R^2 : r^2$.

Imgleichen weil $R^2P = \frac{D^2P}{4}$ und $r^2P = \frac{d^2P}{4}$ nach §. 232, so könnte man auch schließen, die eine Oberfläche zu der andern Oberfläche = $\frac{4D^2P}{4} : \frac{4d^2P}{4} = D^2P : d^2P = D^2 : d^2$, oder die Oberflächen der Kugeln verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Radiorum oder ihrer Durchmesser.

Exempel: Eine Kugel habe zum Radio 4 Zoll, die andere 8 Zoll, so verhalten sich beyder Oberflächen, wie: 16 : 64, welches = 1 : 4, woraus man auch sieht, daß eine Kugel, die noch einmal einen so großen Radium hat, viermal mehr Oberfläche habe.

§. 399. Wir haben die Oberflächen der Kugel schon ziemlich für sich betrachtet, wir wollen sie nun mit den Oberflächen anderer Körper vergleichen, wodurch es uns gleichfalls ungemein leicht wird, von allen den Theilen der Kugel die Oberflächen anzugeben, und sie in andere Flächenfiguren zu verwandeln. Wir vergleichen sie nur mit der Oberfläche eines geraden Cylinders. Da diese nach §. 362 ein Viereck ist, so wissen wir aus dem vierten Kapitel, wie wir ein gegebenes Viereck in andere geradlinichte Figuren verwandeln sollen.

Aus §. 391 wissen wir, daß die ganze Oberfläche einer Kugel gleich sey der Oberfläche vier ihrer größten Cirkel. Der allgemeine Ausdruck dafür war:

Oberfläche der Kugel $= 4\varrho^2 P$.

Nun wollen wir einen Cylinder nehmen, dessen Höhe = dem Durchmesser der Kugel = zwey Radiis, also seine Höhe mit einem allgemeinen Ausdruck $= 2\varrho$. Der Durchmesser seiner Grundfläche sey auch gleich dem Durchmesser der Kugel, also auch $= 2\varrho$.

Die Oberfläche eines geraden Cylinders war nach §. 391, wenn a die Höhe und d der Durchmesser seiner Grundfläche war $=$ adP. Wenn wir nun hier anstatt a die 2ϱ, und anstatt d auch 2ϱ, folglich Durchmesser und Höhe des Cylinders gleich dem Durchmesser der Kugel nehmen, so wird der Ausdruck für die Oberfläche eines solchen Cylinders $2\varrho . 2\varrho . P = 4\varrho^2 P$, welcher dem

Aus-

Ausdrucke für die Oberfläche der Kugel gleich ist. Daher ist folgender Satz richtig: **Die Oberfläche einer Kugel ist der Oberfläche eines geraden Cylinders gleich, dessen Durchmesser der Grundfläche und dessen Höhe gleich, und beyde dem Durchmesser der Kugel gleich sind.**

Die Figur 237, wo die Kugel in MDHB in dem Cylinder KGIL eingeschlossen ist, und wo der Durchmesser der Kugel DB = dem Durchmesser der Grundflächen des Cylinders KL = GI, und seiner Höhe = KG, oder wo DB = KL = GI = KG ist, zeigt solche cylindrische Oberfläche KGLI an, die dieser Kugel gleich ist. Fig. 237.

Die halbe Kugel DMB wird daher der halben cylindrischen Oberfläche KDBL gleich seyn, das ist, weil DB = GI = KL, und KD = $\frac{1}{2}$KG = CM = dem Radius der Kugel. **Sie wird eines Cylinders Oberfläche gleich seyn, dessen Grundflächen gleich dem größten Cirkel der Kugel, und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.** Bey beyden sind die Grundflächen der Cylinder nicht mit gerechnet, beyde Flächen lassen sich leicht in Vierecke verwandeln; der ganzen Kugelfläche **in ein geradwinklichtes Viereck, dessen eine Seite gleich der Peripherie des größten Cirkels der Kugel, und die Höhe gleich dem Durchmesser derselben**; die halbe in ein geradlinichtes Viereck, dessen eine Seite gleichfalls = der Peripherie des größten

Cirkels der Kugel, und die Höhe gleich dem Radio derselben, denn das ist der Inhalt der Oberfläche dieser Cylinder, woraus die Verwandlung derselben in andere geradlinichte Figuren durch Zeichnung oder Rechnung leicht folgt.

Fig. 337. §. 400. Nach dem 386sten § ist die Oberfläche eines Abschnitts der Kugel NHO, der kleiner ist, als die Halbkugel 2ϱ.P.AH (was diese Zeichen bedeuten, ist uns noch von daher bekannt). Wenn NO mit DB parallel ist, und man die Linie NO, welche den Durchmesser der Abschnittsfigur anzeigt, nach beyden Seiten, bis sie den Umfang der Cylinderfläche erreichen, also bis P und Q verlängert, so wird dadurch ein Stück vom Cylinder abgeschnitten, das eine gleiche Höhe AH mit dem Abschnitt der Kugel hat. Allein weil Pa = DB, DB = Gl = dem Durchmesser der obern Durchschnittsfigur in dem Cylinderstücke, so ist die Durchschnittsfigur im Cylinder gleich der untern Grundfläche, und alle beyde einem **größten Cirkel** der Kugel gleich. Da ϱ = dem Radius der Kugel, also auch daher dem Radius der Durchschnittsfigur, so würde, wenn, wie wir voraussetzen, daß AH auf H, dem Centro der untern Grundfläche, senkrecht steht, der Ausdruck für dieses Stück PaGl der Oberfläche des Cylinders, welchen man als einen eignen Cylinder betrachten kan, seyn = 2ϱ.P.AH, (hier ist AH, was dorten a, nemlich die Höhe des Cylinders ist). Der Ausdruck für diesen Abschnitt

der

der Kugel war auch $2\varrho P . AH$, also beyde Ausdrücke völlig gleich, folglich auch beyde Oberflächen gleich, das ist, die Oberfläche des Abschnitts der Kugel PHQ, welcher kleiner ist, als die Halbkugel, ist eines Cylinders Oberfläche PQGI (die Grundflächen nicht mit gerechnet) gleich, dessen Grundflächen dem grössten Cirkel der Kugel gleich, und dessen Höhe die Höhe des Abschnitts ist.

Ein geradwinklichtes Viereck, welches zur einen Seite die Länge der Peripherie der Grundfläche, oder des grössten Cirkels der Kugel hätte, und zur Höhe die Höhe des Abschnitts, wäre der Oberfläche des Cylinders PQGI (also auch der Oberfläche der Kugel PHQ) gleich.

§. 401. Wenn aber auch ein Kugelabschnitt NMO grösser ist, als die Halbkugel, so ist es gleichfalls wahr, daß seine Oberfläche eines Cylinders Oberfläche gleich sey, dessen Grundflächen PQ und KL gleich dem grössten Cirkel der Kugel, und seine Höhe MA gleich der Höhe des Abschnitts ist. Der Beweis davon ist sehr leicht.

Der ganzen Kugel Oberfläche Fig. 237 war gleich nach §. 399 des Cylinders KLGI Oberfläche; des Abschnitts der Kugel NHO war gleich des Stücks des Cylinders PQGI Oberfläche nach vorhergehendem §; also muß nothwendig das übrige der Kugeloberfläche, oder des Abschnitts NMO des Cylinders PKLQ Oberfläche gleich seyn. Das ist aber ein solcher Cylinder, wie wir im

Anfange dieses Paragraphen angaben; also ist unser Satz bewiesen.

Auf alle Fälle ist also die Oberfläche eines Abschnitts der Kugel, sie sey kleiner, größer, oder so groß als die Halbkugel, gleich der Oberfläche eines geraden Cylinders, welcher den größten Cirkel der Kugel zur Grundfläche, und zur Höhe die Höhe des Abschnitts hat.

§. 402. Aus allem diesem folgt auch leicht Fig. 237 die Vergleichung der Oberfläche einer Zone NDBO mit der Oberfläche eines Cylinders. Sie ist nemlich gleich der Oberfläche eines Cylinders DPBQ, dessen Grundflächen PQ, DB gleich dem größten Cirkel der Kugel, und dessen Höhe CA gleich der Höhe der Zone ist. Denn

des Abschn. NMO Oberfl. = des Cyl. KLPQ Oberfl.
des Abschn. MDB " " = des Cyl. KLDB " "

folglich NMO — MDB = KLPQ — KLBD

aber NMO — MDB = der Zone NDBO und
KLPQ — KLDB = der Oberfl. DPBQ.

Folglich Oberfläche der Zone NDBO = Oberfläche des Cylinders DPBQ.

Ein geradwinklichtes Viereck also, dessen eine Seite oder Grundlinie die Länge der Peripherie des größten Cirkels der Kugel, und dessen Höhe der Höhe der Zone AC gleich ist, ist

auch

auch gleich der Oberfläche des Cylinders DPBQ, also auch gleich der Oberfläche der Zone NDBO.

Man sieht hieraus, wie leicht sich durch die Schnitte der Kugel mit und durch den Cylinder ihre Oberflächen heraus bringen lassen. Wenn man Fig. 237 mit der Grundfläche Gl immer parallele Schnitte thut, so wird man immer gleiche Oberflächen im Cylinder und Kugel erhalten.

Es sollte uns nicht schwer fallen, auf eben die Art die Oberflächen der Ausschnitte der Kugeln mit Theilen der Oberfläche des Cylinders zu vergleichen. Wir besorgen zu weitläuftig zu werden, und müssen es daher unterlassen, da ohnedem diese Schrift mehr, wie wir im Anfange wollten, unter den Händen gewachsen ist. Wir hoffen, nichts Wichtiges für erste Anfangsgründe von der Oberfläche der Kugel vergessen zu haben. Wir betrachten nun ihren körperlichen Inhalt und Ausmessung.

§. 403. Es sey Fig. 238 der Bogen AD der vierte Theil einer Kreislinie, oder ein Quadrant, der Mittelpunkt des Cirkels, wozu er gehört, sey in C, alsdenn sind CA und CD seine Radii, und solche sind, wie bekannt ist, gleich. Sie stehen ferner, weil der Bogen AD ein Quadrant ist, senkrecht auf einander, so daß also der Winkel ACD ein rechter Winkel ist. Man ziehe nun mit CD und AC die AB und BD parallel und gleich, so ist um den Quadranten ein Fig. 238.

Quadrat ABCD beschrieben. Man ziehe ferner von B nach C die Diagonale BC. Wenn AC unbeweglich bleibt, aber der Quadrant ADC sich darum bewegt, bis er wieder an seine alte Stelle kömmt, so beschreibt selbiger eine **halbe Kugel**. Bewegen sich die Seiten des Quadrats AB, BD und CD gleichfalls um AC, bis wieder an die alte Stelle, so beschreiben sie einen **Cylinder**, und der Radius beyder Grundflächen dieses Cylinders AB = CD. Bewegen sich endlich die Seiten AB und BC des Triangels ABC gleichfalls um AC, so beschreiben sie einen **Kegel**, dessen Spitze in C, und dessen Radius der Grundfläche AB.

Durch alles der angezeigten Seitenbewegung entsteht also eine **halbe Kugel**, **Cylinder** und **Kegel**, die **alle** eine **gleiche Grundfläche** haben, weil der Radius ihrer Grundflächen AB = CD ist, und auch alle eine gleiche Höhe, nemlich die AC = Radio der Kugel.

Man ziehe mit CD, die parallel AB ist, **zwey unendlich nahe an einander liegende** parallele Linien, die Hl und die hi, also ist Hh = li, und dazwischen befindet sich eine **unendlich kleine Weite**.

Diese beyden Linien mögen sich mit bewegt haben, so wird der Raum HGhg auf dem Kegel ein unendlich kleines Stück eines abgekürzten Kegels, dessen Radii beyder Grundflächen die HG und hg sind. Der Raum auf der Kugel HEhe wird ein unendlich kleines Stück einer körperli-

chen

chen Zone, da die Radii der Grundflächen die HE und he sind, und der Raum auf dem Cylinder Hlhi wird ein unendlich kleines Stück eines Cylinders, dessen Radii beyder Grundflächen gleich, nemlich Hl = hi auch gleich AB = CD sind, wie wir schon wissen.

Den körperlichen Inhalt des unendlich kleinen Stücks des Kegels sowol als des Cylinders können wir nun nach den gelernten Grundsätzen angeben. Es wird nun darauf ankommen, daß wir das kleine Stückchen der Zone damit vergleichen, und dadurch für die Kugel etwas erhalten.

Wenn wir den Radium CA der Kugel nach K hin verlängern, und eine Tangente an den Punkt E oder e ziehen, die beyde unendlich nahe liegen, so wird diese den verlängerten Radium, den man hier als die halbe Axe betrachten kann, irgendwo in K erreichen. Man kann auch, weil E und e unendlich nahe sind, das Stückchen der Tangente Ee als eine unendlich kleine gerade Linie ansehen, welche in die Kreislinie fällt.

Hiedurch erlangt man, daß man das unendlich kleine Stückchen der Kugel HEhe als einen geraden abgekürzten Kegel betrachten kann, dessen Spitze sich in K befindet, und dessen Grundflächen Radius die HE und he wären.

Nach §. 368 wissen wir, daß, wenn man die Höhe eines abgekürzten Kegels, hier in der Kugel die Hh, nennt, die beyden Radios der Grundflächen, hier die HE und he, R und r setzt, und P das gewöhnliche und oft betrachtete

Glied

Glied des allgemeinen Verhältnisses des Diameters zur Peripherie 1 : P bedeuten läßt, alsdenn der körperliche Inhalt eines abgekürzten Kegels war $(R^2 + rR + r^2) \frac{Ph}{3}$. Weil aber hier die Hh unendlich klein ist, so kann man ohne Irrthum R = r, oder beyde Radios der Grundflächen gleich annehmen. Alsdenn, wenn anstatt r die R in dem Ausdrucke substituirt wird, so wird daraus $(R^2 + R^2 + R^2) \frac{Ph}{3} = \frac{3R^2Ph}{3} =$ $R^2P.h.$ Und weil die h hier die Hh, und die R die HE = he ist, so ist der Ausdruck für das kleine Stückchen auf der Kugel HEhe = $R^2P.$ Hh oder HEq. P. Hh. Betrachtet man das unendlich kleine Stückchen des abgekürzten Kegels HGhg, so ist seine Höhe gleichfalls Hh, und da das eine unendlich kleine Größe ist, so kann man wieder HG = hg annehmen. Dieses sind die Radii der Grundflächen, und wir wollen sie nun hier = r nennen. Der Ausdruck also für dieses Stückchen eines abgekürzten Kegels würde daher = r^2. P. Hh oder HGq. P. Hh seyn.

Wenn wir nun den Radium der Grundflächen des Cylinders AB = CD, welcher auch der Radius der Grundfläche der halben Kugel ist, und welchen die Radii der Grundflächen des kleinen Cylinderstückchens Hl = hi gleich sind, wenn wir den = ϱ nennen, so wird der körperliche Inhalt

halt des kleinen Cylinderstückchens nach §. 361 seyn $= \varrho^2 . P . Hh$ oder $Hlq . P . Hh$.

Weil, wie wir im Anfange dieses Paragraphen zeigten, $AB = AC$ ist, so ist der Triangel ABC ein gleichschenklichter Triangel, und daher der Winkel ABC = dem Winkel ACB, und weil HG parallel AB nach der Construktion, so ist nach §. 144 der Winkel HGC = dem Winkel ABC, also auch der Winkel $HGC = ACB$ oder HCG, und daher ist auch der Triangel HGC gleichschenklicht, und $HG = HC$.

Nun ist ferner, weil bey H ein rechter Winkel ist, $HCq + HEq = CEq$, und weil HE aus dem Anfange dieses Paragraphen = R und CE, CD, weils Radii einer Kugel, $= \varrho$ oder dem Radius der Kugel, so ist also dieses substituirt $HCq + R^2 = \varrho^2$, und weil $HC = HG$, so ist, statt HC die HG substituirt, gleichfalls $HGq + R^2 = \varrho^2$, oder weil auch $HG = r$ angenommen ist, $r^2 + R^2 = \varrho^2$

der Ausdruck fürs Kugelstückchen war $= R^2 . P . Hh$
der Ausdruck fürs Kegelstückchen war $= r^2 . P . Hh$

---

also das Kegelstückchen und Kugelstückchen addirt, ist die Summe der Kegel- und Kugelstückchen $(R^2 + r^2) . P . Hh$.

Aber $r^2 + R^2 = \varrho^2$, wie wir eben bewiesen, das für diesen Ausdruck gesetzt, so ist also $(r^2 + R^2 . P . Hh = \varrho^2 . P . Hh$. Nun war $\varrho^2 . P . Hh$ der Ausdruck für das cylindrische Stückchen

also das Kugelstückchen + Kegelstückchen =
dem Cylinderstückchen

---

folglich das Kugelstückchen = dem Cylinder-
stückchen — dem Kegelstückchen.

Dieses alles läßt sich eben so beweisen, man mag die Hl und hi auf der Kugel legen, wo man in der AC und BD will. Wir haben nun einen Werth für das Kugelstückchen gefunden, wenn wir nemlich nun hier für die gefundenen Ausdrücke setzen,

so ist also $R^2P . Hh = \varrho^2P . Hh - r^2P . Hh$.

Wenn wir nun AH oder Ah (beyde sind gleich, weil ihre Differenz Ah eine unendlich kleine Größe ist) in eben solche unendlich kleine Theile, als die Hh ist, theilen, so würde die Summe aller dieser Kugelstückchen = der Summe aller der Cylinderstückchen — der Summe aller abgekürzten Kegelstückchen. Alle unendlich kleine Theilchen der Hh auf AH aber machen selbst die AH aus, folglich die Summe aller Cylinderstückchen wird dem ganzen ABHI, die Summe aller abgekürzten Kegelstückchen dem ganzten abgekürzten Kegel ABHG, und die Summe aller Kugelstückchen dem ganzen Abschnitt der Kugel AHE gleich seyn.

Es ist also das Stück Kugel, das von A bis an H enthalten ist, gleich dem Cylinder, der von A bis H enthalten ist, (und AB = dem Radio der Kugel zur Grundfläche hat) minus dem abgekürzten Kegel von gleicher untern Grundfläche, oder der auch AB zum Radio der Grundfläche

che hat, und gleiche Höhe AH mit der Kugel und Cylinder hat.

Für solchen Inhalt des Abschnitts der Kugel läßt sich nun leicht ein Ausdruck in bekannten Werthen der Kugel finden. Wir müssen nur einen Ausdruck für den Cylinder — dem abgekürzten Kegel suchen, weil das der Werth des Kugelabschnitts ist. Für den Cylinder wäre der Ausdruck $\varrho^2 P . AH$, und wenn wir AH allgemein $= a$ nennen, so wäre er $\varrho^2 . P . a$ nach §. 361.

Nun ist der Radius AB der untern Grundfläche des abgekürzten Kegels auch $= \varrho$, aber für den Radium der obern Grundfläche oder für die HG müssen wir noch einen Ausdruck suchen. Wir wissen, daß $AC = \varrho$, und $AH = a$ ist, also ist $HC = AC - AH = \varrho - a$. Nun haben wir aber auch oben gesehen, daß $HC = HG$, also $HG = \varrho - a$. Der allgemeine Ausdruck für einen abgekürzten Kegel, den wir auch schon angeführt, ist $(R^2 + rR + r^2) \frac{P . h.}{3}$ Hier in unserm Falle ist nun $R = \varrho$, oder bedeutet $\varrho = AB$, die r bedeutet die HG oder unser $\varrho - a$, und die h bedeutet unser AH oder unser a.

Dieses nun substituirt, so wird der Werth unsers abgekürzten Kegels $(\varrho^2 + \varrho . (\varrho - a) + (\varrho - a)^2) \frac{Pa}{3}$. Dieses wirklich multiplicirt

$$= (\varrho^2 + \varrho^2 - a\varrho + \varrho^2 - 2a\varrho + a^2) \frac{Pa}{3}$$

$= (3\varrho^2 - 3a\varrho + a^2) \frac{Pa}{3}$ = dem abgekürzten Kegel, dessen Höhe AH, und der Radius der Grundflächen AB und HG sind. Nun wäre also der Abschnitt der Kugel = dem Cylinderstück, dessen Höhe AH — dem abgekürzten Kegelstücke, dessen Radius der Grundfläche AB und HG, und seine Höhe auch AH, hiefür die Werthe gesetzt, $= \varrho^2 Pa - (3\varrho^2 - 3a\varrho + a^2) \frac{Pa}{3}$, wenn man beyde Glieder unter einerley Benennung bringt, $= \frac{3\varrho^2 Pa}{3} - (3\varrho^2 - 3a\varrho + a^2) \frac{Pa}{3}$, wo $\frac{Pa}{3}$ ein gemeinschaftlicher Faktor ist, also $= (3\varrho^2 - (3\varrho^2 - 3a\varrho + a^2) \frac{Pa}{3}$, oder wenn man nun die Größen unter dem Minuszeichen ohne Klammer setzt, $= (3\varrho^2 - 3\varrho^2 + 3a\varrho - a^2) \frac{Pa}{3} =$

$(3a\varrho - a^2) \frac{Pa}{3}$, = also dem Abschnitte der Kugel. Wenn also die Höhe AH eines Abschnittes = a, der kleiner als die Halbkugel ist, nebst dem Radius der Kugel = ϱ gegeben ist, so läßt sich durch diese Formel ihr Inhalt berechnen.

Exempel: Der Radius einer Kugel sey 8 Zoll, also $\varrho = 8$; die Höhe AH des Abschnittes 2 Zoll,

2 Zoll, also a = 2, so ist der Abschnitt = $(3ae - a^2)\frac{Pa}{3} = (3 \cdot 2 \cdot 8 - 4) \cdot \frac{3,141 \cdot 2}{3} =$

$(48 - 4)\frac{6,282...}{3} = \frac{44 \cdot 6,282...}{3} = 92,136$

Cubikzoll, oder 92 Zoll, 136 Linien Cubikmaas.

§. 404. Aus dem Abschnitte einer Kugel Fig. 239 AME, welcher die Höhe AH hat, und kleiner ist, als die Halbkugel, und welchen wir nun eben haben kennen lernen, werden wir auch den Inhalt der halben Kugel, und daraus die ganze Kugel kennen lernen. Fig. 239.

Wir theilten Fig. 238 die AH in lauter solche unendlich kleine Theile ein, als die H war, und bewiesen daraus, daß Fig. 239 das Stück der Kugel AME = sey dem Cylinder PLI — dem abgekürzten Kegel PBNG, da wir denn auch einen Ausdruck für das Stück Kugel in bekannten Dingen der Kugel gaben.

Wenn wir Fig. 238 und Fig. 239 die ganze Höhe aller drey Körper, nemlich die AC = dem Radio der Kugel in alle solche kleine Theile, als Fig. 238 die Hh ist, theilen, so wird auf eben die Art also folgen und richtig seyn, daß die ganze halbe Kugel Fig. 239 OAD = dem ganzen Cylinder POBD — dem ganzen Kegel PCB, oder eine halbe Kugel ist gleich einem Cylinder minus einem Kegel, die mit ihr

gleiche Grundfläche OD und gleiche Höhe AC haben.

Auch hiefür läßt sich leicht ein Ausdruck in bekannten Werthen der Kugel finden. Der ganze Cylinder PBOD ist = ABq. P. AC §. 361, und weil Fig. 238 (hier in Fig. 239 ist alles der Fig. 238 gleich gemacht) AB = AC, beyde = ϱ oder Radius der Kugel. So ist also der körperliche Inhalt des Cylinders PBOD = $\varrho^2 . P . \varrho = \varrho^3 P$.

Der Kegel PCB hat mit diesem Cylinder gleiche Grundfläche und Höhe, ist also der dritte Theil davon nach §. 367, und sein Inhalt daher $\frac{\varrho^3 P}{3}$, folglich ist nun der körperliche Inhalt

der halben Kugel = dem Cylinder — dem Kegel $= \varrho^3 P - \frac{\varrho^3 P}{3} = \frac{3\varrho^3 P}{3} - \frac{\varrho^3 P}{3} = \frac{(3\varrho^3 - \varrho^3) P}{3} =$ $\frac{2}{3}\varrho^3 P$ = dem körperlichen Inhalt der halben Kugel. Da die ganze Kugel noch einmal so groß als die halbe Kugel, so wird deren Inhalt seyn $2 . \frac{2}{3}\varrho^3 . P = \frac{4}{3}\varrho^3 P$ = dem körperlichen Inhalt der ganzen Kugel.

Man kann hiefür noch leicht einen andern Ausdruck finden, weil der Diameter der Kugel = 2 Radiis,

oder $d = 2\varrho$ so ist beydes cubirt

$$\frac{d^3 \cdot P}{2} = \frac{8\varrho^3 \cdot P}{2}$$

$$\frac{d^3 \cdot P}{2} = 4\varrho^3 \cdot P$$

und

$$\frac{d^3 \cdot P}{6} = \frac{4}{3}\varrho^3 \cdot P$$

statt $\frac{4}{3}\varrho^3$ gesetzt, giebt den Ausdruck: körperlicher Inhalt der Kugel $= \frac{d^3 \cdot P}{2.3} = \frac{d^3 P}{6}$.

Es ist nun gleichgültig, welchen Ausdruck man gebrauchen will.

Exempel: Der Durchmesser der Erdkugel ist 1720 Meilen, also ist ihr cubischer Inhalt $= \frac{(1720)^3 \cdot 3{,}141\ldots}{6} = 2625402024{,}8$ Cubikmeilen. Sie ist allerdings etwas größer, denn bey großen Größen muß man P in mehr Decimalbrüchen, als wir hier gethan haben, nehmen, um den Inhalt genauer zu bekommen.

Noch ein Exempel nach der ersten Formel $\frac{4\varrho^3 \cdot P}{3}$. Der Radius einer Kugel sey 8 Zoll, was ist ihr körperlicher Inhalt? $= \frac{4 \cdot 8^3 \cdot 3{,}14}{3}$

$= 2144{,}256$ Cubikzoll $= 2$ Cubikfuß, 144 Cubikzoll, 256 Cubiklinien.

Fig. 240. §. 405. Fig. 240. Wir haben im vorhergehenden § einen Ausdruck für den Inhalt der Kugel FHGI gefunden. Wenn FC oder HC = Radio derselben allgemein ϱ gesetzt wird, so ist der körperliche Inhalt derselben $\frac{4}{3}\varrho^3 P$. Wenn wir einen Cylinder ABDE nehmen, der gleiche Höhe FG als die Kugel hat, oder dessen Höhe gleich dem Diameter FG der Kugel ist, und dessen Durchmesser der Grundflächen DE = AB gleich dem Diameter der Kugel = HI ist, also auch der Radius derselben GE = CI, dessen Grundfläche also eben eine solche große Cirkelfläche ist, als die Fläche eines größten Cirkels auf dieser Kugel, so ist sein Inhalt GEq. P. FG in Zeichen $= \varrho^2 P \cdot 2\varrho = 2\varrho^3 P$.

Der Inhalt eines Kegels FDE von eben der Höhe FG und eben dem Durchmesser der Grundfläche, als der Cylinder hat, also von eben der Grundfläche, wäre dem körperlichen Inhalte nach der dritte Theil des Cylinders, also der Ausdruck für ihn wäre $\frac{2\varrho^3 P}{3}$.

Wenn man für Cylinder, Kugel und Kegel, die also beschaffen sind, die Werthe setzt, so verhalten sie sich unter einander, wie $2\varrho^3 P$, $\frac{4}{3}\varrho^3 P$, $\frac{2\varrho^3 P}{3}$; wie Cylinder, Kugel und Kegel.

Wenn man alle diese drey Größen durch den Faktor, der ihnen allen gemein ist, nemlich $\varrho^3 P$, dividirt, so bleiben die Verhältnisse

2,

2, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{3}$ wie Cylinder, Kugel und Kegel multiplicirt mit 3.

6, 4, 2 dividirt durch 2.

3, 2, 1 wie Cylinder, Kugel und Kegel, oder Cylinder, Kugeln und Kegel von gleichen Höhen und Grundflächen des Circuli maximi der Kugel verhalten sich, wie 3, 2, 1.

Weil sich also beschaffene Cylinder und Kugeln verhalten, wie 3 : 2, so ist also eine Kugel, die mit einem Cylinder gleiche Höhe, und da der Durchmesser beyder Grundflächen gleich ist, $\frac{2}{3}$ des Cylinders; denn 3 : 2 = Cylinder : Kugel, also Kugel = $\frac{2}{3}$ Cylinder. Ferner eine Kugel und Kegel verhalten sich, wie 2 : 1, also ist eine Kugel nochmal so groß, als ein Kegel von gleicher Höhe und Durchmesser der Grundfläche. Denn 2 : 1 = Kugel : Kegel, also Kugel = 2 Kegel; und Kegel = $\frac{\text{Kugel}}{2}$, oder eine halbe solche Kugel.

Es ist dieses eine Erfindung des Archimedes, der die Figur, welche dazu gehört, und die fast wie Fig. 238 beschaffen ist, außer daß AK und KE auch hi daran fehlt, auf den Stein seines Grabmaals einhauen ließ. Cicero fand hiedurch lange nachher das Grabmaal des Archimedes, welches ganz mit Sträuchen verwachsen war. Herr Hofrath Kästner hat hierüber in dem 2ten

Theil seiner Vorlesungen an die deutsche Gesellschaft eine sehr schöne Commentation geschrieben. Wir fahren in unsern Betrachtungen über die Kugel nun weiter fort.

§. 406. Nach §. 403 fanden wir den Ausdruck für den Abschnitt einer Kugel, der kleiner war, als die Halbkugel. Wenn dieser Abschnitt Fig. 241 AME war, dessen Höhe AH = a, und der Radius der Kugel AC = ϱ, so war des Abschnitts AME Inhalt = $(3a\varrho - a^2)\,\frac{Pa}{3}$.

Fig. 241.

Allein auch dieser Ausdruck ist richtig, wenn auch der Abschnitt größer ist, als die Halbkugel, als z. E. der Abschnitt BME, wenn hier die HB gleich auch die Höhe anzeigt, die wir zum Unterschied von AH mit b bezeichnen wollen, wir werden alsdenn den Ausdruck bekommen, der Abschnitt MBE = $(3b\varrho - b^2)\,\frac{Pb}{3}$, welches mit dem vorigen Ausdruck einerley ist, weil hier b ist, was dort a war. Also auf alle Fälle, der Abschnitt sey kleiner oder größer, als die halbe Kugel, der Beweis davon wird nicht schwer seyn.

Laut des vorhergehenden Paragraphen war der Inhalt der ganzen Kugel AOBDO $\frac{4}{3}\varrho^3 P$.

Der Inhalt des Abschnitts AME, wo AH = a war, = $(3a\varrho - a^3)\,\frac{Pa}{3} = \frac{3a^2\varrho P - a^3 P}{3}$, nun ist der Inhalt des Abschnitts BME = der ganzen

ganzen Kugel — dem Abschnitte AMC, oder in Ausdrücken $= \frac{4}{3}\varrho^3 P - \frac{(3a^2\varrho P - a^3 P)}{3}$ (wenn die Größen hinter dem Minuszeichen aus den Klammern gebracht, und alles zu einem Bruche gemacht) $= \frac{(4\varrho^3 - 3a^2\varrho + a^3)}{3} P =$ dem Inhalte des Abschnitts BME.

Die Höhe des andern Abschnitts MBE oder die HB war nun $= b$. Nun wollen wir hiemit und dem Diameter einen andern Ausdruck für a suchen, den wir substituiren können. Es ist aber

$AH = AB - HB$ oder

$a = 2\varrho - b$ (weil AB der Diameter $= 2\varrho$ ist)

folglich

$a^2 = (2\varrho - b)^2 = 4\varrho^2 - 4b\varrho + b^2$

und $a^3 = (2\varrho - b)^3 = 8\varrho^3 - 12\varrho^2 b + 6\varrho b^2 - b^3$.

Nun diese Ausdrücke statt der a^2 und a^3 in die Gleichung für den Abschnitt der Kugel BME $= \frac{(4\varrho^3 - 3a^2\varrho + a^3)}{3} P$ gesetzt, so wird sie $=$

$$\frac{(4\varrho^3 - 12\varrho^3 + 12b\varrho^2 - 3b^2\varrho + 8\varrho^3 - 12b\varrho^2 + 6b^2\varrho - b^3)P}{3}$$

Wenn man gegen einander ausstreicht, was sich durch die Plus- und Minuszeichen aufheben läßt, so bleibt $\frac{(3\varrho b^2 - b^3)}{3} P = \frac{(3b\varrho - b^2)}{3} \frac{Pb}{3}$ = dem Abschnitt der Kugel MBE. Und dieses war es, was wir beweisen wollten.

§. 407. Was Fig. 235 eine Zone der Kugel FGfg sey, haben wir in dem dazu gehörigen 394sten § schon erklärt, und ihre Oberfläche berechnen gelernt. Jetzt reden wir von dem körperlichen Inhalt einer solchen Scheibe aus der Kugel.

Wenn man die Höhe AH des ganzen Abschnitts AFG, worinn die Zone mit begriffen ist, und die Höhe der Zone Hh weiß, nebst dem Radio der Kugel $= \varrho$, so ist die Berechnung des körperlichen Inhalts derselben ungemein leicht. Es ist nemlich der körperliche Inhalt des Abschnitts AFG minus dem körperlichen Inhalt des Abschnitts Afg gleich dem Inhalt der Zone, weil nemlich, wenn von dem Abschnitt AFG der Abschnitt Afg genommen wird, die Zone übrig bleibt.

Es sey nun $AH = a$, so ist $Ah = AH - Hh$, oder die Höhe des Abschnitts — der Höhe der Zone, und das sey $= b$, folglich der Inhalt der Zone $= (3a\varrho - a^2)\frac{Pa}{3} - (3b\varrho - b^2)\frac{Pb}{3}$.

Wäre nun der Radius der Kugel, also auch der Diameter derselben BA, nebst den Radiis der Oberflächen der Zonen FH und fh, und der Höhe derselben Hh bekannt, so ließe sich daraus die AH und Ah, oder die a und b finden.

Exempel: Der Radius der Kugel CA sey $= 6$ Zoll $= \varrho$, die $AH = 5$ Zoll $= a$, die Hh $= 2$ Zoll, folglich die $Ah = AH - Hh = 5$

— 2 = 3 Zoll, und das ist b, so wäre der Inhalt der Zone = $(3.5.6 - 25)\frac{3,14.5}{3} -$

$(3.3.6-9).\frac{3.14.3}{3} = 340,16 - 141,30 =$

198,86 Cubikzoll = 198 Cubikzoll, 860 Cubiklinien.

§. 408. Wir haben im §. 395 Fig. 236 Fig. 236. Begriffe von den keilförmigen Ausschnitten der Kugel ABHECA, AEHFCA und ihrer Entstehung gegeben, welches dort wieder nachgelesen werden kann. Es gelten eben diese Betrachtungen, die wir dort anstellten, wenn wir auch nicht wie dort bloß die **Oberflächen** solcher Ausschnitte betrachten, sondern auf den **körperlichen** Inhalt derselben sehen, indem die Entstehung der körperlichen Stücke auf eben die Art kann gedacht werden. Die körperlichen Ausschnitte ABHECA, AEHFCA werden sich gleichfalls verhalten, wie die Bogen, welche sie messen, BE und EF, oder wie die Winkel BCE, ECF. Wenn man den ganzen körperlichen Inhalt der Kugel weiß, so kann man durch die Regel Detri alsdenn den Inhalt eines solchen körperlichen Ausschnitts auf eine ähnliche Art, wie dort, der Oberflächen Inhalt finden. Ein Kreis um die Kugel hält als Cirkel 360°, und der Ausdruck für ihren körperlichen Inhalt ist $= \frac{4}{3}\rho^3 P$. Hieraus läßt sich, wenn der Radius der Kugel

und die Bogen BE und EF oder ihre Winkel gegeben sind, der Inhalt eines Ausschnitts finden.

Exempel: Es sey der Bogen EF, oder der Winkel ECF von n Graden, so schließe man:

$$360^\circ : n^\circ = \tfrac{4}{3}\rho^3 P : \frac{\tfrac{4}{3}\rho^3 . P . n}{360}$$

Es mag n = 30 Graden seyn, und der Radius der Kugel oder $\rho = 4$ Zoll, so würde man schließen:

$$360^\circ : 30^\circ = \tfrac{4}{3} . 4^3 . 3{,}14 : x$$

und x oder der Ausschnitt der Kugel AEHFA wäre $= \frac{30 . 4 . 4^3 . 3{,}14}{3 . 360} = \frac{30 . 4 . 64 . 3{,}14}{3 . 360}$

22,328 Cubikzoll, oder 22 Cubikzoll, 328 Cubiklinien.

§. 409. Bey pyramidenförmigen Ausschnitten aus der Kugel ABECA, AEFCA, wovon wir dort §. 396 redeten, finden in Ansehung ihres körperlichen Inhalts eben die Betrachtungen statt, sie verhalten sich unter einander gleichfalls wie ihre Bogen BE, EF, oder wie die Winkel BCE, ECF. Eben so auch verhalten sie sich zum ganzen Kugelabschnitt ABGDB. Ihr Inhalt läßt sich, wenn der Inhalt des Abschnitts bekannt ist, gleichfalls durch die Regel Detri finden. Der Ausdruck für den Abschnitt ist laut §. 403 $= (3a\rho - a^2)\frac{Pa}{3}$, und wenn der Bogen CF oder Winkel ECF von n Graden ist, schließet man:

$$360^\circ$$

$$360^\circ : n^\circ = (3a\varrho - a^2)\,\frac{Pa}{3} : x$$

und x oder der pyramidenförmige Ausschnitt
$AEFCA = (3a\varrho - a^2)\,P.a.n.$

$$\frac{}{3 \cdot 360}$$

Exempel: Es ist $\varrho = 4$ Zoll, $n = 30$ Grad, a oder die Höhe des Abschnitts, hier $AC = 2$ Zoll, so wäre der Schluß:

$$360^\circ : 30^\circ = (3 \cdot 2 \cdot 4 - 2^2) \cdot \frac{3,141 \cdot 2}{3} : x$$

und der Abschnitt AEFCA also

$$= \frac{(3 \cdot 2 \cdot 4 - 2^2) \cdot 3,141 \cdot 2 \cdot 30}{3 \cdot 360} = 3,498 \text{ Cu}$$

Hilzoll = 3 Zoll, 498 Linien Cubikmaas.

§. 410. Es gelten eben solche Betrachtungen für die viereckten körperlichen Stücke aus der Zone, wovon die Oberflächen IKBE, KELF sind, wie wir dort für die Oberflächen dieser Stücke angestellt haben. Aus dem Inhalte der ganzen Zone, und der Größe der Bogenstücke in Graden, IK oder BE, und EF oder KL, läßt sich ihr Inhalt finden, wie wir eben bey den pyramiden- und keilförmigen Ausschnitten gezeigt haben. Sie verhalten sich gleichfalls unter einander, und in Ansehung der ganzen Zone, als ihre Bogen.

§. 411. Nach dem §. 404 war der Inhalt der Kugel, wenn ihr Diameter = d ist,

=

$= \frac{d^3P}{6}$. Man sieht bald, daß, wenn der wirkliche Inhalt der Kugel gegeben ist, sich aus dem Inhalte der Diameter oder d finden lasse. Es sey der Inhalt einer Kugel, welcher bekannt ist, $= S$, also ist

$$S = \frac{d^3P}{6} \quad \text{folglich} \cdot 6$$

$$6 \cdot S = d^3P \quad \text{und} : P$$

$$6 \cdot S = d^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{6 \cdot S}{P}} = d.$$

Exempel: Eine Kugel habe 1 Cubikfuß = 1000 Cubikzoll Inhalt, also $S = 1000$, so ist also $d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1000}{3,14159...}} = \sqrt[3]{\frac{6000}{3,14159...}}$

$\frac{18,17}{1,46} = 12,41$ Zoll = Diameter, also der Radius der Kugel = 6,2 Zoll, oder 6 Zoll, 2 Linien.

§. 412. Der Ausdruck für den Inhalt der Kugel ist $\frac{D^3}{6}$, der Ausdruck für den Würfel ihres Durchmessers würde $= D^3$ seyn, oder dieses

ses würde den Inhalt eines Würfels anzeigen, welcher zu seiner Seite den Durchmesser der Kugel hätte.

Es verhält sich also der Inhalt der Kugel und des Würfels ihres Durchmessers gegen einander, wie $\frac{D^3P}{6} : D^3$

beyde Glieder durch D^3 dividirt

wie $\frac{P}{6} : 1$

mit 6 multiplicirt

wie $P : 6$ oder

wie $3{,}14 : 6$ mit 100 multiplicirt

$314 : 600 : 2$

$157 : 300$

oder die Kugel verhält sich zum Cubo ihres Diameters, wie 157 : 300. Indessen ist dieses Verhältniß nicht sehr scharf, weil P nur in wenig Decimalbrüchen angenommen ist, man kann es leicht genauer machen, wenn man es gebraucht, doch wird dieses Verhältniß häufig gebraucht.

Exempel: Eine Kugel habe Inhalt 250 Cubikzoll, wie groß ist der Würfel ihres Durchmessers? Man schließt $157 : 300 = 250 : x$, und x oder der Würfel des Durchmessers =

250

$\frac{250 \cdot 300}{157}$ = 477,7 Cubikzoll, oder 477 Cubikzoll, 700 Cubiklinien.

§. 413. Es sey der Diameter einer Kugel = D, der Diameter einer andern = d, so würde nach §. 404 der Inhalt der erstern Kugel seyn = $\frac{D^3P}{6}$, der Inhalt der andern Kugel wäre = $\frac{d^3P}{6}$, beyde Kugeln also würden sich gegen einander verhalten, wie $\frac{D^3P}{6} : \frac{d^3P}{6}$ dividirt durch $\frac{P}{6}$

$D^3 : d^3$

oder weil, wenn der Diameter der Kugel bekannt ist, auch ihr Radius bekannt ist, so mag dieser bey zwey verschiedenen Kugeln R und r seyn. Der Inhalt der einen wäre nun nach §. 404 = $\frac{4}{3}R^3P$, der andern Inhalt wäre $\frac{4}{3}r^3P$, beyde verhielten sich, wie $\frac{4}{3}R^3P : \frac{4}{3}r^3P$ oder : $\frac{4}{3}P$.

Das ist, die Kugeln verhalten sich ihrem körperlichen Inhalte nach, wie die Cubi ihrer Durchmesser oder ihrer Radiorum (in triplicata ratione diametrorum aut radiorum).

Exempel: Eine Kugel habe 6 Zoll Durchmesser, die andere 8 Zoll, so werden sie sich beyde verhalten, wie $6^3 : 8^3$ oder 216 : 512 : 8, welches

27 : 64

ches fast wie 1 : $2\frac{1}{3}$ ist, oder die letztere von 8 Zoll Durchmesser ist $2\frac{1}{3}$mal so groß, als die erstere.

§. 414. Weil sich die Kugeln wie die Cubi ihrer Durchmesser verhalten, so läßt sich daraus leicht die Aufgabe auflösen, wie groß der Durchmesser einer Kugel seyn müsse, die zwey oder etliche mal so groß, als eine andere oder nur ein Theil von ihr seyn solle. Wir wollen das, wie viel größer oder kleiner sie in Ansehung der andern seyn solle, allgemein durch n ausdrücken, da denn n eine ganze Zahl, auch ein ächter oder unächter Bruch seyn kann.

Die Kugel, deren Inhalt und Durchmesser uns bekannt ist, heiße S, und ihr Diameter D (wäre uns nur ihr Inhalt bekannt, so ließe sich daraus ihr Diameter oder D nach §. 411 finden). Wir können also die andere Kugel, die größer oder kleiner seyn soll, als diese, nS nennen, und ihr Diameter sey d, der wird gesucht. Man kann also schließen: weil sich die Kugeln wie die Cubi ihrer Diameter verhalten,

$$S : nS = D^3 : d^3$$

die ersten beyden Glieder durch S dividirt

$$1 : n = D^3 : d^3$$

und also

$$d^3 = nD^3$$

$$d = \sqrt[3]{nD^3}.$$

Exempel: Es habe eine Kugel 6 Zoll im Diameter, wie viel muß der Diameter einer Kugel seyn, die noch einmal so groß ist? Hier ist

$D = 6$, also $D^3 = 216$ und $n = 2$, also $d' = \sqrt[3]{2 . 216} = \sqrt[3]{432} = 7{,}56$ Zoll, oder 7 Zoll, $5\frac{5}{10}$ Linien.

Noch ein Exempel: Es habe eine Kugel 6 Zoll im Diameter, wie groß wird der Diameter einer Kugel seyn, die den dritten Theil, oder $\frac{1}{3}$ so viel Inhalt als diese hat? Hier ist D abermals 6, und D^3 216, aber $n = \frac{1}{3}$, also $d = \sqrt[3]{nD^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}216} = \sqrt[3]{\frac{216}{3}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{3}} = 4{,}16$ Zoll, oder 4 Zoll, $1\frac{6}{10}$ Linien.

§. 415. Es lassen sich die Kugeln auch in andere Körper verwandeln, die ihrem Inhalte nach ihr gleich sind, wenn etwas von diesen Körpern, als z. E. ihre Höhe oder Grundfläche, gegeben ist. Wir haben in dem Ausdrucke für den Inhalt der Kugel beständig P, oder das Glied des Verhältnisses des Diameters zur Peripherie, wenn der Diameter = 1 gesetzt wird, gebraucht. Dieses ist nun eine Irrationalgröße, wie uns bekannt ist, und wir konnten daher den Inhalt der Kugel eben so wenig, als den Inhalt des Cirkels mathematisch genau erreichen. Wir konnten aber uns ihnen, so viel wir wollten, nähern, weil wir P in so viel angehängten Decimalbrüchen nehmen konnten, als es uns gefiel. Man muß auch, wenn es auf Genauigkeit ankommt, P in viel angehängten Decimalbrüchen nehmen, und es doch wenigstens durch 13,1415 ausdrücken.

Aber

Aber die Betrachtungen zeigen uns auch, daß man nur dem Verstande nach in solche Körper die Kugel genau verwandeln kann, wo auch P in ihrem Ausdrucke vorkömmt. In einen Cubum wird man sie nie genau verwandeln können, und die Cubatur der Kugel ist eben so wenig, als die Quadratur des Cirkels erfunden, weil sie davon, oder von einem rationalen Verhältnisse zwischen dem Diameter und der Peripherie abhängt, welche man noch nicht hat. Indessen kann man doch sich der wahren Größe, so viel als man will, nähern, nachdem man P annimmt.

Wir verwandeln sie erst in einen geraden Kegel, seine Grundfläche soll gegeben, und einmal der Oberfläche der Kugel gleich seyn. Wir wollen seine Höhe suchen; da wir sie suchen wollen, so sey sie $= x$. Der Ausdruck für den Kegel ist nach §. 367, wenn A seine Grundfläche, und f seine Höhe bedeutet, $= \frac{fA}{3}$. Nun soll hier A die Oberfläche der Kugel seyn. Diese ist, wenn ϱ der Radius der Kugel ist, nach §. 391 $= 4\varrho^2P$, und f ist hier $= x$. Also der Inhalt des Kegels wäre $\frac{4\varrho^2 . P . x}{3}$, und dieser soll nun dem Inhalte der Kugel gleich seyn. Wenn man also den Ausdruck, den wir §. 404 für den Inhalt der Kugel gefunden haben, setzt, so wird folgende Gleichung entstehen;

$$\frac{4\varrho^3 P}{3} = \frac{4\varrho^2 . P . x}{3}$$ oder

$$4\varrho^3 P = 4\varrho^2 . P . x$$ dividirt durch $4\varrho^2 P$

$$\varrho = x$$

oder alsdenn ist die Höhe des Kegels gleich dem Radio der Kugel. Daher folgt nun also diese Wahrheit: Die Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und dessen Höhe der Radius der Kugel ist.

Weil Pyramiden und Kegel von einerley Grundfläche und Höhe nach §. 337 ihrem körperlichen Inhalte nach einander gleich sind, so folgt es auch, daß die Kugel einer Pyramide gleich sey, welche zur Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und zur Höhe den Radium der Kugel hat.

§. 426. Wollte man die Kugel in Kegel anderer Art verwandeln, so sieht man bald, daß das durch die Buchstabenrechnung ganz leicht ist. Es sey z. E. die Höhe eines Kegels gegeben, welche wir f nennen wollen, die Grundfläche desselben A sey unbekannt, also = x; man soll sie in eine Kugel verwandeln, deren Inhalt, also auch Radius bekannt ist. Dieser Radius sey = ϱ, so ist also

$\frac{4}{3}\varrho^3 P$

$$\frac{\frac{4}{3}\varrho^3 P = fx}{3} \text{ oder}$$

$$\frac{}{4\varrho^3 P = fx}$$

$$\frac{4\varrho^3 P}{f} = x = \text{der Grundfläche des Kegels.}$$

Exempel: Es mag der Radius der Kugel oder $\varrho = 8$ Zoll seyn, die Höhe des Kegels oder $f = 12$ Zoll, so wäre alsdenn die Grundfläche eines mit der Kugel gleichen Kegels, oder $x = \frac{4 \cdot 8^3 \cdot 3{,}14}{12} = 535{,}89$ Quadratzoll. Weil die Grundfläche des Kegels eine Cirkelfläche ist, und deren Ausdruck $= r^2 P$, so läßt sich auch der Radius der Grundfläche dieses Kegels leicht finden. Denn alsdenn wird $r^2 P = 535{,}89\ldots$ oder weil $P = 3{,}14\ldots$

$$r^2 \cdot 3{,}14 = 535{,}89\ldots$$

$$r^2 = \frac{535{,}89}{3{,}14}$$

$$\text{und } r = \sqrt{\frac{535{,}89}{3{,}14}}$$

Dieses ist $= \frac{23{,}14}{1{,}77} = 13{,}01\ldots$ Zoll, oder 13 Zoll, $\frac{1}{10}$ Linien $=$ dem Radius der Grundfläche. Folglich würde ein solcher Kegel von 13,01 Zoll

Radius der Grundfläche, und 17 Zoll Höhe einer Kugel gleich seyn, deren Radius 8 Zoll wäre.

§. 417. Es soll eben die Kugel in einen Cylinder verwandelt werden. Es sey die Höhe des Cylinders gegeben, und = a, alsdenn ist nach §. 361 der Ausdruck für ihn ar^2P. Nun sucht man seine Grundflächen, die hat man, wenn man seinen Radius weiß; man sucht also jetzt r, welches unbekannt ist. Da der Cylinder und die Kugel gleiches Inhalts seyn sollen, so sey abermal der Radius der Kugel, welcher bekannt ist, = ϱ, also

$$\frac{\frac{4}{3}\varrho^3 P = ar^2 P \;:\; aP}{\frac{4\varrho^3}{3a} = r^2}$$

$$\frac{\sqrt{4\varrho^3} = r.}{\sqrt{3a}}$$

Exempel: Es sey der Radius der Kugel oder ϱ abermal = 8 Zoll; die Höhe des Cylinders oder a = 12 Zoll, so wird r oder der Radius seiner Grundflächen nach dieser Formel also =

$$\frac{\sqrt{4.8^3}}{\sqrt{3.12}} = \frac{\sqrt{4.512}}{\sqrt{3.12}} = \frac{\sqrt{2048}}{\sqrt{36}} = \frac{45{,}25}{6} = 7{,}54,$$

oder $\frac{\sqrt{4.8^3}}{\sqrt{3.12}} = \frac{2\sqrt{8^3}}{\sqrt{36}} = \frac{2\sqrt{8^3}}{6} = \frac{\sqrt{8^3}}{3}$, aber $\sqrt{8^3}$

$= \sqrt{512} = 22{,}627$, also $\frac{\sqrt{8^3}}{3} = \frac{22{,}627}{3} =$

7,542... = dem Radius der Grundfläche des Cylinders, der, wenn er 12 Zoll hoch ist, der Kugel von 8 Zoll Radius gleicht.

§. 418. Wollte man eine Kugel in einen Würfel verwandeln, so mag die Seite des Würfels $= c$ seyn, also der Inhalt desselben $= c^3$. Es soll nun die Seite des Würfels oder c uns unbekannt seyn.

$$\frac{4\varrho^3 P = c^3}{3}$$

$$\sqrt[3]{4\varrho^3 P = c.}$$

$$\sqrt[3]{3}$$

Exempel: Es sey abermal $\varrho = 8$, so wäre also der Ausdruck für die Seite des Würfels:

$$\frac{\sqrt[3]{4 \cdot 512 \cdot 3{,}14}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{6430{,}72}}{\sqrt[3]{3}} = 12{,}89...$$

Dieses ist die Seite des Würfels, der so viel Inhalt hat, als eine Kugel von 8 Zoll Radius.

Man wird nun leicht diese Exempel auf andere Körper anwenden können, worinn man die Kugel verwandeln will. Wenn man es umkehrt, und andere Körper in Kugeln verwandeln will, so ist in der Gleichung für die Kugel der Radius

oder ϱ das Unbekannte, welches man sucht. Auch dieses hat keine Schwierigkeit zu finden. Wir können also mit diesen Betrachtungen dieses Kapitel beschließen.

Das dreyzehnte Kapitel.

Fernere Betrachtungen über die Kugelschnitte.

§. 419.

Wir haben in dem vorhergehenden Kapitel schon verschiedene Betrachtungen über die Schnitte der Kugel angestellt, so viel uns nemlich nöthig zu seyn schienen, theils überhaupt einen Begrif davon zu geben, theils als wir zur Ausmessung der Oberflächen und des Inhalts der Kugel und ihrer Stücke gebrauchten. Was ein Kugelschnitt sey, daß er allemal ein Cirkel sey §. 379, wie diese Cirkel auf der Kugel abnehmen und zunehmen §. 381, wennehr sie Null werden §. 383, was ein großer Cirkel auf der Kugel sey §. 382, daß er die Kugel allezeit in zwey gleiche Stücke theile §. 384, was Durchmesser, Axe und Pole der Kugel sind;

§. 420. alles dieses haben wir im vorigen Kapitel betrachtet, und einige Folgerungen daraus

aus

aus gezogen. Jetzt betrachten wir, wenn zwey und mehrere, vorzüglich größte Cirkel sich schneiden, und entwickeln einige der vornehmsten Folgen hieraus, so viel nemlich als wir glauben, daß unsere Absicht erfordert. Wir fangen von den leichtesten Betrachtungen an.

§. 421. Eine gerade Linie AB Fig. 242, welche durch einen Punkt H innerhalb der Kugel geht, wird, wenn sie nach beyden Seiten durch die Kugel geht, die Kugel allezeit in zwey Punkten, A und B, aber nicht in mehrern schneiden. Daß sie selbige in mehr als **einem** Punkte, und wenigstens in zwey Punkten, A und B, schneiden muß, folgt daraus, daß sie doch nach verschiedenen Seiten von H an aus der Kugel gehen muß. Allein sie wird sie nur in diesen zwey Punkten schneiden. Man lege durch zwey Punkte, A und B, in welchen sie die Kugel wenigstens schneiden muß, und durch den Mittelpunkt der Kugel C eine Ebene ABC. Die Lage dieser Ebene wird durch diese drey Punkte bestimmt. Wenn man sich solche Ebene in dieser Lage groß genug gedenkt, so würde diese Ebene ein Stück von der Kugel abschneiden, und die Durchschnittsfigur wird nach §. 379 eine Cirkelfläche seyn. Die gerade Linie AB muß nothwendig in dieser Ebene liegen, und da die Ebene, wo sie durch die Kugel geht, einen Cirkel auf derselben macht, so muß die AB durch diesen Cirkel gehen. Eine gerade Linie kann aber nur nach §. 34 einen Cir-

Fig. 242.

Cirkel in zwey Punkten durchschneiden, also da eine Ebene durch die Kugel auf alle Fälle auf der Kugelfläche einen Cirkelschnitt macht, so kann also die Linie AB die Kugel nur in zwey Punkten schneiden. G oder ein jeder anderer dritter Punkt auf der Oberfläche der Kugel kann also nicht von ihr berührt werden, weil die Ebene, die durch die Punkte A, B, C geht, nicht durch sie mit gehen kann, und also auch unmöglich die Linie AB, welche in dieser Ebene liegt.

§. 422. Die erste Folge, die wir zum Theil gleich heraus ziehen können, ist diese.

Fig. 243. Wenn Fig 243 zwey Kreise, ADBE und AFBG, einander auf der Oberfläche der Kugel schneiden, so giebt es nur zwey Durchnittspunkte, A und B, es mögen nun größte Kreise der Kugel seyn, oder nicht.

Alle Linien, welche in die Kreisfläche des Kreises ADBE gezogen werden können, liegen in der Ebene dieses Kreises, und alle Linien, welche in der Kreisfläche ACBG gezogen werden können, liegen auch in der Ebene dieses Kreises. Es müssen auch die Durchschnittspunkte beyder Kreise sich in beyder ihrer Ebenen zugleich befinden §. 260, also muß nothwendig die gerade Linie AB, welche man zwischen den Durchschnittspunkten der Ebenen beyder Kreise zieht, in den Ebenen beyder Kreise zugleich liegen, denn sonst wäre es keine Durchschnittslinie beyder Ebenen, und sie wird durch die Kugel durchgehen. Allein

eine

eine gerade Linie geht nach vorhergehendem Paragraphen nur durch zwey Punkte der Kugel. Da beyde Ebenen jede einen Kreis abschneidet, da die gerade Linie AB durch die Durchschnittspunkte beyder Ebenen, also auch durch beyde Kreise auf der Oberfläche der Kugel, die davon abgeschnitten, wieder geht, und nur durch zwey Punkte eines Kreises gehen kann, so muß sie durch die Durchschnittspunkte beyder Kreise gehen, und sie können, wenn sie sich schneiden, sich nur in zwey Punkten schneiden, die mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, und eine Lage haben, welche sie wollen.

§. 423. Es mögen nun aber die zwey Cirkel, welche wir auf die Oberfläche der Kugel legen, größte Cirkel seyn. Die Cirkel Fig. 244 AGDF und AHDE mögen solcher zwey größten Cirkel auf der Kugel seyn. Von diesen behaupten wir nun, daß zwey größte Cirkel auf der Kugel einander allemal in zwey Punkten schneiden, und daß sie sich zugleich allemal halbiren, oder jedes Peripherien durch ihre Durchschnittspunkte in zwey gleiche Theile getheilt werden. Wir wußten aus §. 384, daß die Ebenen der Durchschnittsfigur der größten Cirkel allezeit durch den Mittelpunkt der Kugel gehen. Es werden also die Ebenen beyder größten Cirkel durch den Mittelpunkt C der Kugel HGEF durchgehen müssen. Diese beyden Ebenen aber können sich nur in einer Linie durchschneiden, die Fig. 244

beyden gemein ist §. 260, und in dieser Linie liegt also auch das Centrum der Kugel, weil beyde Ebenen dadurch gehen. Die beyden Cirkel müssen sich also schneiden, weil ihre beyde Ebenen sich in der geraden Linie, die durch der Kugel Mittelpunkt geht, befinden, sie können sich auch nur in zwey Punkten, A und D, schneiden, weil sich überhaupt alle Cirkel auf der Kugel nur in zwey Punkten schneiden können nach §. 422. Da die gerade Linie, worinn sich ihre Ebenen schneiden, durch das Centrum der Kugel geht, so fällt sie mit der Kugel Durchmesser zusammen, und also der Theil davon, welcher zwischen den Durchschnittspunkten, A und D, dieser beyden Cirkel AHDE und AGDF ist, ist der Durchmesser der Kugel, aber der Durchmesser der Kugel ist auch der Durchmesser ihrer größten Cirkel nach §. 384, folglich da AD zu beyden Cirkeln gehört, auch der Durchmesser beyder Cirkel. Nun theilt jeder Durchmesser die Cirkellinie in zwey gleiche Theile. Da er sich in beyden Durchschnittspunkten, A und D, auf der Oberfläche der Kugel endigt, so theilen also auch die Durchschnittspunkte beyder größten Cirkel die Cirkel selbst in zwey gleiche Theile, sie mögen übrigens auf der Kugel liegen, wie sie wollen.

§. 424. Dieses ist auch umgekehrt wahr, zwey Kreise, die einander halbiren, müssen größte Kreise einer Kugel, oder also beyde gleich groß seyn. Denn sie könnten sich nicht einander hal-

halbiren, wenn nicht die gerade Linie AD zwischen beyden Durchschnittspunkten, A und D, ihr gemeinschaftlicher Durchmesser wäre, also auch durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt ginge. Diese aber muß auch nothwendig durch der Kugel Mittelpunkt C gehen, wozu sie gehören, und also ihr Durchmesser seyn, und sie müssen mit ihr einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben; denn wäre das nicht, und der Kugel Mittelpunkt wäre von dem ihrigen verschieden, so müßte es nach §. 379 angehen, daß man aus der Kugel Mittelpunkt eine gerade Linie auf den gemeinschaftlichen Mittelpunkt beyder Kreise zöge. Dieses wäre ein Perpendikel auf ihre Ebenen nach §. 380, aber es geht nicht an nach §. 281, 282 auf zwey Ebenen, die nicht parallel liegen, sondern die sich einander schneiden, ein Perpendikel zu ziehen, weil sie beyde einen Winkel mit einander ausmachen. Folglich ist unsere Behauptung richtig.

Es ist also auch ferner wahr, daß, wenn zwey Kreise der Kugel einander schneiden, aber nicht beyde einander halbiren, sie beyde nicht größte Kreise der Kugel seyn können, und ein Paar Kreise der Kugel, die nicht beyde größte Kreise der Kugel sind, können beyde einander nicht halbiren, ob es schon ganz wohl möglich ist, daß ein größerer Kreis einen kleinern halbiren könne, wodurch aber der größere nicht halbirt wird.

§. 425.

Fig. 245. §. 425. Fig. 245. Man nehme einen Kreis AB auf einer Kugel an, wie man will, es mag ein größrer oder kleinerer Kreis seyn: richte auf seiner Ebene AB aus seinem Mittelpunkt D ein Loth DE auf, und verlängere nach beyden Seiten dieses Loth, bis es die Kugel in zwey Punkten, E und F, erreicht, so behaupten wir, daß sowol der Punkt E als der Punkt F, ein jeder nemlich gleich weit von allen Punkten der Peripherie des Cirkels AB entfernt sey. Denn wenn D der Mittelpunkt dieses Cirkels AB ist, so sind alle Linien, die in seiner Ebene von seinem Mittelpunkte D nach seiner Peripherie gezogen werden, gleich, als DA = DG = DH = DB°, weil es alle Radii desselben sind. Nun ziehe man so viel Radios, als man will, wir wollen hier nur DG und DH nehmen, und von dem Punkte E, wo das Perpendikel DE auf des Kreises Mittelpunkt durch die Kugel geht, ziehe man alle Punkte der Radiorum, hier an die Punkte G und H, gleichfalls gerade Linien, EG und EH. Weil bey D ein rechter Winkel ist, so ist EGq = DGq + DEq, gleichfalls EHq = DHq + EDq, aber ED bleibt unveränderlich in allen solchen Gleichungen, und DG, DH, und tausend mehrere Radii bleiben gleichfalls alle gleich, folglich müssen auch die EGq = EHq, also auch EG = EH seyn. Da man das für alle Punkte der Peripherie AB auf eben die Art beweisen kann, und EG, EH, und solcher Art Linien die Entfernungen des Punkts E auf der Oberfläche

fläche der Kugel, von dem Umkreis des Cirkels AB ist, so müssen folglich alle Punkte der Peripherie des Cirkels AB gleich weit von E entfernt seyn. Eben das gilt auch vom Punkte F, denn FD bleibt sich immer gleich, wie auch alle Radii des Cirkels AB. Folglich wird AFq = FGq = FHq = FBq, also AF = FG = FH = FB, oder alle Linien, welche man von dem Punkte F nach der Peripherie des Cirkels AB ziehen kann, werden gleich lang seyn, also werden alle Punkte der Peripherie AB gleich weit von F entfernt seyn.

§. 426. Dieses ist gleichfalls umgekehrt wahr. Soll ein Punkt auf der Kugel Oberfläche, z. E. E, gleich weit von allen Punkten der Peripherie eines Cirkels AB auf der Kugel entfernt seyn, so muß es auch wahr seyn, daß, wenn man von diesem Punkte E ein Perpendikel auf des Kreises AB Ebene herabließe, selbiges durch des Kreises Mittelpunkt D ginge; denn ginge es nicht herdurch, so würde EGq, EHq, folglich auch EG, EH nicht gleich seyn, welches doch seyn muß, wenn E von allen Punkten der Peripherie gleich weit entfernt ist, denn von solchem Punkte, der außer dem Mittelpunkte wäre, worauf das Perpendikel fiele, würde man nach der Peripherie des Cirkels ungleiche Linien ziehen können, welche also in die Gleichung für EGq, EHq gesetzt, ihren Werth mancherley machten, und also auch den Werth oder die Länge von EG, EH. Diese Linien sollen aber gleich seyn, also

müssen

müssen auch die Ausdrücke für sie gleich seyn, welches unter diesen Umständen nicht anders seyn kann, als wenn das Perpendikel von E auf den Mittelpunkt D des Cirkels fällt. Es gelten eben die Betrachtungen, wenn man einen andern Punkt F annähme, und davon ein Perpendikel auf den Cirkel AB fallen ließe.

§. 427. Solche zwey Punkte, E und F, die beyde an den beyden Enden des verlängerten Perpendikels auf dem Mittelpunkt des Cirkels auf der Oberfläche der Kugel liegen, und welche jeder von allen Punkten der Peripherie des Kreises, wozu dieses Perpendikel auf seinen Mittelpunkt gehört, gleich weit entfernt sind, nennt man **Pole des Cirkels.**

Es giebt deren allezeit zwey und nicht mehr, denn es läßt sich nur ein Perpendikel aus dem Mittelpunkt des Cirkels D ziehen, und es giebt also, wenn dieses Perpendikel nach beyden Seiten hin verlängert wird, nur zwey Punkte, worinn die gerade Linie EF durch die Kugel geht. Diese Pole sind auch einander entgegen gesetzte Punkte, denn sie liegen jeder an den Enden einer geraden Linie.

§. 428. Die gerade Linie EF, welche zwischen beyde Pole, E und F, des Cirkels AB gezogen wird, heißt nun die **Axe des Cirkels AB.** Diese Axe des Kreises geht nun durch des Cirkels AB Mittelpunkt D, und steht auf seiner Ebene

senk-

senkrecht, denn sie ist das auf dem Mittelpunkt aufgerichtete nach beyden Seiten hin verlängerte Perpendikel. Sie geht ferner auch durch der Kugel Mittelpunkt C, denn nach §. 380 geht ein Perpendikel auf eines Kreises Mittelpunkt allezeit durch den Mittelpunkt der Kugel, und das ist ja diese Linie. Es giebt auch nur ein Perpendikel auf einem Punkte, folglich muß die Linie durch beyde Pole mit dieser Linie einerley seyn.

§. 429. Wenn Fig. 246 ein Kreis auf der Kugel AEBF durch eines andern Kreises AGBH Pole E und F geht, so steht 1) der Kreis AEBF auf dem letztern senkrecht; 2) auch theilt der Kreis AEBF den andern in zwey gleiche Theile, oder halbirt ihn, daß also AHB = AGB; 3) auch ist alsdenn dieser erste Kreis AEBF ein größter Kreis (Circulus maximus) auf der Kugel; 4) endlich sind seine Bogen EB und EA, oder FB und FA, zwischen dem Kreis AGBH, und einem von seinen Polen E und F gleich groß. Es sind alle diese Sätze Folgen unserer bisherigen Betrachtungen, und ihr Beweis mit wenig Schwierigkeiten verbunden. Fig. 246.

1) Der Kreis AEBF steht auf dem Kreise AGBH senkrecht, unter den obigen angeführten Bedingungen. Denn weil er und also auch seine Ebene durch die Pole des Kreises AGBH durch E und F geht, so geht seine Ebene auch durch die Axe dieses Kreises EF. Diese Axe aber steht auf dem Kreise AEBG senkrecht nach §. 428.

Nun

Nun wissen wir, daß jede Ebene, die durch eine auf einer andern Ebene senkrecht stehende Linie geht, auch auf dieser Ebene senkrecht stehe nach §. 275. Also da die Ebene des Kreises AEBF durch die Axe des Kreises AGBH geht, so muß sie auf der Ebene des Kreises AGBH senkrecht stehen, folglich muß auch der Kreis AEBF auf dem Kreise AGBH senkrecht stehen, weil beyde Kreise in eben gedachten Ebenen befindlich sind.

2) Der Kreis AEBF theilt den Kreis AGBH in zwey gleiche Theile AHB = AGB. Die Axe EF des Kreises AGBH geht nach §. 428 durch seinen Mittelpunkt D; durch diese Axe geht, wie wir eben gesagt haben, des Kreises AEBF Ebene, also auch durch den Mittelpunkt D, welcher in dieser Axe liegt, die Durchschnittslinie also AB, welche die Ebenen beyder Kreise mit einander machen, muß also auch durch den Mittelpunkt D an die beyden Punkte A und B gehen, wo die Kreise einander schneiden. Eine Linie, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, ist ein Diameter desselben, also ist AB ein Diameter des Kreises AGBH, folglich theilt er ihn in zwey gleiche Theile, folglich ist AHB = AGB.

3) Der Kreis AEBF, der den andern AGBH in zwey gleiche Theile theilt, ist nun auch ein größter Kreis. Denn seine Ebene geht, wie wir vorausgesetzt haben, durch die Pole des andern EF, also auch durch seine Axe, also auch durch den Mittelpunkt der Kugel C, weil nach §. 428 die Axe durch den Mittelpunkt der Kugel

geht,

geht, aber jeder Kreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ist ein größter Kreis §. 384, also nun auch der Kreis AEBF.

4) Die Bogen dieses Kreises AEBF zwischen dem Kreise AGBH und seinen Polen E und F sind gleich, nemlich EB = EA und FB = FA. Denn weil AD = DB = Radiis des Cirkels AGBH, indem AB ein Diameter ist, und in D das Centrum des Cirkels, imgleichen ED sich immer selbst gleich ist, auch bey D Rektus ist, so ist $DEq + AD^2 = DEq + DBq$. Das erstere ist = EAq, das letztere ist = EBq, folglich ist auch nun EAq = EBq, also EA = EB. Ist aber die Sehne EA = der Sehne EB, so ist auch nun der Bogen EA = dem Bogen EB. Eben so, weil AD = DB, und DF sich selber gleich, und bey D Rektus, so ist auf eben die Art bewiesen, daß die Sehne FB = der Sehne FA, also auch der Bogen FB = dem Bogen FA.

§. 430. Legt man durch diese beyden Pole E und F noch einen größten Kreis, so würden alle diese Betrachtungen nothwendig aus eben den Gründen für ihn wahr seyn müssen, und seine Bogen zwischen den Polen E und F, und dem Kreise AGBH müßten eben so groß, als die Bogen des Kreises AEBF zwischen den Polen E und F und dem Kreise AGBH seyn, oder die Bogen EA, EK, EB, EL müßten gleich groß seyn, imgleichen auch die Bogen FA, FK, FB, FL würden ebenfalls gleich groß seyn.

§. 431. Alle diese Sätze des vorhergehenden und des davor hergehenden Paragraphen sind auch umgekehrt wahr. Wenn ein größter Kreis AEBF auf einem andern Kreise AGBH auf der Kugel senkrecht steht, so geht der größte Kreis durch des andern Kreises Pole und Axe, und halbirt ihn, denn weil er ein größter Kreis ist, geht er durch den Mittelpunkt der Kugel, und weil er senkrecht auf dem Kreise AGBH steht, so fällt ein Perpendikel aus dem Mittelpunkt der Kugel, das auf des Kreises AGBH Ebene fällt, auch in seine Ebene. Dieses Perpendikel ist ein Theil der Axe, der größte Kreis geht also durch das Centrum C in der Axe der Kugel und durch den Mittelpunkt D des andern Kreises, und halbirt ihn nach vorhergehendem §. Und eben so ist es daher richtig, wenn ein **größter** Kreis AEBF einen andern AGBH in zwey gleiche Theile theilt oder halbirt, so geht er durch seinen Mittelpunkt D, und weil er ein größter Cirkel ist, durch der Kugel Mittelpunkt C, also auch durch die Axe EF, und durch die Pole E und F des Kreises AGBH, und steht auf ihm senkrecht. Würde endlich daher ein größter Kreis auf der Kugel auf einem andern nicht senkrecht stehen, sondern ihn schief schneiden, so würde er ihn nicht halbiren, denn wenn er ihn halbirte, müßte er auf ihm senkrecht stehen.

Fig. 246. §. 432. Der Kreis AGBH Fig. 246, den wir jetzt betrachtet haben, war ein kleinerer Kreis

Kreis der Kugel, und der Kreis AFBE ein größter. Nun mag Fig. 247 der Kreis AGBH als der Kreis AEBF ein größter Kreis auf der Kugel seyn. Wenn ein solcher größter Kreis AEBF auf einem andern größten Cirkel AGBH senkrecht steht, so geht 1) ein jeder dieser größten Cirkel durch des andern Axe, also auch durch seine Pole. Der Cirkel AEBF wird durch die Axe und Pole E, F des Cirkels AGBH gehen, und der Cirkel AGBH durch die Axe und Pole ef des andern AEBF. Ferner 2) sind auch die Bogen eines jeden größten Kreises zwischen dem andern größten Kreise und seinem Pole, als die Bogen EA, EB, FA, FB und eA, eB, fA, fB Quadranten. Fig. 247.

1) Jeder geht durch des andern Axe und Pole, wenn sie auf einander senkrecht stehen. Man ziehe an den Oertern, wo sie sich schneiden, die gerade Linie AB. Diese ist, weil sich größte Cirkel einander halbiren, ein Diameter des Cirkels AGBH §. 423, und dadurch und durch den Mittelpunkt der Kugel D geht die Ebene des Cirkels AEBF. Weil nun AEBF auf AGBH senkrecht steht, so muß auch seine Ebene, und also seine Bogen durch die Axe EF und Pole E und F des Cirkels AGBH gehen, denn die steht gleichfalls auf dieses Mittelpunkt senkrecht, und an ihren beyden Enden liegen ihre Pole E und F. Eben so geht es auch mit dem Cirkel AGBH; da beyde Cirkel auf einander senkrecht stehen, und beyde durch des andern Diameter AB gehen, so

muß die Ebene des Cirkels AGBH auch gleichfalls durch die senkrechte Linie ef gehen, welche auf dem Mittelpunkte des Cirkels AEBF aufgerichtet ist, und welcher, wie uns bekannt ist, da es größte Cirkel sind, auch der Mittelpunkt der Kugel ist.

2) AB war die Durchschnittslinie beyder größten Cirkel, auch ihr Durchmesser. Gleichfalls ist EF oder die Axe des andern Cirkels ein Durchmesser des Cirkels AEBF. Beyde Durchmesser schneiden sich unter rechten Winkeln, denn es sind beyde Axen zweyer auf einander senkrecht stehender Cirkel, also ist EDB, EDA, FAD, FDB rechte Winkel, folglich auch die Bogen, die sie messen, EA, EB, FA, FB Quadranten. Eben so, weil fe gleichfalls ein Durchmesser des Cirkels AGBH ist, und, wie wir eben gezeigt, auf AB, dem andern Durchmesser, senkrecht steht, so müssen auch EA, eB, fA, fB Quadranten seyn. Alle diese acht eben benannten Quadranten sind auch gleich, denn sie sind alle Quadranten zweyer größten Kreise auf einer Kugel, die alle gleich groß sind.

§. 433. Diese Sätze sind gleichfalls umgekehrt wahr. Wenn zwey größte Cirkel Fig. 246 AEBF und AGBH jeder durch den Pol des andern gehen, so stehen sie auf einander senkrecht, 2) und also, wenn jeder durch den Pol des andern geht, so ist auch der Bogen zwischen Pol und Cirkel ein Quadrant.

Die

Die beyden größten Cirkel AEBF und AGB theilen einander nach §. 423 in zwey gleiche Theile, die Durchnittslinie von beyden ist AB, also der Bogen AEB = dem Bogen AFB, und weil beydes größte Cirkel sind, = dem Bogen AGB = dem Bogen AHB. Weil EF diese Axe des Cirkels AGBH ist, so steht sie folglich auf ihm senkrecht, und E und F, wodurch der Cirkel AEBF gehen soll, sind die Pole des Cirkels AGBH, weil der Cirkel AEBH durch die Pole gehen soll, und auch, weil er ein Circulus maximus ist, durch den Mittelpunkt der Kugel D gehen soll, so geht also seine Ebene durch drey Punkte dieser geraden Linie EF, oder also durch die ganze gerade Linie EF; da die auch als Axe auf dem Cirkel AGBH rechtwinklicht steht, so steht also auch seine Ebene, die dadurch geht, nach §. 275 auf dem Cirkel AGBH rechtwinklicht, folglich muß auch der andere Cirkel AGBH, der durch dieses Cirkels AEBF Pole geht, auf ihm rechtwinklicht stehen.

2) Die Durchschnittslinie AB, die beyden Cirkeln gemein ist, ist ein Diameter beyder Cirkel, weil sie durch den Mittelpunkt beyder geht, die Axe EF des Cirkels AGBH, die in die Ebene des Cirkels AEBF fällt, wie wir eben gesagt haben, steht auf AB senkrecht, weil sie eine Axe von AGBH, ist sie abermal ein Diameter, weil also EDB ein rechter Winkel ist, = EDA, so sind die Bogen EA = EB = Quadranten. Eben das gilt also für die Bogen FA, FB.

§. 434. Aber wir haben es nicht einmal nöthig zu wissen, daß zwey größte Cirkel jeder durch die Pole des andern gehen, um diese Wahrheiten zu behaupten, sondern es ist schon dieses alles wahr, wenn nur ein größter Cirkel durch die Pole des andern größten Cirkels geht. Denn wenn Fig. 247 ein größter Cirkel AEBF durch die Pole E und F des andern größten Cirkels AGBH geht, so ist es auch gewiß, daß dieser Cirkel AGBH durch die Pole E und F des Cirkels AEBF geht. Denn geht der größte Cirkel AEBF durch die Pole E und F des Cirkels AGBH, so geht er auch durch seine Axe, und weil die auf dem Cirkel AGBH senkrecht steht, so steht er auch auf ihm senkrecht, also steht der Cirkel AGBH gleichfalls auf ihm senkrecht, und folglich geht er auch durch seine Axe und Pole, weil die Axe allezeit auf der Ebene eines Cirkels senkrecht steht §. 428.

Fig. 248. §. 435. Fig. 248 die Pole des größten Kreises AGBA sollen E und F seyn. Wir haben eben behauptet, daß, wenn der größte Kreis AEBF durch die Pole E und F des andern größten Kreises AGBA ginge, dieser Kreis AGBA auch durch die Pole E und F des Kreises AEBF ginge, und daß beyde auf einander senkrecht stünden. Nun sey durch eben diese Pole E und F des Kreises AGBH noch ein dritter größter Kreis EIFK gelegt, so ist es also auch wahr, daß der Kreis AGBH auch durch dieses EIFK Pole geht, und

sie

sie auf einander senkrecht stehen, denn EIFK ging durch die Pole E und F des Kreises AGBH, und wenn man daher noch so viel größte Kreise durch die Pole E und F des Kreises AGBA legte, so würde es also wahr seyn, daß AGBA durch aller ihre Pole ginge, und auf allen diesen Kreisen senkrecht stünde, und aller ihrer Bogen zwischen den Polen E und F des Kreises AGBH Quadranten, und gleich wären. **Wenn also zwey oder mehr Circuli maximi sich in den Polen E und F eines andern Circuli maximi** AGBH **schneiden, so geht dieser größrer Cirkel** AGBH **durch aller ihrer Pole, oder aller ihre Pole liegen in der Kreislinie** AGBA.

§. 436. Alle solche größte Kreise, als AEBF, EIFK, die durch die Pole E und F eines andern größten Kreises AGBA gelegt sind, und durch deren Pole also AGBA geht, stehen auf AGBA alle senkrecht. Denn AGBA steht auf jedem senkrecht. Sie selbst schneiden einander in der geraden Linie EF, als der Axe des Kreises AGBH, welches aber auch ein gemeinschaftlicher Durchmesser von ihnen ist. **Wenn also Circuli maximi sich in einem gemeinschaftlichen Durchmesser schneiden, so geht ein anderer Circulus maximus, auf dem sie senkrecht stehen, durch ihrer aller Pole.**

§. 437. Es mögen EM und EL zwey Quadranten zweyer größten Kreise seyn. Man

lege durch M und L einen andern größten Kreis AGBA, so wird dieser größte Kreis auf beyden Quadranten senkrecht stehen, und durch ihrer beyden Pole gehen. Denn dieser Kreis AGBA gienge doch durch den Mittelpunkt der Kugel D §. 384, und durch die Punkte M und L. Weil drey Punkte eine Ebene bestimmen, so ginge er also durch die Ebene DML. Diese Ebene steht aber auf EF senkrecht, weil die Bogen EM und EI. Quadranten sind, folglich steht der Cirkel AGB auch auf den Bogen EM, EL senkrecht, und geht durch ihrer Cirkel Pole §. 432.

§. 438. Will man den Pol E und F eines größten Kreises AGBH suchen, so findet man ihn, wenn man auf ihn einen andern AEBF senkrecht setzt, und von dem Orte AB, wo sich beyde schneiden, von B oder A einen Bogen BE oder AE, oder BE oder BF, oder AF von 90 Graden nimmt §. 472.

Fig. 249. §. 439. Wenn man Fig. 249 die Kugel durch parallele Ebenen schneidet, so heißen die Kreise AB, CD, HM, die durch die Schnitte solcher parallelen Ebenen auf der Kugel entstehen, **Parallelkreise**, oder **Parallelkreise** auf der Kugel sind solche, deren Ebenen AB, CD, HM parallel liegen.

Alle solche Parallelkreise haben nun einerley Axe EF, und einerley Pole E und F. Denn man richte ein Perpendikel IKE auf eines Kreises

ses Mittelpunkt auf, und verlängere es nach beyden Seiten, dieses wird nach §. 380 durch der Kugel Mittelpunkt K gehen, sie an beyden Seiten in zwey Punkten, E und F, schneiden, diese beyden Punkte E und F sind die Pole des Kreises AB, und seine Axe ist die EF §. 427, 428. Allein weil die Ebenen der Kreise AB, CD, HM parallel sind, so steht diese EF, da sie auf einem Kreis AB perpendikular steht, auf allen perpendikular, und da sie durch der Kugel Mittelpunkt geht, und auf allen andern beyden, CD und HM, perpendikular steht, so geht sie auch durch deren Mittelpunkt, sie ist also nach §. 427, 428 auch ihre gemeinschaftliche Axe, und ihre Endpunkte E und F sind ihre gemeinschaftlichen Pole.

§. 440. Wir wollen nun Fig. 250 durch die Pole E und F zweyer Parallelkreise auf der Kugel (es könnten derer auch mehrere seyn, und was wir behaupten werden, bleibt auch wahr) ANB und HKM, zwey größte Cirkel, EBFHA und ENKFE, legen. Diese beyden werden zwey Bogen, AN und HK, von den beyden Parallelcirkeln abschneiden, und wir behaupten nun, daß diese beyden Bogen, AN und HK, ähnlich sind, oder eine gleiche Anzahl von Graden haben, ob sie schon in Ansehung ihrer Größe sehr verschieden seyn können, und nur alsdenn gleich sind, wenn beyde Parallelcirkel gleich weit vom Centro der Kugel entfernt. Unser allgemeiner Satz ist also: Bogen von Parallelcirkeln, die Fig. 250.

durch zwey Circulos maximos, welche durch ihre Pole gehen, abgeschnitten werden, sind ähnlich, oder haben gleiche Anzahl von Graden ꝛc.

Wenn die Parallelkreise ANB, HKM durch größte Kreise geschnitten werden, welche durch ihre Pole E und F gehen, so ist die Durchschnittslinie beyder größten Kreise die EF, oder die Axe der Parallelkreise. Diese steht auf den Parallelkreisen senkrecht §. 427, 428, also stehen die Ebenen dieser größten Kreise auf dieser Parallelkreise Ebenen nach §. 275 rechtwinklicht. Die Linien, in welchen die Parallelkreise durch die beyden größten Kreise geschnitten werden, sind IA, IN, LH, LK. Da die Ebenen der größten Kreise auf der Parallelkreise Ebenen senkrecht stehen, so sind also die Winkel EIN, EIA, ELK, ELH rechte Winkel, und also sind nach §. 274 die Winkel AIN, HLK die Winkel, unter welchen die Ebenen der größten Cirkel gegen einander geneigt sind, oder die Neigungswinkel der Ebenen beyder größten Kreise. Diese Neigungswinkel müssen aber gleich seyn, denn zwey Ebenen können nur einen Neigungswinkel gegen einander haben. Das Maas dieser Neigungswinkel sind die Bogen AN und HK, diese müssen also gleiche Theile ihres Cirkels seyn, oder beyde gleiche Anzahl von Graden haben, also sind sie beyde einander ähnlich. Es würde also gleich viel seyn, wenn man den Neigungswinkel der beyden größten Cirkel, EBFHA und ENKFE, messen wollte, welchen Bogen man von beyden Parallelcirkeln,

keln, AN und HK, dazu nähme, weil sie beyde gleiche Anzahl von Graden haben, ob sie schon sonst in Ansehung ihrer ausgedehnten Größe sehr verschieden seyn konnten. Zwischen den beyden Parallelcirkeln, ANB und HKM, die in unserer Figur zu beyden Seiten des Mittelpunkts C der Kugel liegen, können sich noch unzählige mit diesen parallele Cirkel befinden, von denen man den Bogen, welcher von den beyden größten Cirkeln abgeschnitten würde, zum Maas des Neigungswinkels der Ebenen der beyden größten Cirkel nehmen könnte. Unter diesen befindet sich auch einer PQR, der durch den Mittelpunkt der Kugel C geht, dieser ist also ein größter Cirkel. Gemeiniglich wählt man nun diesen durch die andern beyden auf seiner Axe stehender größten Cirkel abgeschnittenen Bogen PQ zum Maaße des Neigungswinkels der Ebenen dieser beyden größten Cirkel, weil der Radius dieses Cirkels mit dem Radius der Kugel gleich ist, und dieses in der Rechnung bequemlicher ist.

§. 441. Diese Betrachtungen führen uns nun zu einigen Betrachtungen für die sphärischen Winkel. Man nennt einen sphärischen Winkel den Winkel, welchen zwey Bogen größter Kreise an der Spitze, wo sie sich schneiden, einschließen. Der Winkel Fig. 251, AEN oder auch PEQ, den die beyden größten Cirkel, EP und EQ, an der Spitze E machen, heißt ein sphärischer Winkel, er ist eigentlich die Neigung Fig. 251.

gung

gung der beyden Ebenen, EQFC und EPFC, welchen die beyden größten Cirkelstücke, EPF und EQF, gegen einander machen nach §. 274.

§. 442. Wir haben aus dem vorhergehenden Paragraphen gesehen, daß der Neigungswinkel der Ebenen zweyer größten Cirkel der Kugel durch das Maas eines Bogens AN bestimmt wird, durch dessen Pole sie gehen, und auf dem sie also senkrecht stehen, auch daß man zu diesem Maaße einen mit diesem Bogen parallel liegenden Bogen PQ eines größten Cirkels PQR nehmen könne, und gemeiniglich nehme, auf dem also auch die beyden größten Cirkel, EQF und EPF, senkrecht stehen. Dieser Bogen PQ eines größten Cirkels, auf dem sie senkrecht stehen, wird also das Maas der Neigung beyder größten Cirkel, oder das Maas des sphärischen Winkels AEN seyn.

Stehen die beyden Bogen, EA und EN, größter Cirkel, die den sphärischen Winkel ausmachen, nicht schon auf einem dritten größten Cirkel PQR senkrecht, so verlängere man sie auf der Kugel bis an P und Q, das ist, bis jeder 90 Grade hat, und lege denn durch die Punkte P und Q, und durch den Mittelpunkt C der Kugel eine Ebene, so giebt die auf der Kugel den Bogen PQ eines größten Cirkels, und PQ wird alsdenn das Maas des sphärischen Winkels AEN = PEQ. Denn alsdenn steht EC auf PC und QC senkrecht, weil PE 90 Grad, und QE auch

=

= 90 Grad, also der Winkel ECP = ECQ Rekto, und also ist nach §. 274 der Winkel PCQ, oder der Bogen PQ das Maas des Neigungswinkels der Ebenen beyder Kreise, EPF und EQF, also das Maas des sphärischen Winkels AEN.

Es muß dieses sehr oft geschehen, denn es schneiden sich oft zwey Bogen größter Kreise auf der Kugel, ohne daß sie auf einem dritten Bogen AN senkrecht stehen, der konnte sehr schief durch beyde Punkte A und N gelegt seyn, man gebraucht also, den Winkel zu messen, das Mittel, das wir jetzt gezeigt haben.

§. 443. Man ziehe in der Ebene des größten Cirkels EQF an der Spitze E, wo sich beyde Cirkel schneiden, die Tangente bE, und in der Ebene des Cirkels EfF gleichfalls in der Spitze E, wo sich beyde größte Cirkel schneiden, die Tangente Ea. Beyde Tangenten stehen auf EC senkrecht, **weils Tangenten**, und EC der gemeinschaftliche Radius beyder sich schneidenden größten Cirkel ist. Diese Tangenten sind aber auch die Richtungen ihrer Bogen, oder da sie in ihren Ebenen liegen, und auf dem Durchschnitt dieser Ebenen senkrecht stehen, so machen sie auch mit einander den Neigungswinkel beyder Ebenen aus, also auch durch den Winkel, den solche zwey Tangenten mit einander machen, kann der sphärische Winkel AEN gemessen werden, also der Winkel AEN = PEQ ist auch mit dem Winkel aEb einerley. Es würde eben auch dieser Neigungs:

gungswinkel PEQ der beyden Cirkelebenen gemessen werden, wenn man in ihre Ebenen, wo man wollte, zwey, beyde auf der Durchschnittslinie EF senkrecht stehende und einen Winkel mit einander machende Linien, es, fs, zöge, wie das §. 274 lehrt. Der Winkel ESF ist völlig gleich dem Winkel PEQ §. 274. Der Winkel aEb ist gleich dem Winkel cEd, weils Verticalwinkel sind. Dieser würde aus den im vorhergehenden Paragraphen angeführten Gründen dem, dem sphärischen Winkel AEN entgegen gesetzten sphärischen Verticalwinkel DEB gleich seyn, also sphärische Verticalwinkel sind gleich. Die Nebenwinkel aEb + bEd sind laut §. 38 gleich zwey Rektis, aber der Winkel bEd ist aus allen Gründen des vorigen Paragraphen gleich dem sphärischen Winkel NEB, also da aEb + bEd = ANE + NEB, so sind also sphärische Nebenwinkel gleich zwey Rektis, und alle sphärische Winkel um einen Punkt, als AEN, NEB, BEF, FEA, sind gleich vier Rektis, auch aus dem Grunde, weil auch ein Circulus maximus PQRP ihr aller Maas ist.

§. 444. Wir gaben in dem vorhergehenden § zweyerley Arten an, den sphärischen Winkel PEQ Fig. 250 zu messen, unter diesen ist gemeiniglich die erste die bequemste, die auch am mehrsten gebraucht wird. Allein wir wollen noch ein Maas des sphärischen Winkels geben, um nichts wichtiges in dieser Materie unberührt zu lassen.

Es

Es schneiden sich Fig. 252 die beyden größten Kreise der Kugel DHEI und GHFI in H und I, so ist DIF ein sphärischer oder der Neigungswinkel ihrer beyder Ebenen. Wenn man, wie wir §. 440 gelernt haben, I, wo sie sich schneiden, bis D 90 Grade nimmt, und ebenfalls von I bis F 90 Grade, also DI = IF = 90 Grad, und durch D und F abermals einen größten Cirkel ADFBG legt, so ist, wie wir wissen, der Bogen DF das Maas dieses Winkels. Es stehe ab auf des Kreises DHEI Mittelpunkt C senkrecht, und sie ist also seine Axe, und a und b die Pole dieses Kreises. Gleichfalls sey AB die Axe des Kreises GHFI, und A und B seine Pole. Weil DI = IF = 90 Graden, wie wir angenommen, so steht der Kreis ADFBG auf beyden, die sich hier schneiden, senkrecht, und geht durch ihrer beyden Pole, A und a, nach §. 434 und 435, und B und b. Wir behaupten nun, daß der Bogen aA oder Bb, welcher zwischen beyden Polen dieser sich schneidenden größten Cirkel ist, (denn aA und Bb sind Verticalwinkel, und daher gleich) so groß sey, als der Bogen DF, welcher den sphärischen Winkel DIF mißt, oder weil Aa den Winkel Aca mißt, also anstatt des Bogens gesetzt werden kann, und dieser Winkel Aca auch der Winkel ist, den die Axen ab und AB beyder sich schneidenden Kreise ausmachen, daß **der Winkel, den die Axen beyder sich schneidenden Kreise ausmachen, so groß sey, als der Winkel der Neigung der sich schnei-** Fig. 252.

schneidenden Ebenen, oder als der sphärische Winkel DIF.

Denn ist ACF = 90 Grad, weil AC eine Axe des Cirkels GHFI ist. Ferner ist aCD auch = 90 Grad, weil aC eine Axe des Kreises DHEI ist.

Folglich ACF = aCD

folglich ACF − ACD = aCD − ACD

oder DCF = aCA.

Aber DCF wird durch den Bogen DF und aCA durch den Bogen aA gemessen, also sind, da beyde Winkel gleich sind, auch beyde Bogen gleich, auch aCA mit dem sphärischen Winkel DIF gleich.

§. 445. Wenn Fig. 252 zwey Punkte, a und A, auf der Oberfläche einer Kugel gegeben sind, so heißt der Bogen aA eines größten Kreises ADFBA, der durch diese beyden Punkte gelegt wird, **der Abstand oder die Entfernung** dieser beyden Punkte auf der Kugel. Es ist dieses der kleinste Bogen des größten Kreises ADFBA, welcher zwischen beyden Punkten liegt, der Bogen AFBa dieses Kreises. Fig. 252.

Es ist überhaupt aber auch allezeit Fig. 252 die **kürzeste** Linie, welche man zwischen zweyen Punkten, a und A, auf der Kugel ziehen kann, der Bogen eines größten Kreises auf der Kugel.

Dieses deutlich zu machen, wollen wir überhaupt Fig. 253 einen größten Cirkel ABE betrach- Fig. 253.

trachten, der von einem kleinern ABG in einerley Ebene geschnitten wird, deren Mittelpunkte C und c beyde in dem Radio des größern Cirkels EH liegen. Man hänge die Punkte, wo sich beyde schneiden, A und B durch eine gerade Linie AB zusammen, dieses ist die Entfernung der beyden Punkte A und B in dieser Ebene, und auch zugleich eine gemeinschaftliche Chorde des größern und kleinern Cirkels. Weil die Cirkel sich schneiden, so muß ein Theil des Bogens des einen Cirkels außer dem andern sich befinden. Zwar muß der Bogen des Cirkels, welcher sich außer dem andern befindet, der Bogen ADB des kleinern Cirkels seyn, denn wäre es der Bogen des größern Cirkels, so könnte ihn der kleinere gar nicht schneiden, sondern läge in seiner Fläche, und also muß CD länger als CH seyn, folglich ist auch der Bogen ADB des kleinern Cirkels, wenn er in eine gerade Linie verwandelt wird, länger als der Bogen AHB des größern Cirkels, weil nemlich der Weg ADB von A bis B länger ist, als der Weg AHB von A bis B. Also wenn zwey Cirkel verschiedener Größe auf eben bestimmte Art sich schneiden, so ist der zwischen beyden Durchschnittspunkten befindliche Bogen des größern Cirkels allezeit kleiner an Länge, als der Bogen des kleinern. Man sieht leicht ein, daß, wenn sie auch auf eine andere Art sich schnitten, so, daß sie nicht, wie hier, in einer Ebene liegen, man sie doch allezeit, wenn man wollte, auf die Art in eine Ebene leger und betrachten

könnte, und also die Wahrheit allezeit richtig ist. Wir wollen dieses auf unsern Satz anwenden. Es läßt sich durch die Punkte A und a Fig. 252 auf der Oberfläche der Kugel nur ein größter Cirkel legen. Denn weil er zugleich durch den Mittelpunkt der Kugel gehen muß nach §. 384, so bestimmen also die drey Punkte A, a und C seine Lage §. 257. Alle andere Cirkel, welche dadurch gelegt werden können, sind kleinere Cirkel der Kugel, also ihre Radii allezeit kleiner, als der Radius des größten Cirkels, indessen haben sie doch eine gemeinschaftliche Chorde, welches eine durch die Kugel gezogene gerade Linie Aa seyn würde. Da sich diese Cirkel allezeit schneiden, weil sie durch zwey gemeinschaftliche Punkte gehen, so kann der kleine auf den größern allezeit in der Lage Fig. 253 gelegt werden, daß er die Aa dennoch zur Chorde behält, man darf sich nur vorstellen, daß er sich darum bewege, und also wird sein Bogen allezeit größer seyn, als der Bogen des größten Cirkels, weil sein Bogen allezeit darüber zu liegen kommen wird, folglich ist der Bogen des größten Cirkels Aa die Entfernung der beyden Punkte auf der Oberfläche der Kugel.

§. 446. Wir haben bis daher nach unserer Absicht von den Kreisen geredet, die sich auf der Kugel schneiden, wir gedenken noch etwas von denen, die sich auf der Oberfläche der Kugel nur **berühren**. Man sagt von solchen Kreisen, daß sie sich auf der Oberfläche der Kugel berühren, wenn

wenn ihre Peripherien zwar an einander kommen, aber auf solche Art, daß der eine Kreis ganz auf der einen Seite der Ebene des andern Kreises zu liegen kömmt Fig. 254. Die Kreise AB und BD berühren einander, und der Kreis BD liegt ganz auf der einen Seite der Ebene des Kreises AB, und eben so umgekehrt, der Kreis AB ganz auf der einen Seite der Ebene des Kreises BD. Solche Kreise, die sich berühren, können sich nur in einem einzigen Punkte berühren, und haben also nur einen einzigen Punkt mit einander gemein. Denn gesetzt, ihre Peripherien hätten zwey Punkte mit einander gemein, so ließe sich zwischen diesen beyden Punkten eine gerade Linie ziehen, dieses wäre alsdenn eine Chorde, die für beyde Kreise gehörte, die also von jedem Kreise ein Stück abschnitte, also jeden Kreis in zwey Theile theilte, und jedes Theil eines jeden Kreises müßte auf die andere Seite der Ebene des andern Kreises fallen. Die Kreise berührten sich alsdenn nicht, sondern sie schnitten sich, welches doch nicht seyn soll. Fig. 254

Wir beschließen hiemit dieses Kapitel, und zugleich diesen Abschnitt der Elementar-Geometrie. Wir haben uns bemüht, nichts von dem wichtigsten zu vergessen, und die Grundsätze derselben deutlich vorzutragen, und unsere Leser, wenn sie weiter gehen wollen, zu schwerern Schriften gehörig vorzubereiten.

Ende der Elementar-Geometrie.

Die ebene Trigonometrie.

Das erste Kapitel.

Betrachtungen der trigonometrischen Linien überhaupt.

§. 447.

Aus den Betrachtungen, welche wir gleich im Anfange der Geometrie im dritten Kapitel angestellt haben, lernten wir, daß ein Triangel dadurch bestimmt würde, wenn man zwey Winkel und eine Seite desselben, oder zwey Seiten und einen Winkel, oder auch alle drey Seiten desselben wüßte. War uns dieses gegeben, so konnten wir den Triangel zeichnen, und also seine übrigen Seiten oder Winkel durch solche Zeichnung finden. Wir lernten auch zugleich, daß drey Winkel allein keinen Triangel bestimmten,

und

und daß unendlich viele Triangel, die in Ansehung ihrer Seiten sehr verschieden wären, doch einerley Winkel haben könnten. So wie wir nun aus diesen gegebenen Stücken die Winkel und Seiten eines Triangels durch Zeichnung finden könnten, so läßt es sich auch durch Rechnung bestimmen, und die Wissenschaft, die dieses lehrt, heißt die **Trigonometrie**, oder auf Deutsch die Messung der Dreyecke. Man theilt sie in die **ebene** und **sphärische** Trigonometrie. Die ebene Trigonometrie beschäftigt sich mit Triangeln, deren Seiten **gerade** Linien sind, und da die Seiten also alle in einer Ebene liegen, weil drey Punkte eine Ebene bestimmen, und jede gerade Linie in einer Ebene liegt. Die sphärische Trigonometrie beschäftigt sich mit Triangeln, deren Seiten Bogen größter Cirkel sind. Von dieser letztern reden wir jetzt nicht, sondern von der **ebenen Trigonometrie.** Ein jeder Triangel hat, wie uns bekannt ist, drey Seiten und drey Winkel, also überhaupt sechs merkwürdige Stücke.

Die **ebene Trigonometrie** ist nun die Wissenschaft, aus dreyen von diesen sechs Stücken, die von einem geradlinichten Triangel gegeben sind, worunter aber wenigstens eine Seite seyn muß, die übrigen drey Stücke durch Rechnung zu bestimmen. Von ihrem außerordentlichen Nutzen durch alle mathematische und physikalische Wissenschaften haben wir nicht nöthig zu reden, die Erfahrung wird ihn jeden genugsam lehren.

§. 448. Ehe wir nun diese Wissenschaft lehren können, müssen wir uns verschiedene Linien und ihre Eigenschaften bekannt machen, welche zu derselben unentbehrlich sind, und welche man mit dem Namen der **trigonometrischen Linien** benennt. Sie sind Sinus, Cosinus, Sinus versus, Tangens, Corangens, Secans, Cosecans. Wörter, die sich nicht gut deutsch ausdrücken lassen, wenigstens ist das eben nicht gebräuchlich. Wir tragen sie nach der Reihe vor.

Fig. 255

§. 449. Es sey Fig. 255 um den Diameter AB ein Kreis AFBD beschrieben. Man richte aus dem Mittelpunkte C des Kreises auf dem Diameter AB ein Perpendikel FC auf, so ist also der Bogen FA ein Quadrant. Man nehme in diesem Bogen FA einen Punkt an, wo man will, hier mag es E seyn, und ziehe den Radius EC, von diesem Punkt E lasse man ein Perpendikel auf den andern Radius AC, der den Quadranten einschließt, fallen, welches die El seyn wird, oder man kann auch aus dem Punkt E ein Perpendikel auf den Radius FC fallen lassen, welcher mit dem Quadranten AF einschließt, und das ist die Linie EM, so nennt man die Linie El den Sinus des Bogens EA, oder gewöhnlich den Sinus des Winkels ECA, weil der Winkel durch den Bogen gemessen wird, und die Linie EM heißt der Sinus des Bogens EF, oder gewöhnlich der Sinus des Winkels ECF,

weil

weil der Winkel durch den Bogen gemessen wird.

§. 450. In unserer Figur 255 war der Bogen AF ein Quadrant, oder der Winkel FCA ein rechter Winkel, also die beyden Winkel FCE und ECA zusammen genommen machen einen rechten Winkel aus. Was also dem einen von beyden noch am Maaße des rechten Winkels fehlt, das ergänzt der andere, oder macht es voll. Der eine Sinus von einem Winkel ist also der **Sinus der Ergänzung des andern zum rechten Winkel.** So ist also der Sinus EM der Sinus des Winkels, welcher den Winkel ECA zum rechten Winkel ergänzt, und der Sinus EI ist der Sinus des Winkels, welcher den Winkel ECF zum rechten Winkel ergänzt. Man nennt einen solchen Sinus eines Winkels, welcher dem andern zu 90°, oder einem rechten Winkel ergänzt, des andern seinen **Cosinus.** Also der Sinus EM ist der **Cosinus** des Winkels ECA, und gleichfalls der Sinus EI ist der **Cosinus** des Winkels ECF. Der **Cosinus** wird auch daher Sinus complementi genennt.

§. 451. Wenn man in Fig. 255 das Viereck EICM, welches durch diese Sinus und Radius entstanden war, betrachtet, so sieht man gleich, daß es ein Rechteck (rectangulum) ist. EM ist also gleich groß, als IC, und CM ist so groß, als EI §. 21, 83, 84, auch der Winkel CEI ist = FCE, und der Winkel ECA = CEM,

und man wird also statt EM die IC, und statt EI die CM setzen können.

Nun war EM der Cosinus des Winkels ECA, also wird auch IC der Cosinus des Winkels ECA seyn. Eben so war EI der Cosinus des Winkels ECF, und so kann auch die der EI gleiche Linie, die CM, der Cosinus des Winkels ECF genannt werden, und so geschieht es auch gewöhnlich. Es ist also der Sinus des Winkels ECA die EI, und sein Cosinus die IC. Der Sinus des Winkels ECF ist die EM, und sein Cosinus die CM.

Man sieht auch hieraus, daß man bey jedem rechtwinklichten Triangel die Hypotenuse als den Radius, und die beyden andern Schenkel als Sinus und Cosinus betrachten kann, wie wir dieses an den beyden rechtwinklichten Triangeln ECI und ECM, die wir eben in unserer Figur betrachtet haben, und die wir wegen der Fällung der Sinus auf den Radius nothwendig bekamen, gefunden haben.

§. 452. Wenn aus dem Punkt E Fig. 255 ein Perpendikel auf AC gefällt wurde, und also ein Sinus des Winkels ECA entstand, so mußte nothwendig ein Stück von CA dadurch abgeschnitten werden. Hier ist es die AI, und diese AI heißt der Queersinus oder Sinus versus, auch wol Sagitta der Pfeil des Winkels ECA, oder auch des Bogens EA. Eben also ist FM

Fig. 255.

der

der Sinus verfus des Bogens EF, oder des Winkels ECF.

Um sich allgemein auszudrücken, giebt man einem Winkel einen Namen, als der Winkel a, der Winkel b, wie uns schon bekannt ist, und man schreibt auch der Kürze halber die bisher bemerkten Linien also: Sin. a, Cos. a, Sv. a, welches wir zu bemerken haben.

§. 453. Wir wollen Fig. 255 nun die EI verlängern, bis sie wieder die Peripherie in D erreicht, und den Radius CD ziehen, so ist ED eine Chorde des Bogens EAD. Bey I war nun ein rechter Winkel, und der Radius CA ging also durch die Chorde unter seinem rechten Winkel, aber daher theilte er sie auch nach §. 166 in zwey gleiche Theile, und EI ist also = ID, und auch die Bogen EA und AD sind einander gleich. Der ganze Bogen ED ist also nochmal so groß, als das Stück desselben EA. Wir sehen also daraus, daß der Sinus EI **eben die Hälfte einer Chorde von einem nochmal so grossen Bogen ist, als der Bogen ist, dazu dieser Sinus gehört** Eben so ist es mit dem Sinus EM, er ist die Hälfte der Chorde EK, und so überhaupt mit allen Sinus, **oder der Sinus eines Bogens ist die halbe Chorde des doppelten Bogens.** Wir wollen z. E. annehmen, der Bogen EAD habe 60 Grad, so wird seine Chorde ED = dem Radius seyn. Der Bogen EA, oder der Winkel ECA wäre also

denn 30 Grad, und sein Sinus EI, der also = der halben Chorde von 60 Graden wäre, müßte also = dem halben Radius seyn, welches sich auch also verhält.

Fig. 256 §. 454. Es ist Fig. 256 der Bogen AD ein Quadrant, oder = 90°. Die Winkel GCA, FCA, ECA sind verschiedene darinn gezeichnete Winkel, die alle kleiner als 90° sind, und GH, FI, EK sind ihre Sinus. Da alle Sinus die halben Chorden eines doppelt so großen Bogens sind, als der ist, welchen sie messen, nach vorhergehendem §, da die Chorden desto kleiner sind, je kleinerer der Bogen, also auch der Winkel ist, den sie messen nach §. 169, so müssen auch die halben Chorden kleiner seyn, oder die Sinus müssen kleiner seyn, wenn der Winkel, für den sie gezogen sind, kleiner ist, als ein anderer Winkel. Die Sinus also nehmen ab, wenn die Winkel abnehmen, und wachsen, wenn die Winkel wachsen, so ist der Sinus GH daher nothwendig kleiner, als FI, und FI kleiner, als EK. Der größte Winkel im Quadranten ist DCA, oder der = 90 Grad, dessen Sinus muß also nothwendig der größte seyn. Da sich aber vom Punkte D, dem einen Schenkel des Quadranten, auf den Diameter AB nur ein Perpendikel fällen läßt, so muß dieses Perpendikel selbst die DC seyn, und diese DC ist der Radius. Der Radius selbst ist also der Sinus für den Bogen von 90°, und auch der größte unter allen, man nennt ihn daher auch den größten Sinus

(Si-

(Sinus totus), und drückt ihn öfters durch den Buchstaben r aus, weil er mit dem Radius einerley ist. Da alle andere Sinus kleiner als der Sinus totus sind, so können sie alle als Brüche dieses Sinus totus betrachtet werden, wie es denn auch wirklich geschieht. Das Wachsthum der Sinus geschieht von o an, weil, wenn kein Winkel ist, auch kein Sinus statt findet. Wenn sie in 90° ihre größte Größe erreicht haben, und man stellt sich nun vor, der Radius EC, der sich von A bis nach E und D bewegt hat, bewege sich nun weiter, er komme also über D nach der Gegend B hin, und man zieht nun alsdenn die Sinus, so nehmen sie wieder ab, bis sie wieder in B, da sie 180° erreicht haben, wieder o werden, und so geht es durch den ganzen Cirkel. Doch davon noch etwas weiter unten.

§. 455. Wenn die Sinus wachsen, so nehmen die Cosinus ab, und wenn die Sinus abnehmen, so wachsen die Cosinus. Es ist dieses schon aus der Figur deutlich. Der Cosinus des Winkels GCA ist HC, der Cosinus von FCA ist IC, und so nehmen die Cosinus ab, wie die Sinus wachsen. Eben so wachsen auch die Cosinus, wie die Sinus abnehmen, der Sinus GH ist kleiner, als FI, und daher der Cosinus HC größer, als IC. Es läßt sich auch dieses leicht begreifen, wenn man betrachtet, daß nach §. 450 der Cosinus eines Winkels eigentlich der Sinus des Complements zu 90 Graden ist,

und daß er also nothwendig größer werden muß, wenn der Winkel abnimmt, weil alsdenn das Complement des Winkels wächst, und abnehmen muß, wenn der Winkel, also auch sein Sinus wächst, weil alsdenn das Complement abnimmt. Wenn der Winkel GCA verschwindet, also auch der Bogen GA, so wird der Sinus = Null, folglich muß alsdenn der Cosinus selbst CA, oder der Radius seyn.

Wenn der Radius EC immer näher nach D rückt, so wird der Winkel ECA immer größer, also der Cosinus KC immer kleiner, er wird = Null, sobald E die D erreicht hat, oder der Cosinus vom Sinus totus ist = Null. Wenn nun aber der Bogen über 90 Grade wächst, oder über D kömmt, so werden, wie wir gelernt haben §. 454, die Sinus wieder kleiner, und die Cosinus fangen an zu wachsen, aber auf der andern Seite von DC, von C an nach B hin, bis sie wieder = Radius werden, wenn der Bogen AB 180° erreicht hat.

§. 456. Die Sinus versus AH, AI, AK, AC wachsen so, wie die Winkel, also auch die Sinus wachsen. Wenn der Sinus seine größte Größe erreicht hat, oder der Bogen AD 90° ist, so werden die Sinus versus alsdenn = dem Radius, wie man von AC sieht. Wird der Bogen aber größer als 90°, so nehmen zwar, wie wir gesehen haben, die Sinus wieder ab, aber

die

die Sinus versus bleiben in ihrem Wachsthum, indem sie immer von A an gemessen werden, sie werden also immer größer, als der Radius, und wenn endlich der Bogen 180° erreicht hat, so ist der Sinus zwar = 0, der Cosinus = Radius, aber der Sinus versus = 2 Radiis, oder = der AB. Werden aber die Winkel kleiner als 90°, so daß der Radius von D nach A sich bewegt, so werden auch die Sinus versus immer kleiner, so daß sie bey Null Grad, wenn der Sinus verschwindet, auch mit verschwinden, und = Null werden, wo denn der Cosinus = Radius wird. Verschiedene von diesen Betrachtungen werden wir in der Folge dieser Abhandlung, da wir nur für Anfänger schreiben, nicht weiter anwenden, indem, wie wir bald sehen werden, daß die Betrachtungen eines Quadranten mit seinen trigonometrischen Linien für uns zureichend ist, alle unsere trigonometrische Aufgaben aufzulösen, indessen werden wir doch zuweilen in abstraktere Betrachtungen einen Blick thun, um unsere Leser dazu vorzubereiten, wenn wir auch selbige schon nicht weiter nach der Absicht dieser Schrift ausführen können.

§. 457. Es war Fig. 256 der Bogen AD ein Quadrant, und die Sinus der Winkel, welche kleiner als 90° waren, waren alle kleiner, als der Radius, und ließen sich, wie GH, Fl &c. in diesem Quadranten zeichnen. Wie nun aber, wenn der Winkel, also auch sein Bogen großer

als 90° ist, welches wird denn sein Sinus und Cösinus seyn?

Fig. 257. Es sey Fig. 257 der Sinus für den Winkel ACF, welcher größer als 90° ist, zu finden, wie wird man dieses angeben? Wenn der Sinus das Perpendikel ist, welches sich von dem Endpunkte des einen Schenkels des Winkels im Cirkel auf den Radius ziehen läßt, so wird sich kein ander Perpendikel auf den Radius für den Winkel ACF als die FG ziehen lassen, und das wäre also der Sinus des Winkels ACF, aber dieses ist auch der Sinus des Winkels FCB, beyde aber, sowol ACF als FCB zusammen, machen 180 Grade aus, und FCB ist das Complement des andern Winkels ACF zu 180 Graden. Beyde haben einerley Sinum, also sieht man, daß Winkel, welche einander zu 180° ergänzen, einerley Sinus haben. Man hätte aber den Sinus dieses Winkels ACF eben so gut in dem Quadranten ACD finden können. Wenn der stumpfe Winkel ACF gegeben ist, so weiß man, was seiner Größe noch an 180° fehlt, das muß doch allezeit weniger als 90° seyn, weil der gegebene stumpfe Winkel doch über 90° ist. Das, was nun noch dem Winkel ACF an 90 Graden fehlt, wollen wir von A nach E tragen, so wird der Bogen AE = FB, oder der Winkel ECA = FCB, und also auch EH = FG, und EH wäre denn auch der Sinus für ACF. Es haben aber auch diese beyden gleich großen Sinus, EH und FG, in Ansehung des Diameters AB, einerley

Lage.

Wenn man also den Sinus eines stumpfen Winkels wissen soll bis 180°, so darf man nur den Sinus seines spitzen Nebenwinkels dafür nehmen. Man kann also auf die Art aller Winkel Sinus von 0 Grad bis 180 Grad wissen, wenn man die Sinus bis 90 Grad weiß. Denn zwey spitze Nebenwinkel, die zusammen 180° ausmachen, giebt es nicht, sondern sie sind entweder beyde rechte, oder einer stumpf und der andere spitz, und für den rechten Winkel und für die spitzen bis 90 Grad hat man die Sinus, also hat man sie auch für alle stumpfe Winkel.

Aber auch die Cosinus der Winkel, die einander zu 180° ergänzen, haben einerley Größe, oder der Cosinus eines stumpfen Winkels ACF ist einerley mit dem Cosinus des spitzen Winkels FCB oder ECA, der den stumpfen zu 180° ergänzt, nur in Ansehung der Lage ist er verschieden. Der Cosinus von ACF wäre die CG, die ist nun freylich so groß, als HC (weil EH = FG, FC = EC = Radius bey G und H Rekti, und FCB = ECA ist, und daher beyde Triangel, ECH und FCG, kongruent, indem in jedem zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind), aber in der Lage ist sie anders, und liegt auf jenseit des Durchmessers DI. Es sind daher die Cosinus der stumpfen Winkel bis 180° negativ. In Ansehung der Größe aber kann man allezeit sagen, zwey Winkel, die einander zu 180° ergänzen, haben einerley Sinum und Cosinum. Z. E. der Sinus Fig. 257.

des

des Winkels von 60° ist zugleich der Sinus des stumpfen Winkels von 120°, der Cosinus des Winkels von 80° ist zugleich der Cosinus des stumpfen Winkels von 100° u. s. w. Nur wenn man den Cosinus des spitzen Winkels mit dem Zeichen + ausdrückt, so wird der Cosinus des stumpfen Winkels — zum Zeichen haben. So ist z. E. der Cosinus von 140° = — Cosinus 40°. Aber mit dem Sinus versus ist es nicht also, sondern die Sinus versus eines spitzen Winkels und seines stumpfen Nebenwinkels, der ihn zu 180° ergänzt, sind um den doppelten Cosinus unterschieden. Doch wir werden in unsern Betrachtungen von dem Sinus versus wenig reden, weil wir ihn zu unsern Aufgaben und Auflösungen eben nicht gebrauchen werden.

§. 458. Wir haben Betrachtungen über die Sinus der Bogen von Null Grad bis zu 180° angestellt. Man sieht leicht ein, daß die Bogen größer als 180° werden können. So kann z. E. Fig. 255 der Punkt E über B weg nach N rücken, der > 180° ist; man bekömmt alsdenn einen erhabenen oder ausspringenden Winkel ACN, wie werden deren Sinus und Cosinus beschaffen seyn?

Fig. 255.

Wenn ein solcher Bogen oder Winkel größer als 180° wird, so fällt sein Schenkel CN unter AB, und das Perpendikel NO, das sich von N auf den Durchmesser AB ziehen läßt, welches also sein Sinus wäre, oder die NO fällt gleichfalls

falls auf die andere Seite von AB. Solche Sinus werden also als negativ betrachtet. Der Sinus eines solchen Bogens oder Winkels über 180° wächst von B an, da er Null war, bis wieder an L, welches 3.90 oder 270° ausmacht, da wird er CL oder gleich dem Radius, aber er wird nun mit dem Zeichen — gesetzt. Von da nimmt er wieder ab bis an A, und wird in A Null, da der Bogen 360° erreicht hat. Der Sinus eines solchen erhabenen Winkels ACN, oder eines Bogens, der über 180° ist, ist einerley mit dem Sinus des Winkels, der ihn zu 360° ergänzt. Nur er ist dem Sinus dieses Winkels entgegen gesetzt und negativ.

Der Cosinus eines erhabenen Winkels, der also über 180°, wie Fig. 255 ACN ist, wie aus dem eben vorhergesagten hervorleuchtet, die CO, aber ist hier negativ, weil CO auf der entgegen gesetzten Seite von FL liegt. Dieser Cosinus nimmt immer ab, wie N nach L rückt, da der Bogen ABL = 3.90 = 270° wird, da wird er = Null. Nun wächst dieser Cosinus wieder, und weil er nun nach der andern Seite von FL zu liegen kömmt, wird er wieder positiv, bis er in A wieder = Radio, oder die CA selbst wird, wo der Bogen 360° groß ist.

Der Cosinus also eines erhabenen Winkels, oder eines Bogens über 180°, hat mit dem Cosinus des Winkels, der diesen erhabenen zu 360° ergänzt, also allerdings einerley Größe, und auch einerley Lage und einerley Zeichen.

Die Sinus also von ♌ bis 180° sind alle positiv, bey 180° werden sie Null, von da gehen sie ins Negative, und also von 180° bis 360° negativ. Die Cosinus sind im ersten Quadranten positiv, bey 90 Grad werden sie = Null; denn werden sie wieder negativ, und wachsen bis 180 Grad, da sie wieder = — Radius sind; denn nehmen sie wieder ab im dritten Quadranten, bleiben aber negativ, bis sie in L = 270° = Null werden; nun wachsen sie wieder, und werden wieder positiv im letzten Quadranten, bis sie bey A oder bey 360° = Radius sind, oder die Cosinus sind im ersten und vierten Quadranten positiv, und im zweyten und dritten negativ.

Welchen Sinussen und Cosinussen der spitzen Winkel im ersten Quadranten diese Sinus der stumpfen Winkel in Ansehung ihrer Größe gleich sind, ist uns aus den vorhergehenden Betrachtungen schon sattsam bekannt, und leuchtet auch mit aus dem Grundsatze hervor, daß Nebenwinkel, die einander zu 180° ergänzen, in Ansehung der Größe einerley Sinus und Cosinus haben. Wir werden aber die Betrachtungen dieses § eben nicht in unserer Abhandlung weiter gebrauchen, und haben sie nur angeführt, um auch einen Blick in abstraktere Betrachtungen zu thun.

§. 459. Die trigonometrischen Linien, wovon wir nunmehr allgemeine Begriffe zu geben anfangen, sind die **Tangenten** und **Cotangenten**, die **Secanten** und **Cosecanten**. Wir wol-

wollen wieder Fig. 255 aus dem Punkte C um den Durchmesser AB einen Cirkel ziehen, und wenn wir nun CF auf C unter einem rechten Winkel setzen, so haben wir, wie wir wissen, einen Quadranten ACF. Wir wollen gleichfalls, wie bey den Betrachtungen vom Sinus, einen Punkt E in diesem Quadranten willkührlich annehmen, und dadurch den Radius CE ziehen, und unbestimmt verlängern. Wir haben also im Quadranten den Bogen AE und den Winkel ACE. Auf dem einen Schenkel des Winkels an seinem Ende an der Peripherie wollen wir ein Perpendikel AH aufrichten, und es so weit verlängern, bis es die verlängerte CE irgendwo, hier in H, schneidet, so heißt die AH die **Tangente des Bogens** AE, oder des Winkels ACE, der durch diesen Bogen gemessen wird. Eine gerade Linie also, die den Cirkel in dem Punkte berührt, wo der Bogen, welcher den Winkel mißt, seinen Anfang nimmt, und auf dem Radius senkrecht steht, und von dem andern verlängerten Radius, welches der andere Schenkel desselben ist, geschnitten wird, eine gerade Linie, die in solcher Lage und Stellung zwischen diesen beyden Radiis ist, heißt die Tangente dieses Winkels, oder auch des Bogens, der diesen Winkel mißt. Der Triangel ACH ist rechtwinklicht, und man kann nun, wie man leicht einsieht, in jedem rechtwinklichten Triangel, wenn man eine Seite als CA, die an den rechten Winkel anstößt, als den Radius ansieht, die andere HA als die Tangente des Wins-

Fig. 255.

kels HCA betrachten. Betrachtete man in einem solchen rechtwinklichten Triangel AH als einen Radius, so wäre CA die Tangente von CHA. Denn wenn man in H den Cirkel setzte, so ließe sich allerdings, wenn man HA als den Radium annähme, ein Cirkel ziehen, welcher den Punkt A berührte, und wo also der Winkel durch AH und einen Theil von AC bestimmt wird. Der verlängerte Radius CH, welcher die Tangente AH schneidet, und dessen Länge durch die Tangente AH, wo sich diese beyden Linien begegnen oder schneiden, bestimmt wird, also CH heißt die Secante dieses Bogens AE, oder des Winkels ECA.

Das Complement dieses Winkels ECA zu 90 Graden ist hier Winkel ECF. Wenn man an den Punkt F auf eben die Art, wie an den Punkt A, eine Tangente zieht, so wird dieses die FG seyn, welches die Tangente von FCF ist, sie heißt auch die Cotangente des Winkels ECA, und nimmt man diese für die Tangente an, so wird die AH ihre Cotangente seyn. Die CG, deren Größe durch diese Cotangente FG, welche sie irgendwo schneiden muß, hier in G bestimmt wird, ist die Secante des Winkels ECF, oder des Bogens EF, oder sie heißt in Betrachtung des Winkels ECA, weil dieser durch ECF zu 90° ergänzt wird, die Cosecante des Winkels ECA, oder des Bogens AE, und sähe man CG als die Secante an, so wäre CH die Cosecante, wie sich dieses alles leicht begreifen läßt.

Wenn

Wenn man allgemein einen Winkel A nennt, so schreibt man diese Namen Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante, also Tang. a; Cot. a; Sec. a; Cosec. a.

§. 460. Wenn man Fig. 255 den Winkel ECA, der kleiner als 90° ist, weiter betrachtet, und den Punkt E, also die Linie EC, sich weiter nach A oder weiter nach F bewegen läßt, so sieht man leicht auf den ersten Fall, daß er Winkel kleiner, und auf den andern Fall, daß er größer wird, in A selbst wird der Winkel = Null, und in F = 90°. So wie der Winkel abnimmt, rückt auch H nach A zu, und die Tangente AH nimmt ab, und wird kleiner, eben wie es in den Sinussen geschahe; so wie der Winkel größer wird, oder E nach F rückt, nimmt die Tangente AH zu, und wird größer. Die Linie AH verändert dabey bey unserer Zeichnung ihre Lage nicht, sondern berührt den Winkel immer senkrecht auf CA. Ist endlich E in F gekommen, und also der Winkel ACF = 90°, also der Bogen AF ein Quadrant, so ist, weil FC senkrecht auf AC, wie auch AH senkrecht auf AC ist, die verlängerte EC, welche nun in FC liegt, mit AH parallel, sie wird sie also niemals schneiden können, so sehr sie auch verlängert wird, und die Tangente für 90° wird also **unendlich**.

Die Cotangente FG wächst aber, so wie der Winkel abnimmt, und wird er in A = Null, so wird sie = unendlich. Sie nimmt ab, so wie

der Winkel zunimmt, und wird = Null, wenn der Winkel 90° erreicht hat, und die Tangente unendlich geworden ist.

Die Secante CH wächst gleichfalls, so wie der Winkel wächst, oder E nach F rückt, und wird **unendlich**, wenn der Winkel 90° erreicht hat; sie nimmt ab, wenn der Winkel abnimmt, indem der schneidende Punkt H immer näher nach A rückt. Wird der Winkel Null, oder verschwindet der Bogen AE, so fällt endlich die Secante mit dem Radius AC, dem sie in ihrer Lage immer näher kam, zusammen, und wird selbst der Radius.

Die Cosecante CG nimmt ab, so wie der Winkel wächst, indem der Punkt G immer weiter nach F rückt, sie kömmt selbst in FC zu liegen, oder wird = Radio, wenn der Winkel 90° erreicht hat. So wie aber der Winkel abnimmt, wächst die Cosecante, und ist der Winkel Null, oder verschwindet AE, so wird sie **unendlich**.

§. 461. Diese Betrachtungen für die Tangenten und Secanten waren für Winkel von Null bis 90 Grad. Die Ordnung bringt uns auf stumpfe Winkel, die über 90° bis 180° gehen. Bey diesem stumpfen Winkel läßt sich ein spitzer Nebenwinkel gedenken, welcher den stumpfen Winkel zu 180° ergänzt, und beyde, sowol der stumpfe Nebenwinkel als der ihn zu 180° ergänzt, haben Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten von

einer-

einerley Größe, nur daß die Tangenten, Cotangenten und Secanten eine entgegen gesetzte Lage haben.

Es wachse der Bogen AE über 90°, welches geschieht, wenn die CE sich über FC weg bewegt, sie mag bis in K gekommen seyn, und man verlängere nun die CK unbestimmt.

Die Linie AH bleibt unverändert in ihrer vorigen Lage; wir wissen nun, daß der Tangens durch den einen verlängerten Radius, der ihn schneidet, bestimmt wird, und daß auch hieraus die Secante entsteht, aber die AH kann nun nicht mehr von CK geschnitten werden, indem diese Linien schon in FC parallel liefen, und nun sich immer weiter von einander entfernen. Man verlängere aber nun die CK rückwärts unbestimmt, wie auch die AH, alsdenn werden sich diese Linien irgendwo, hier in h, schneiden, und die Ah heißt alsdenn die Tangente des stumpfen Winkels ACK. Diese Ah ist aber eben so groß, als die AH, welche die Tangente von ACE war. Wenn wir das beweisen können, so ist es auch richtig, daß Winkel, die einander zu 180° ergänzen, oder stumpfe und spitze Nebenwinkel, die beyde 180° ausmachen, einerley Tangente in Ansehung der Größe haben.

Wir setzen jetzt hier zum voraus, daß der Winkel ACE und ACK einander zu 180° ergänzen, oder zusammen 180 Grad ausmachen. Ist das, so ist der Winkel KCB = ACE, denn wenn ACE + ACK = 180°, und ACK + KCB

= 180, so ist gewiß ACE = KCB. Aber es ist auch ACD = KCB, weils Verticalwinkel, und also ACD auch = ACE. Nun finden sich in den Triangeln ACH und ACh die gleichen Winkel ACE und ACD; ferner die gleichen rechten Winkel bey A; endlich die gleiche Linie, die beyden gemein ist, AC, und an derem Ende beyde Winkel liegen. Die Triangel ACH und ACh sind also einander gleich und ähnlich, oder kongruent, folglich AH = Ah, und CH = Ch. Wir konnten diese Voraussetzung, daß ACE und ACK einander zu 180 ergänzen, auch machen. Denn es läßt sich doch allezeit in einem stumpfen Winkel noch ein spitziger zeichnen, der ihn zu 180 ergänzte, weil der doch kleiner als der stumpfe ist.

Ah war die Tangente, und Ch die Secante des stumpfen Nebenwinkels, die ein spitzer zu 180 ergänzte. Folglich Winkel, die einander zu 180 Grad ergänzen, haben einerley Tangenten und Secanten, nur mit dem Unterschiede, die Lage ist entgegen gesetzt, denn sowol Ah als Ch liegen auf der entgegen gesetzten Seite von AB. Wenn also AH und HC positiv genommen wird, so ist Ah und Ch negativ.

Die Cotangente dieses stumpfen Winkels ACK ist die Fg, und diese ist gleichfalls mit der Cotangente FG des spitzen Winkels GCA, der mit dem stumpfen 180 zusammen ausmachte, gleich, oder fg = FG. Denn nach unserer Voraussetzung war der Winkel ACG = KCB, wie wir eben gehabt haben. Da nun auch der Win-

kel

sei ACF = FCB = einem Rektus, so muß ACF — ACG = FCB — KCB, oder FCK = ECF seyn. Nun sind in den Triangeln GCF und gCF, also die Winkel FCK und ECF gleich. Ferner bey F Rekti und FC kömmt beyden zu, also sind beyde Triangel kongruent, folglich FG = fg, und CG = cg.

Fg war der Cotangens des stumpfen Winkels ACK, und Cg sein Cosecans, also ist auch der Satz richtig, daß Cotangenten und Cosecanten der Winkel, welche einander zu 180° ergänzen, gleich sind. Allein die Lagen der Cotangenten FG und fg sind entgegen gesetzt, weil beyder Scheidung bey F ist. Ist also der Cotangens FG des spitzen Nebenwinkels positiv, so wird Fg negativ, obschon beyde gleich sind. Mit den Cosecanten CG und Cg ist es nicht also, sie liegen beyde auf einer Seite des Durchmessers AB, und haben also einerley Zeichen.

Das vorzügliche, was uns aus diesem § merkwürdig ist, ist, daß der Tangens, Cotangens, Secans und Cosecans eines stumpfen Winkels mit eben diesen Linien des Nebenwinkels, der ihn zu 180° ergänzt, einerley Größe haben.

§. 462. Wir haben §. 461 gesehen, daß die Tangente unendlich wurde, wenn der Bogen oder Winkel 90° erreicht hatte, so wie er über 90 Grade kam, wurde die Tangente negativ, und nahm auch ab, denn bey 90° war sie unendlich. So wie nun der stumpfe Winkel größer wird,

oder sich 180° mehr nähert, wird die Tangente immer kleiner, denn das Complement zu 180° wird immer kleiner, und mit dem ist sie doch einerley. So wie der Winkel oder Bogen 180° erreicht hat, ist die Tangente Null, denn nun ist gar kein Complement mehr. Der Punkt h nähert sich also immer mehr nach A, und fällt endlich damit zusammen. Wird der Bogen größer als 180°, oder rückt K über B weg, und der Winkel ACN also erhaben wird, so fällt der Durchschnittspunkt H der Tangente dieses erhabenen Winkels wieder oberhalb A, die Tangente wird also wieder positiv, und nimmt zu. Hat K den dritten Quadranten in L erreicht, oder ist der Bogen oder der erhabene Winkel = 270°, so wird die Tangente wieder unendlich; wächst der Bogen und erhabene Winkel über 270°, so ist die Tangente wieder negativ, nimmt ab, und wird bey 360° = Null.

Die Tangente ist also in dem ersten und dritten Quadranten positiv, und nimmt zu; in dem zweyten und vierten negativ, und nimmt ab, und wird bey 180° und 360° = Null.

Eben so geht es mit der Secante, sie wird zweymal unendlich in den vier Quadranten, wo es die Tangente wird, und geht durchs Negative und Positive, und sie wird auch zweymal gleich dem Radius, wenn die Tangente o wird.

Die Cosecante war bey o Grad unendlich, nimmt ab, und wird = Radio, wenn der Bogen 90° erreicht hat; wird negativ, und wächst, wenn

wenn der Bogen über 90° kömmt, und wird bey 180° = ∞; wird positiv und nimmt ab, bis der Bogen den dritten Quadranten oder 270° erreicht hat, und wird alsdenn = 0; wird wieder negativ, und nimmt zu, wenn der Bogen wächst, bis sie bey 360°, da die Tangente 0 wird, wieder ∞ ist. Was also die Zeichen anbetrift, so sind der Tangenten und Cotangenten ihre in den verschiedenen Quadranten einerley.

Die Cosecante war unendlich, wenn der Winkel und Bogen = Null war; sie war positiv, aber nahm ab, bis der Bogen = 90°, da wurde sie = Radius; sie blieb positiv, nahm aber zu, wenn der Bogen und Winkel über 90 Grad wuchs, und wurde bey 180° = unendlich; sie wird negativ, wenn der Bogen über 180 Grad wuchs, und nimmt ab, und wird bey 270° = r; sie blieb negativ, nahm aber zu, und wurde unendlich, wenn der Bogen 360 Grad erreicht hatte.

Wir werden in unsern folgenden Betrachtungen nur wenig mehr von der Secante und Cosecante haben, weil wir die trigonometrischen Aufgaben und Betrachtungen auch ohne sie auflösen können.

Wir bemerken noch das, was aus allen diesen Betrachtungen sehr klärlich folgt, daß Winkel, die einander zu 360° ergänzen, gleiche große, aber entgegen gesetzte Tangenten und Cotangenten haben, und man also sie allezeit finden kann, wenn auch beyde Winkel stumpf wären, da uns denn die Betrachtung, daß stumpfe, daß

spitze

spitze Winkel einerley Tangenten der Größe nach haben, zu Hülfe kömmt.

Ueberhaupt werden wir nur die Tangenten und Cotangenten eines Quadranten, so wie die Sinus und Cosinus desselben zu betrachten nöthig haben, um allen Aufgaben, die hier vorkommen werden, ein Genüge zu leisten, und haben wir die abstrakten Betrachtungen davon in den verschiedenen Quadranten nur zur Vorbereitung auf höhere Kenntnisse angeführt, daher wir auch nicht weitläuftig davon geredet haben.

Das zweyte Kapitel.

Von der Erfindung und Berechnung der trigonometrischen Linien, nebst dem Gebrauch der Tafeln.

§. 463.

Wir wissen, was die trigonometrischen Linien sind, es kömmt nun darauf an, daß wir sie finden lernen. Wenn man ein gewisses Maas annimmt, womit man sie vergleicht, so wird ihre Findung so viel heißen, als zu wissen, wie sie sich gegen dieses Maas in Ansehung ihrer Größe

vers

verhalten, oder wenn man dieses Maas in sehr viele Theile theilt, wie viel sie solcher Theile haben. Man hat zu diesem Maaße, womit man sie vergleicht, den Radius des Cirkels angenommen, und damit die andern trigonometrischen Linien gleichsam gemessen. Man begreift aus dem vorhergehenden, daß die Sinus und Cosinus alle kleiner als der Radius seyn müssen, daß aber die Tangenten ihn an Größe oft übertreffen werden. Doch ehe wir dieses weiter untersuchen, schicken wir erstlich einen Lehrsatz voraus, der uns in dem folgenden nützlich seyn wird. **Bey gleich großen Winkeln, aber in Cirkeln von verschiedener Größe, oder welches einerley ist, bey verschiedenen Radiis verhalten sich die trigonometrischen Linien, welche einerley Namen haben, als die Sinus, Cosinus, Tangens, Corangens ꝛc. gegen einander, wie die Radii.** Z. E. Fig. 258 die Winkel DCA und dca sollen von gleicher Größe seyn, ihre Sinus sind DE und de, die Radii CA und ca, die sehr verschieden sind, so verhalten sich die Sin. DE und de gegen einander, wie die Radii, oder DE: de = CA: ca, und so ist es mit allen trigonometrischen Linien. Diesen Satz wollen wir nun jetzt beweisen. Fig. 258.

Da alle Cirkel ähnliche Figuren sind, die nur der Größe nach verschieden sind, und sich also um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt in einander legen lassen, so sey das Fig. 259. Die Cirkel AHB und ahb haben das gemeinschaftli- Fig. 259.

che Centrum C; man ziehe durch C und durch einen Punkt E in der Peripherie eines dieser Cirkel eine gerade Linie EC, die man unbestimmt verlängert, so ist der Winkel eca und ECA gleich. Man lasse die Sinus dieser Winkel in beyden Cirkeln fallen, sie werden ef und EF seyn. Weil der Winkel eca = ECA, ferner bey f und F rechte Winkel, indem es Perpendikel auf dem Radius wie alle Sinus sind, also auch gleich, so ist $\triangle eCf \backsim \triangle ECF$, folglich ef : EF = Ce : CE, oder weil Ce und CE Radii beyder Cirkel sind, die Sinus verhalten sich, wie die Radii. Ferner aus eben diesen Gründen, weil $\triangle eCf \backsim \triangle ECF$. fC : FC = Ce : CE, oder die Cosinus verhalten sich, wie die Radii. da ist der Tangens des Winkels eCa, und DA der Tangens eben dieses Winkels DCA in den beyden verschiedenen Cirkeln. Die Winkel sind nun gleich, und bey a und A rechte Winkel, also $\triangle dCa \backsim \triangle DCA$, folglich da : DA = Ca : CA, oder die Tangenten verhalten sich auch, wie die Radii, auch gilt cd : CD = Ca : CA, oder die Secanten wie die Radii. Ferner da eCh und ECH einerley, oder vielmehr nur ein und eben derselbe Winkel sind, imgleichen bey h und H ein rechter Winkel, so ist $\triangle hCg \backsim \triangle HCG$, also hg : HG = Ch : CH, oder die Cotangenten verhalten sich, wie die Radii, imgleichen cg : CG = Ch : CH, oder die Cosecanten wie die Radii.

Wir hatten für die Cosinus fc : FC = Ce : CE, oder weil Ca und CA auch Radii sind,

fc

fc : FC = Ca : CA, also gilt auch:
fc : Ca = FC : CA oder Ca : fc = CA : FC

---

also auch Ca — fc : Ca = CA — FC : CA
oder af : Ca = AF : CA
oder af : AF = Ca : CA.

Das heißt, weil af und AF die Sinus versus der Winkel sind, auch die Sinus versus verhalten sich, wie die Radii bey gleichen Winkeln.

§. 464. Diese Betrachtungen gelten auch für Winkel, die über 90 Grad sind, weil ihre trigonometrischen Linien mit den Linien ihrer spitzen Nebenwinkel, die sie zu 180° ergänzen, gleich sind, nur bey dem Sinus versus muß man eine Ausnahme machen. Wir werden aber den hier eben nicht betrachten. Auch für Winkel und Bogen über 180° würden wir sie auch beweisen können, allein wir werden uns auch um diese hier nicht bekümmern.

§. 465. Wie groß oder wie klein nun die trigonometrischen Linien in einem Cirkel bey den verschiedenen Winkeln werden, kömmt auf die Größe des Winkels selbst an, wie wir auch schon gesehen haben, wenn wir dabey den Radius in Betrachtung ziehen. Sind die Cirkel verschieden, so müssen sie beym größern Radius um so viel mal größer seyn, als um so viel mal dieser größer als ein kleinerer Radius ist. Wenn z. E. die Radii zweyer Cirkel sich wie 1 : 2 verhielten,

so

so verhielten sich die Sinus von gleichen Winkeln, z. E. von 2° eben so, oder der Sinus von 20 Grad, der zu dem größern Radius 2 gehörte, wäre noch einmal so groß, als der Sinus von 20 Grad, der zum Radius 1 gehörte.

Theilte man nun ferner beyde Radios in gleich viele Theile ein, so würden auch die für jeden Radius zu gleichen Winkeln gehörige trigonometrische Linien gleich viele Theile haben, nur die Theile bey den trigonometrischen Linien zu dem größern Radius gehörigen wären größer, weil die Theile auf dem Radius selbst größer wären, der mit dem kleinern in gleich viele Theile der Zahl nach getheilt war.

Wenn uns also nur **eines** Cirkels Radius und trigonometrische Linien bekannt sind, (und wir werden unten zeigen, daß sie sich allgemein finden lassen) so können wir daraus die Größe der trigonometrischen Linien aller andern Cirkel finden, wenn uns ihr Radius bekannt ist. Oder wenn man überhaupt nur einen allgemeinen Radium angenommen hätte, da man den Radius als 1, oder auch als 100, 1000, 10000, ja so groß oder so klein, als man wollte, gesetzt hätte, ohne daß man nun bestimmt hätte, was diese 1, 100, 1000 ꝛc. in Ansehung des Maaßes bedeuten sollten, und man hätte nun die trigonometrischen Linien dieses idealischen Cirkels berechnet, so ließen sich dadurch die trigonometrischen Linien aller gegebenen Cirkel in Theilen des Radius finden, wenn ihre Radii gegeben wären, weil, wie

wir

wir gelernt haben, die trigonometrischen Linien sich bey gleichen Winkeln unter einander wie die Radii verhalten. Z. E. wir wollen mal annehmen, es seyn eines Cirkels, dessen Radius in 10000000 Theile getheilt seyn soll, trigonometrische Linien berechnet; um ganz deutlich zu seyn, wollen wir nur seines Sinus von 30° gedenken. Weil dieser nach §. 453 die halbe Chorde von 60° und die Chorde von 60° gleich dem Radius ist, so ist dieser Sinus also = ½ Radius, oder da hier der Radius = 10000000, so ist er also 5000000. Das geht uns nichts an, wie groß oder wie klein dieser Radius und diese Theile sind. Wir nehmen ihn immer von solcher Art Maas an, als das ist, was wir suchen, weil es nur eine idealische Größe ist, die allen möglichen Cirkeln zukömmt. Nun wollen wir einen Cirkel ziehen, dessen Radius 2 Schuh seyn soll, und nun durch unser Theorem §. 465 seinen Sinus von 30° suchen (ob wir schon diesen ganz leicht durch ½ Radius ausdrücken könnten, so wollen wir ihn doch Exempels halber hier suchen). Wir schlössen also, der Radius von 10000000 : Radius 2 = Sinus 30 Grad des ersten Radius : zum zu suchenden Sinus von 30 Grad des zweyten, oder 10000000 : 2 = 5000000 : x, also x = $\frac{2.5000000}{10000000}$ = 1, oder der Sinus 30° = 1 Fuß beym Radius von 2 Fuß.

Man hat nun wirklich die trigonometrischen Linien berechnet, und den Radius allgemein als eine Größe von gewissen Theilen angenommen,

davon wir weiter unten reden wollen. Jetzt kömmt es darauf an, daß wir zeigen, wie man das gemacht habe. Wir werden das nur kürzlich ausführen, und uns nicht auf alle Kunstgriffe, die man dabey hat anwenden müssen, einlassen. Es gehört dieses nicht für diese erstern Gründe, und man kann, wenn man vollständigere Ideen davon haben will, einen Karsten und andere nachlesen. Ueberdem wäre es auch unnöthig, diese Linien noch einmal zu berechnen, da sie schon ganz weitläuftig berechnet sind. Allein das, was wir davon sagen wollen, wird uns in mancherley Betracht bey trigonometrischen Rechnungen, auch in der angewandten Mathematik sehr nützlich seyn. Wir werden auch daraus sehen können, welche ungeheure Mühe die Erfinder in Berechnung dieser Linien anwenden mußten, da ihnen die Rechnung des Unendlichen noch unbekannt war, welche hier viele Vortheile und Abkürzungen verschaft.

§. 466. Wir fangen also an, hier Formeln oder Ausdrücke für die trigonometrischen Linien zu geben. Wir werden sehen, daß alle trigonometrischen Linien für jeden Winkel sich recht gut finden lassen, wenn der **Radius** und **Sinus** des Winkels bekannt ist. Die Sinus für alle Winkel müßte man also erst finden, und man findet sie auch, wie wir nachher zeigen werden, aus dem Radius. Ehe wir aber dieses thun, wollen wir sie vors erste als **bekannt** und gefun-

funden annehmen; wir wollen einen Winkel mit einem ganz allgemeinen Ausdrucke a nennen, und den Radius ganz allgemein r bezeichnen; unsere Formeln werden also ganz allgemein seyn.

§. 467. Wenn der Radius und Sinus eines Winkels gegeben sind, so läßt sich daraus der Cosinus finden. Er ist nemlich die Quadratwurzel aus der Differenz des Radius und Sinus. Es sey Fig. 255 der Winkel ECA = a, so ist IC sein Cosinus, EI sein Sinus, und EC Radius, also weil der Triangel ECI rechtwinklicht, so ist $IC^q = EC^q - EI^q$, oder in Zeichen $\text{cos. } a^2 = (r^2 - \text{sin. } a^2)$, also $\text{cos. } a = \sqrt{(r^2 - \text{sin. } a^2)}$.

Aus dem Cosinus findet man leicht den Sinus versus, denn AI oder Sinus versus vom Winkel ECI ist = AC − IC, oder in Zeichen, also Sinus versus a = r − cos. a. Doch vom Sinus versus haben wir hier wenig zu reden.

§. 468. Wenn man den Radius = 1 setzte, so käme anstatt r in der Formel für den Cosinus die 1 zu stehen, und alsdenn wäre cos. a $= \sqrt{(1 - \text{sin. } a^2)}$.

§. 469. Wenn anstatt des Sinus der Cosinus gegeben wäre, so ließe sich aus dem Cosinus und Radius auch der Sinus finden. Denn Fig. 255 wäre in dem rechtwinklichten Triangel

ECI alsdenn EC und IC bekannt, also ECq — ICq = Elq, oder in Zeichen $r^2 - \text{cos.}\ a^2 = \text{sin.}\ a^2$, also $\sqrt{(r^2 - \text{cos.}\ a^2)} = \text{sin.}\ a$. Nimmt man den Radius als 1 an, so wäre $\sqrt{(1 - \text{cos.}\ a^2)} = \text{sin.}\ a$. Wenn man aber $r = 1$ setzt, so muß man immer wohl bemerken, daß also alle Sinus und Cosinus Brüche von 1, oder kleiner als 1 sind. Davon weiter unten.

Wenn man diesen Betrachtungen weiter nachhängt, so wird man auch leicht einsehen, daß man nur die Sinus oder Cosinus bis 45° finden darf; alle Sinus und Cosinus, die über 45° bis 90°, sind leicht zu finden. Denn es ist uns bekannt, daß die Sinus unter 45°, die Cosinus aber über 45° sind, und so auch umgekehrt.

Exempel: Es sey $a = 30$ Grad, also ist Sinus $a = \frac{1}{2}$ Chorde von 60 Grad $= \frac{1}{2}$ Radius, und also $\text{sin.}\ a^2 = \frac{1}{4} r^2$; folglich nach §. 467 $\text{cos.}\ a = \sqrt{(r^2 - \text{sin.}\ a^2)}$; hier also $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{(\frac{3}{4} r^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$; auch wenn also $\text{cos.}\ a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, so ist also nach §. 467 Sinus $a = \sqrt{(r^2 - \text{cos.}\ a^2)}$; hier $= \sqrt{(r^2 - \frac{3}{4}r^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4} r^2)} = \frac{r}{2}$ oder $= \frac{1}{2}$ Radius.

§. 470. Wenn der Sinus, folglich nun auch der Cosinus eines Winkels, nebst dem Radius bekannt ist, so läßt sich daraus die Tange-

te finden. Weil Fig. 255 aus schon oft ange. Figg führten Gründen die Triangel ECI und HCA 255. ähnlich sind, so folgt der Schluß:

$$CI : IE = CA : AH \text{ und in Zeichen}$$

$$\text{cos. a} : \text{sin. a} = r : AH$$

$$\text{oder } AH = \text{tang. a} = \frac{r \text{ sin. a}}{\text{cos. a}}$$

Nimmt man den Radius $= 1$, so war tang. a $= \frac{\text{sin. a}}{\text{cos. a}}$

Exempel: Man sucht die Tangente von 30°. Im vorigen § fanden wir sin. $30° = \frac{1}{2} r$; cos. $30° = \sqrt{\frac{3}{4} r^2}$, also ist tang. $a = \frac{r \text{ sin. a}}{\text{cos. a}}$; hier

$$= \frac{r \cdot \frac{1}{2} r}{\sqrt{\frac{3}{4} r^2}} = \frac{r^2 : \sqrt{3 r^2}}{2} = \frac{r^2 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3 r^2}} = \frac{r^2 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3 r^2}} = \frac{r^2}{r \sqrt{3}}$$

$= \frac{r}{\sqrt{3}}$; nähme man also den Radius z. E. $=$ 1000000, so wäre $\frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{1000000}{1,732050} =$

$\frac{1000000000000}{1732050}$ (nemlich Zähler und Nenner mit 100000 multiplicirt, um die Decimalbrüche wegzubringen) $= 577350{,}5$. Und so findet man auch den Tangens von 30 Graden in den gemeinen Tafeln. Ich nenne hier das Wort Tafeln früher, als wir selbige kennen. Ich zeige daher nur erst kurz an, daß sich Verzeichnisse der Größen der trigonometrischen Linien finden, wo der $r =$ 10000000, welche Tafeln heißen.

§. 471. Wenn die Tangente eines Winkels nebst dem Radius bekannt ist, so ist es leicht, die Cotangente zu finden Fig. 255. Der Cotangens des Winkels ECA ist die FG. Nun ist der Triangel HCA ∽ △GFC, denn FC ist parallel HA ex construct. also der Winkel AHC = dem Winkel HCF. Nun sind in beyden Triangeln bey A und F rechte Winkel, folglich sind auch die dritten Winkel FGC = HCA, also beyde Triangel einander ähnlich. Folglich ist nun folgende Proportion richtig:

AH : AC = CF : FG, oder in Zeichen

$$\text{tang. a} : r = r : \text{cot. a} \text{ und } \text{cot. a} = \frac{r^2}{\text{tang. a}}.$$

Nimmt man den Radius = 1, so ist cot. a $= \frac{1}{\text{tang. a}}$.

Exempel: Der Radius mag abermal 10000000 seyn, so ist $r^2 = 100,000000,000000$. Es mag a = 30° seyn, so wäre also cot. a der Tangens von 60°. Den Tangens von 30° fanden wir im vorhergehenden §, und der cot. 30° wäre also $\frac{1000000000000}{577350} = 17.320500$, welches man auch in den gewöhnlichen Tafeln für diesen cot. 30° findet.

§. 472. Wir haben noch die Secante und Cosecante übrig. Wir wollen doch die Formel für sie angeben, ob man sie schon bey den trigonometrischen Rechnungen eben nicht so oft gebraucht.

braucht. Man findet aus dem Radius und der Tangente eines Winkels die Secante, und aus dem Radius und der Cotangente die Cosecante. Fig. 255 ist CH die Secante des Winkels HCA. Da der Triangel HCA rechtwinklicht ist, so ist $HCq = HAq + ACq$, oder in Zeichen $sec.\ a^2 = tang.\ a^2 + r^2$, also $sec.\ a = \sqrt{(tang.\ a^2 + r^2)}$. Man kann aber eben diese Formel auch in Werthen des Cosinus und Radius ausdrücken. Denn tang. a war nach §. 470 $= \frac{r.\ sin.\ a}{cos.\ a}$, also tang.

$a^2 = \frac{r^2.\ sin.\ a^2}{cos.\ a^2}$; folglich dieses anstatt tang. a^2 in der Formel substituirt: $sec.\ a = \sqrt{\left(\frac{r^2.\ sin.\ a^2}{cos.\ a^2} + r^2\right)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{r^2\ sin.\ a^2 + r^2\ cos.\ a^2}{cos.\ a^2}\right)} = \sqrt{r^2}\left(\frac{sin.\ a^2 + cos.\ a^2}{cos.\ a^2}\right)$$

aber $sin.\ a^2 + cos.\ a^2 = r^2$, (siehe die Figur, wo $Elq + lCq = r^2$) also sec. a

$$= \sqrt{\frac{r^2 . r^2}{cos.\ a^2}} = \sqrt{\frac{r^4}{cos.\ a^2\ cos.\ a^2}} = \frac{r^2}{cos.\ a^2} = sec.\ a.$$

Man hätte diese letztere Formel für die sec. a auch noch weit kürzer durch die Proportion finden können, denn weil Fig. 255 der Triangel ECI ∽ ΔHCA, so gilt:

CI : CE = CA : CH, oder in Zeichen

$\text{cos. a} : r = r : \text{sec. a}$, also $\text{sec. a} = \frac{r^2}{\text{cos. a}}$

ist der $r = 1$, so ist der Secans $a = \frac{1}{\text{cos. a}}$.

Die Cosecante findet man sowol durch die Cotangente, als auch durch den Sinus, nebst dem Radius. Es ist CG der Cosecans des Winkels HCA, weil nun der Triangel FCG rechtwinklicht ist, so ist $CGq = FCq + FGq$, oder in Zeichen $\text{cosec. a}^2 = r^2 + \text{cot. a}^2$, also $\text{cosec. a} = \sqrt{(r^2 + \text{cot. a}^2)}$, und wenn Radius $= 1$ gesetzt wird, so ist also $\text{cosec. a} = \sqrt{(1 + \text{cot. a}^2)}$.

Weil auch der Triangel FCG $\backsim$ △HCA §. 471
und △ECI $\backsim$ △HCA

so ist daher △ECI $\backsim$ △FCG.

Also gilt folgende Proportion:

EI : EC = FC : CG

oder in Zeichen $\text{sin. a} : r = r : \text{cosec. a}$, und $\text{cosec. a} = \frac{r^2}{\text{sin. a}}$. Ist Radius als 1 angenommen, so ist $\text{cosec. a} = \frac{1}{\text{sin. a}}$.

Wir sahen § 470, daß der $\text{tang. a} = \frac{r \cdot \text{sin. a}}{\text{cos. a}}$, der $\text{cotang. a} = \frac{r^2}{\text{tang. a}}$. Es heiße

nun

nun ein anderer Winkel in eben dem Cirkel allgemein b, so wird tang. $b = \frac{r \cdot \text{sin. } b}{\text{cos. } b}$ und cotang. $b = \frac{r^2}{\text{tang. } b}$.

Wenn man nun wissen will, wie die Tangenten oder Cotangenten zweyer verschiedener Winkel gegen einander sich verhalten, so darf man nur für sie selbst ihre Werthe setzen, wir wollen sie für die Cotangenten setzen. Also:

$$\text{cotang. } a : \text{cotang. } b = \frac{r^2}{\text{tang. } a} : \frac{r^2}{\text{tang. } b}$$

die beyden hintersten Glieder durch r^2 dividirt, so folgt

$$\text{cotang. } a : \text{cotang. } b = \frac{1}{\text{tang. } a} : \frac{1}{\text{tang. } b}.$$

Ferner die beyden hintersten Glieder multiplicirt mit tang. a.

$$\text{cotang. } a : \text{cotang. } b = 1 : \frac{\text{tang. } a}{\text{tang. } b}$$

$$\frac{\text{tang. } a}{\text{tang. } b}. \text{ tang. } b$$

$$\text{cotang. } a : \text{cotang. } b = \text{tang. } b : \text{tang. } a$$

Oder die Cotangenten zweyer verschiedener Winkel in einem Cirkel verhalten sich umgekehrt, wie die Tangenten. Auch dieser Satz dient zur Findung dieser Linien.

§. 473. Wir wollen die Ausdrücke für alle trigonometrische Linien nochmal in einer Tabelle wiederholen, welches wir daher thun, um sie desto besser uns einzuprägen, weil man sie oft in trigonometrischen Rechnungen gebraucht, sie sind:

	Wenn der Radius $= r$ gesetzt wird.	Wenn der Radius 1 gesetzt wird.
1)	$\sin.a^2 + \cos.a^2 = r^2$ aus der Natur der Sache.	$\sin.a^2 + \cos.a^2 = 1.$
2)	$\sqrt{(r^2 - \sin.a^2)} = \cos.a$ §. 467.	$\sqrt{(1 - \sin.a^2)} = \cos.a$
3)	$\sqrt{(r^2 - \cos.a^2)} = \sin.a$ §. 469.	$\sqrt{(1 - \cos.a^2)} = \sin.a$
4)	$\frac{r.\sin.a}{\cos.a} = \tang.a$ §. 470.	$\frac{\sin.a}{\cos.a} = \tang.a$
5)	$\frac{r^2}{\tang.a} = \cotang.a$ §. 471	$\frac{1}{\tang.a} = \cotang.a$
6)	$\sqrt{(\tang.a^2 + r^2)} = \sec.a$ §. 472.	$\sqrt{(\tang.a^2 + 1)} = \sec.a$
oder	$\frac{r^2}{\cos.a} = \sec.a$ §. 472.	$\frac{1}{\cos.a} = \sec.a$
7)	$\sqrt{(r^2 + \cotang.a^2)} = \cosec.a$ §. 472.	$\sqrt{(1 + \cotang.a^2)} = \cosec.a$
oder	$\frac{r^2}{\sin.a} = \cosec.a$ §. 472	$\frac{1}{\sin.a} = \cosec.a$

8) $\cotang\ a : \cotang.b = \tang.b : \tang.a$ §. 473.

Da dieses alles Gleichungen für die trigonometrischen Linien sind, so sieht man leicht ein, daß man durch die Multiplikation und Division und Substitution noch viel mehr Formeln für die trigonometrischen Linien finden kann, welches ein jeder, der die Arithmetik wohl begriffen hat, leicht selbst thun wird, und überhaupt, wenn der Radius bekannt ist, und noch zwey trigonometrische Linien gegeben sind, kann man daraus die dritte, welche man will, finden, wie dieses aus den ähnlichen Dreyecken der Figur 255 selbst erhellt. So finden wir z. E. in 5) $\frac{r^2}{\text{tang. a}} =$ cotang. a; folglich $r^2 =$ cotang. a . tang. a oder $\frac{1}{\text{tang. a}} =$ cotang. a, also $1 =$ tang. a . cot. a

u. s. w.

§. 474. Alle diese Betrachtungen setzten nun zum voraus, daß uns der Radius und Sinus der Winkel bekannt waren. Den Radius konnten wir allgemein annehmen, nun kömmt es noch darauf an, wie wir daraus die verschiedenen Sinus der Winkel fanden. Wir sind nicht willens, alle die Kunstgriffe und Mittel zu betrachten, die man anwenden kann, und wirklich angewendet hat, den Werth der Sinuum in Werthen des Radius zu finden. Wir wollen nur einige davon erklären, woraus man doch alle Sinus finden könnte, und welche Betrachtungen

uns

uns auch noch zu vielen andern Dingen nützlich seyn können.

§. 475. Den Sinus von 30° wissen wir, er ist = ½ r nach §. 453. Den Sinus von 45° können wir auch leicht finden, er ist = $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ = sin. 45°, und so groß ist auch sein cos. weil er ihm gleich ist. Daß er aber diesen Werth habe, beweisen wir also: Es sey Fig. 260 der Winkel ECA = 45°, also EI sein Sinus. Folglich ist nun ECG auch 45°, und CG der cos. 45° = EI, denn weil DCA = 90° und ECA = 45°, so muß der Nebenwinkel, der ihn zum Recto ergänzt, auch 45° seyn. Wir wissen nun auch aus §. 453, daß der Sinus die Hälfte der Chorde eines nochmal so großen Winkels ist. Der Sinus oder cos. 45° wird also die Hälfte der Chorde von 90° seyn. Man ziehe in dem andern Quadranten DCB Fig. 260 diese Chorde DB, so ist in dem rechtwinklichten Triangel DCB, DCq + CBq = DBq, oder in Zeichen $r^2 + r^2 = DBq$, folglich $2r^2 = DBq$ und $r \cdot \sqrt{2} = DB$. Die Hälfte dieser DB oder DH ist nun = sin. 45° = EI, also $\frac{r \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{DB}{2} = EI = \text{sin. } 45°$. Nimmt man nun den Radius = 10000000 an, so wird sin. 45° = 7071067, nimmt man den Radius = 1 an, so ist sin. 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, oder $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ =

Fig. 260.

$= \frac{1,41421356...}{2} = 0,70710678...$ Da sin. 45°

$= \frac{r\sqrt{2}}{2}$ = dem cosin. 45° und tang. 45° = $\frac{r}{\text{cos. } 45°}$

r. sin. 45° nach §. 470, so ist also, die gefundenen Werthe von sin. 45° gehörig substituirt, tang. 45° $= \frac{r.r.\sqrt{2}}{2} : \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{2} . \frac{2}{r\sqrt{2}} = r$, oder gleich dem Radius. Eben so groß ist auch der Cotang. 45°, wie aus der Formel für den Cotangens und der Natur der Sache selbst erhellt.

Mehr Sinus hätte man nun nicht nöthig, um alle andere zu finden, als Sinus 30° und Sinus 45°, welche wir schon wissen. Man könnte noch dazu den Sinus 36° nehmen, welches die halbe Chorde von 72°, also die halbe Seite des Fünfecks seyn wird §. 198, welche, wenn der Radius = 10000000, gleich seyn wird 5877853. Man wird nun die Sinus aller einzelnen Minuten, ja wenn man will, Secunden des Quadranten berechnen können. Aber man muß alsdenn noch einige Lehrsätze wissen und gebrauchen können, welche wir nun gleich anführen und erklären werden.

§. 476. **Wenn die Sinus zweyer Winkel, als Fig. 261 der Winkel ACD und ACF, gegeben sind so läßt sich daraus der Sinus ihrer Differenz finden.** Fig. 261.

Z. E.

z. E. wenn der eine Winkel 45°, der andere 30° hätte, so läßt sich aus dem Sinus von 45° und 30° auch der Sinus von 45° — 30° finden.

Es heiße Fig. 261 der Radius CA = r.
Der Winkel DCA heiße a.
Der Winkel FCA heiße b.
Der Sinus des Winkels DCA, welches die DE, heiße m, sein cos. CE heiße μ.
Der Sinus des Winkels FCA, welches die FH, heiße S, sein cos. HC heiße σ.

Nun ist zwischen beyden Winkeln DCA und FCA der Winkel der Differenz, oder der Winkel, um welchen sie beyde in Größe verschieden sind, der Winkel FCD. Wenn man von F ein Perpendikel auf DC, welcher auch Radius ist, fallen läßt, so wird FG der Sinus des Winkels der Differenz, und GC der Cosinus dieses Winkels. Es heiße nun also die FG, oder der Sinus der Differenz beyder Winkel d, und der Cosinus der Differenz, oder die CG = δ. Gegeben ist nun r, S, also auch σ, imgleichen m, also auch μ. Man sucht d, woraus δ sich von selbst findet, oder man sucht die FG.

Weil DE parallel HK, indem bey E und H rechte Winkel, so ist $\triangle$CHK $\backsim$ $\triangle$CED, man kann also schließen: CE:ED = CH:HK, und in den gegebenen Zeichen μ:m = σ:HK, also $HK = \frac{m\sigma}{\mu}$,

ferner

ferner CE : CD = CH : CK, oder in Zeichen

$$\mu : r = \sigma : CK, \text{ also } CK = \frac{r\sigma}{\mu}.$$

Wenn wir ferner den Sinus von FCA die FH betrachten, so ist FH = FK + KH, also

$$FH - KH = FK$$

oder in Zeichen $S - \frac{m\sigma}{\mu} = FK$

unter einerley Benennung $\frac{\mu S - m\sigma}{\mu} = FK.$

Nun ist ferner △FGK ∽ △KHC. Denn bey G und H sind Rekti, und die Verticalwinkel bey K gleich. Folglich gilt:

CK : HC = FK : FG, oder in den gefundenen Zeichen $\frac{r\sigma}{\mu} : \sigma = \frac{\mu S - m\sigma}{\mu} : FG$, und

FG wäre also $\frac{(\mu S - m\sigma) . \sigma}{\mu} : \frac{r\sigma}{\mu} = \frac{(\mu S - m\sigma) . \sigma}{\mu}$

$: \frac{\mu}{r\sigma} = \frac{(\mu S - m\sigma)\,\sigma}{r\sigma} = \frac{\mu S - m\sigma}{r} = FG$, oder dem gesuchten Sinus der Differenz beyder Winkel = d, oder wollte man dieses mit Worten ausdrücken:

$$\frac{\text{cos. a . sin. b} - \text{sin. a . cos. b}}{\text{rad.}}$$

Aus dem Sinus der Differenz läßt sich nun auch der Cosinus der Differenz finden, wie wir schon §. 467 überhaupt gesehen haben. Setzt man den Radius = 1, so wird der Sinus der Differenz = $\mu d - mc$.

Exempel: Man habe den Sinus von 30° und 45°, man sucht die Sinus der Differenz = 45 — 30, oder von 15°. Hier ist m = sin. 30°, S = sin. 45°, μ = cos. 30°, σ = cos. 45°, und r sey = 10000000, also μS würde seyn cos. 30°. sin. 45°, davon zöge man ab sin. 30°. cos. 45°, und dividirte die Differenz durch 10000000, so hätte man den Sinus von 15°, oder die FG = d. Die Sinus und Cosinus dieser Winkel wissen wir aus §. 453, 475, nur ist die Rechnung etwas mühsam wegen der Multiplikation der vielen Zahlen mit einander; doch kann sie sonst jeder unserer Leser, wer dieses nicht scheuet, anstellen.

§. 477. Fig. 261. Es sey gegeben die DE, oder der Sinus des Winkels DCA, ferner die FG, oder der Sinus des Winkels FCD. Diese beyden Winkel zusammen machen den Winkel FCA aus, dessen Sinus FH ist. Also ist FH der Sinus der Summe beyder Winkel. **Es läßt sich nun auch aus den Sinussen zweyer Winkel der Sinus der Summe beyder Winkel finden.**

Es sey der Winkel DCA = a
der Winkel FCD = b

der Sinus von DCA, oder die DE = m
sein Cosinus, oder die CE = μ
der Sinus von FCD, oder die FG = d
sein Cosinus, oder die CG = δ

} bekannt oder gegeben, und wenn die Sinus gegeben sind, so sind auch die Cosinus bekannt.

der Sinus von FCA, oder der
Sinus der Summe die FH = S
sein Cosinus die CH = σ
} wird gesucht.

Weil die Triangel CHK und FGK ähnlich sind, denn bey K sind Vertical- und bey G und H rechte Winkel, so folgt folgender Schluß:

CH : CK = FG : FK, oder in Zeichen

$\sigma : \frac{r\sigma}{\mu} = d : FK$

die CK kannten wir aus vorhergehendem Paragr.

also $FK = \frac{dr\sigma}{\mu\sigma} = \frac{dr}{\mu}$.

Aus eben dem Grunde als bey dieser Proportion gilt auch:

CH : HK = FG : GK, oder in Zeichen

$\sigma : \frac{m\sigma}{\mu} = d : GK$

HK kannten wir auch aus vorigem Paragraphen

also $GK = \frac{md\sigma}{\mu\sigma} = \frac{md}{\mu}$.

Nun ist ferner CK = CG − GK aus der Figur und in Zeichen $CK = \delta - \frac{md}{\mu} = \frac{\mu\delta - md}{\mu}$.

Weil auch aus Gründen im vorigen Paragraphen

$\triangle CDE \backsim \triangle CKH$

$CD : DE = CK : KH$, oder in Zeichen

$$r : m = \frac{\mu d - md}{\mu} : KH$$

$$\text{also } KH = \frac{(\mu d - md)\, m}{r\mu}$$

Nun haben wir alle Werthe für FH oder S, welches wir suchten. Denn da $FH = FK + KH$, also in Zeichen $\frac{dr}{\mu} + \frac{(\mu d - md)\, m}{r\mu}$ einerley Benennung gebracht $= \frac{drr + (\mu d - md)\, m}{r\mu}$

$$= \frac{drr + \mu md - mmd}{r\mu} = \frac{(rr - mm)\, d + \mu md}{r\mu}$$

$= FH$. Dieses wäre nun die Formel für den Sinus der Summe für die $FH = S$. Allein er läßt sich auch schicklicher und kürzer ausdrücken. Weil $DC = r$ und $DE = m$, so ist, da der Triangel DCE rechtwinklicht, $DCq - DEq = ECq$, oder in Zeichen $rr - mm = \mu\mu$, denn EC ist auch gegeben. Diese $\mu\mu$ in die Gleichung anstatt $(rr - mm)$ substituirt, giebt nun $FH = \frac{\mu\mu d + \mu m\delta}{r\mu} = \frac{\mu d + m\delta}{r} = S$ oder $=$ dem Sinus aus der Summe beyder gegebenen Winkel.

Mit Worthen ausgedrückt wäre die Formel: Sinus der Summe für die Winkel $a + b$ ist $= \frac{\text{cos. a. sin. b} + \text{sin. a. cos. b}}{\text{rad.}}$

Ist

Ist der Radius = 1 gesetzt, so wird aus der Formel folgende $S = \mu d + m\delta$. Wenn nun z. E. der Sinus 30° und Sinus 45° bekannt ist, so läßt sich daraus der Sinus $30° + 45° = \text{sin. } 75°$ finden. Wenn man, wie die Formel anzeigt, verfährt, denn wäre hier $a = 30$ und $b = 45$.

Wir könnten nun auch noch wol zeigen, wie man auf eine ähnliche Art die Cosinus der Differenz zweyer Winkel, oder auch die Cosinus der Summe fände, imgleichen auch die Tangenten und Cotangenten fände; allein uns genüget, es von den Sinussen gelehrt zu haben, weil man doch aus den Sinussen die Cosinus, und aus beyden die Tangenten und Cotangenten finden kann. Wer hievon mehr nachlesen will, den verweisen wir unter andern auf Herr Hofrath Kästners Mathem. 1sten Th. S. 376 ꝛc. der zweyten Ausgabe, welche ihn weiter unterrichten wird.

§. 478. Aus dem Sinus eines Winkels a läßt sich nun auch der Sinus eines Winkels, der doppelt so groß ist, oder des Winkels 2a finden. Wir können dieses leicht aus dem vorhergehenden Paragraphen herleiten. Wir fanden, es war der Sinus der Summe zweyer Winkel, oder Sinus $(a + b) = \frac{\text{cos. a . sin. b} + \text{sin. a . cos. b}}{\text{rad.}}$. Nun wird, weil beyde Winkel gleich seyn sollen, $a = b$, also anstatt b die a allerwärts substituirt, so wird

$\sin. a + b = \sin. (a + a)$ oder $\sin. 2a = \cos. a . \sin. a + \sin. a . \cos. a = \frac{2\sin. a . \cos. a}{\text{rad.}}$,
rad.
oder wenn Radius $= 1$, so ist $\sin. 2a = 2\sin. a . \cos. a$. Hätte man also z. E. den Sinus 36°, oder die halbe Seite des Fünfecks gefunden §. 475, so ließe sich nun leicht der Sinus von 72° angeben, woraus man denn schon nach den vorher ausgeführten Betrachtungen noch mehrere Sinus und Cosinus, und andere trigonometrische Linien berechnen könnte.

§. 479. **Es läßt sich aber auch gleichfalls aus einem gegebenen Sinus eines Winkels der Sinus eines halb so großen Winkels finden.** Da jeder Sinus eines Winkels die halbe Chorde eines nochmal so großen Winkels ist §. 453, so wird es bey dieser Aufgabe nur darauf ankommen, daß wir die Chorde eines Winkels in Ausdrücken des Sinus oder Cosinus finden, von welchen uns der Sinus gegeben ist, um alsdenn auch die halbe Chorde zu bestimmen, welches der Sinus des halben gegebenen Winkels seyn wird. Es sey nun Fig. 262 des Winkels DCA Sinus die DE gegeben, so ist sein Cosinus EC nach §. 467 auch bekannt. Es heiße dieser Winkel $DCA = a$, so ist also $DE = \sin. a$, und $EC = \cos a$. Die Chorde dieses Winkels sey DA, sie ist durch den Radius FC in G in zwey gleiche Theile getheilt, folglich

Fig. 262.

der Bogen DF = FA, imgleichen DG = GA, und beyde Winkel für diese Bogen gleich, und jeder die Hälfte des gegebenen Winkels, welchen die ganze Chorde spannt. Wir wollen dann den Winkel DCF betrachten, also DCF = $\frac{1}{2}$ DCA = $\frac{1}{2}$ a. Der Sinus von DCF ist die DG, denn bey G sind rechte Winkel, also DG = Sinus $\frac{1}{2}$ a. Wenn wir für AD einen Werth gefunden haben, so wissen wir ihn auch für DG, weil DG = $\frac{1}{2}$ AD ist.

Weil DE = Sinus a, so sind bey E rechte Winkel, also DEq + EAq = DAq, aber EA ist = CA — EC, und in Zeichen r — cos. a, also nun DAq in Zeichen. So ist also sin. a^2 + $(r - \text{cos. a})^2$ = DAq, nun ist $(r - \text{cos. a})^2$ = $(r - \text{cos. a}) \cdot (r - \text{cos. a}) = r^2 - 2r \cdot \text{cos. a} + \text{cos. a}^2$, also sin. $a^2 + (r - \text{cos. a})^2 = \text{sin. } a^2 + r^2 - 2r \cdot \text{cos. a} + \text{cos. } a^2 = DAq$. Allein nach §. 473 und daselbst nach 1 ist sin. $a^2 = r^2 - \text{cos. } a^2$. Das anstatt sin. a^2 substituirt, giebt also $r^2 - \text{cos. } a^2 + r^2 - 2r \cdot \text{cos. a} + \text{cos. } a^2 = DAq = 2^2 - 2r \cdot \text{cos. a} = DAq = (r^2 - r \cdot \text{cos. a}) \cdot 2 = DAq$, also $\sqrt{(r^2 - r \cdot \text{cos. a}) 2)} = DA$, folglich $\frac{\sqrt{(r^2 - r \cdot \text{cos. a}) 2)}}{2} = \frac{DA}{2} = \frac{1}{2} DA$, oder weil $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, so ist $\frac{1}{2} DA = \frac{\sqrt{(r^2 - r \cdot \text{cos. a}) 2)}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(r^2 - r \cdot \text{cos. a})}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{\frac{(r^2 - r \cdot \text{cos. a})}{2}} = \frac{1}{2} DA = DG$ oder = sin $\frac{1}{2}$ a.

Wenn der Radius = 1 genommen wird, so ist daher sin. $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(1 - \text{cos. } a)}{2}}$. Aus dem Sinus läßt sich nun der Cosinus leicht finden, denn weil GC = cos. DCF = cos. $\frac{1}{2}a$, imgleichen bey G rechte Winkel, so ist $GCq = DCq - DGq$, und in den gefundenen Zeichen $GCq = r^2 - \sqrt{\frac{(r^2 - r \text{ . cos. } a)^2}{2}} = r^2 - \frac{(r^2 - r \text{ . cos. } a)}{2} = \frac{2r^2 - r^2 + r \text{ . cos. } a}{2} = \frac{r^2 + r \text{ . cos. } a}{2} = GCq$, also $GC = \sqrt{\frac{(r^2 + r \text{ . cos. } a)}{2}} = \text{cosin. } \frac{1}{2}a$. Ist $r = 1$ gesetzt, so ist also cosin. $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(1 + \text{cos. } a)}{2}}$.

Exempel: Man hatte den Sinus von 15 Grad, man sucht den Sinus der Hälfte, oder Sinus von 7° 30′, so wäre also $a = 15°$. Wenn nun $r = 10000000$ angenommen wäre, so wäre sin. $\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(r^2 - r \text{ . cos. } a)}{2}}$, hier $=$ sin. 7° 30′ $= \sqrt{\frac{(100000000000000 - 96592580000000)}{2}}$.

1,4142.....

Wenn man die beyden Größen des Zählers von einander abgezogen hat, und alsdenn den quadratischen Radix daraus zieht, und diesen herausgezogenen Radix durch 1,4142...., welches

ches der $\sqrt{2}$ ist, dividirt, so wird man 1305262 zum Quotienten bekommen, welches auch in den Tafeln der Sinus 7° 30′ ist.

§. 480. Wir haben nun gezeigt, wie man aus zwey gegebenen Sinussen den Sinus der Summe und der Differenz, aus einem Sinus den Sinus des doppelten und halben Winkels finden könne, und das mag für diese Betrachtungen genug seyn. Wir könnten sonst noch verschiedene wichtige Betrachtungen anstellen, wie man z. E. aus einem gegebenen Sinus den Sinus des dreyfachen, vierfachen, fünffachen und allgemein nfachen Winkels finden kann. Aber diese Betrachtungen scheinen mir zu schwer für solche Leser zu seyn, für welche diese Schrift bestimmt ist. Man wird sich hierüber in ausführlicheren Abhandlungen, wenn man will, Raths erholen, welche man hoffentlich nun verstehen wird. Diese Betrachtungen, die auch zugleich auf manche andere Art recht nützlich sind, sind zureichend, einigen Begrif zu geben, wie man es angefangen hat, die Sinus, und aus den Sinussen die Tangenten zu berechnen, da man denn manche Vortheile und Kunstgriffe noch bey der Arbeit gefunden, worunter auch mit die allgemeinen Regeln für die Tangentenberechnung gehören, welches alles wir aber der Kürze halber nicht berühren. Die Berechnung der ganz kleinen trigonometrischen Linien, nemlich für Secunden, beruht zum Theil auf dem Satze, daß die ganz klei-

nen Theilchen eines Bogens als eine gerade Linie angesehen werden können, und daß, wenn die Winkel endlich sehr klein werden, der Unterschied zwischen Sinus und seinem Bogen unendlich klein wird, und bey solchen kleinen Winkeln man wol annehmen kann, daß sich die Sinus wie die Bogen verhalten. Wenn man von allen diesen Berechnungen der Sinus und der andern trigonometrischen Linien sich nun durch Exempel weitläuftiger unterrichten will, um noch eine anschauendere Erkenntniß zu haben, so lese man unter andern Schriften nach Herrn Professor Karstens Lehrbegrif der Mathematik 2ter Theil, S. 315 u. f. Wolffii Elementa Trigonometr. Cap. 1. §. 25 seqq. u. s. w.

§. 481. Diese trigonometrischen Linien sind unlängst von fleißigen Leuten durch eine ungemein mühsame Art berechnet, und die Schriften, worinn diese Berechnungen stehen, heißen trigonometrische Tafeln. Man hat verschiedene, von verschiedenen Männern ausgearbeitet, wo man den Sinus totus oder Radius zum Theil zu tausend Billionen angenommen hat. Unter denen sind die Scherwinschen Tafeln, davon neulich eine neue Ausgabe zu Avignon veranstaltet ist, ungemein gut, wo man auch die trigonometrischen Linien für Secunden findet, wo zwar der Radius nur zu 10000000 angenommen, aber doch für die Größen der trigonometrischen Linien Logarithmen gegeben sind, als ob man den Radius zu

zehn-

zehntausend Millionen angenommen hätte, welches um so viel nützlicher ist, da man gewöhnlich mit Logarithmen rechnet. Da unsere Leser gewöhnlich nur die kleinen Tafeln gebrauchen werden, so wollen wir vorzüglich von diesen reden.

§. 482. Wir reden hier von der kleinern Ausgabe der trigonometrischen Tafeln von Adrian Vlacq, welche man zum gewöhnlichen Gebrauch gemeiniglich hat, und wobey sich die Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen von 1 bis 10000 befinden. Wir haben von diesen letztern schon in der Arithmetik geredet. Was nun die trigonometrischen Tafeln anbetrift, so befinden sich auf jeder Seite die Werthe der trigonometrischen Linien in Theilen des Radius. Der Radius ist dabey zu 10000000 angenommen; eigentlich zu 10 000 000 000, aber die letztern Ziffern sind in diesen Tafeln weggelassen, daß man ihn also nur als 10000000 betrachten kann, und darnach sind die Sinus, Tangenten und Secanten berechnet. Die Sinus versus finden sich nicht dabey, weil man die wenig gebraucht, und wenn man sie nöthig hat, leicht angeben kann, weil sie für die Winkel des Quadranten allezeit $= r - \text{col.}$ sind. Auf jeder Seite finden sich die Sinus, Tangenten und Secanten von allen Minuten eines halben Grades, oder von 30′; für Secunden finden sich in dieser Ausgabe keine. Sie fangen sich von 0 Grad an, und endigen sich mit 90°, aber mit folgender Einrichtung:

Auf der gegen überstehenden Seite finden sich die Cosinus, Cotangenten und Cosecanten der Winkel oder Bogen, die man auf der andern Seite antrift. So stehen z. E. den trigonometrischen Linien von 0 Grad gegen über die trigonometrischen Linien von 89° 60′ oder von 90°, den von einer Minute, die trigonometrischen Linien von 89° 59′ u. s. w. Daher kömmt es, daß die eine Seite die Minuten von oben herunter, und die andere Seite die Minuten von unten herauf zu zählen anfängt. Man begreift nun leicht, daß, da jede trigonometrische Linie ein Complement zu 90° hat, auf die Art, die sehr bequem ist, die trigonometrischen Linien von 0 bis 90° sehr bequem zu finden sind, so daß man sogleich ihr Complement zu 90° weiß. So findet man z. E. bey 30° 15′ gleich gegen über 59° 45′ als ihr auch Complement, und auch eben so umgekehrt, bey 59° 45′ ihr Complement 30° 15′. Jede Seite ist nun in fünf Spalten der Länge herunter getheilt. In der ersten sind die Sinus, in der zweyten die Tangenten, in der dritten die Secanten, in der vierten die Logarithmen der Sinus, in der fünften die Logarithmen der Tangenten. Von diesen Logarithmen werden wir nachher reden. Die Logarithmen der Secanten befinden sich in den kleinen Tafeln nicht, weil man jetzt die Secanten bey trigonometrischen Rechnungen fast gar nicht gebraucht, und also auch ihre Logarithmen nicht nöthig hat. Doch finden sich große trigonometrische Tafeln, worinn auch die Logarithmen der

Sec-

Secanten anzutreffen sind. In der Länge herunter befindet sich von 3 zu 3 Minuten ein Queerstrich, um desto weniger im Aufsuchen und Abschreiben der trigonometrischen Linien sich zu irren. Doch genug hiervon. Man muß sich diese trigonometrischen Tafeln doch nothwendig anschaffen, wenn man irgends mathematische Rechnungen machen, oder auch nur lesen will. Und wenn man noch die mindeste Schwierigkeit bey der Kenntniß ihrer Einrichtung findet, so kann man die sich von jedem gemeinen Feldmesser oder Ingenieur, der sie doch auch gebrauchen muß, sehr leicht erklären lassen.

Man kann mit den Werthen der trigonometrischen Linien rechnen, und es kommen wirklich auch Fälle vor, wo es geschieht und geschehen muß. Allein wenn man sie unter einander zu multipliciren, oder durch einander zu dividiren hat, so wäre das sehr unbequem. Man gebraucht daher alsdenn, wie überhaupt am meisten, die Logarithmen dieser Linien.

§. 483. Wir erwähnten in dem vorhergehenden Paragraphen etwas von den Logarithmen der trigonometrischen Linien. Wir wissen aus einem eigenen Kapitel der Arithmetik, wie überhaupt die Logarithmen für die natürlichen Zahlzeichen gemacht wurden. Man hat nun bey der trigonometrischen Linien Logarithmen eben das System angenommen, und wie bey den natürlichen Zahlzeichen für 1 den Logarithmen 0; für 10

den

den Logarithmen 1; für 100 den Logarithmen 2; für 1000 den Logarithmen 3; für 10000 4; für 100000 5 u. s. w. gesetzt, und für die Zwischenzahlen, auch wie bey den natürlichen Zahlzeichen, noch die Decimalbrüche gesucht, welche man an die Kennziefern oder Charakteristik angehängt hat.

Ob man schon in den Tafeln, wovon wir jetzt reden, den Sinus totus oder Radius nur zu 10000000 angenommen hat, so sind doch die Logarithmen, die neben den trigonometrischen Linien stehen, alle für den Sinus totus zu 10 000 000 000 berechnet, der Logarithme davon mußte also nach dem gewöhnlichen Logarithmensystem = 10 seyn, und so findet er sich auch. Da in diesen gemeinen Tafeln nur der Sinus totus = 10,0000000 genommen ist, so wäre also die Charakteristik der Logarithmen allezeit zu groß. Allein das hindert im Gebrauche nicht, wenn man blos mit den Logarithmen rechnet, denn je größer alsdenn der Sinus totus angenommen, desto besser, allein darinn muß man nur nicht sich versehen, daß man diese Logarithmen als Logarithmen der neben ihnen stehenden Zahlen ansehen, und auch auf die Art gebrauchen wollte.

§. 484. Wir haben eben gesagt, daß man die Logarithmen der trigonometrischen Linien auf eben die Art gesucht hätte, als die Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen. Auch dieser Lo-

ga-

garithmen, die man eher hatte, waren zur Findung der Logarithmen der trigonometrischen Linien sehr behülflich. Denn wenn man nun die Größen oder Werthe der trigonometrischen Linien in Theilen des Radius hatte, so konnte man vielleicht ihre Logarithmen durch Hülfe der Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen durch die Addition, Multiplikation, Approximation, wie wir sonst bey den natürlichen Zahlzeichen weitläuftig genug gezeigt haben, finden, denn auch die Zahlen der trigonometrischen Linien lassen sich zum Theil in Faktores zertheilen, und andere Veränderungen mit ihnen machen, wie bey den natürlichen Zahlzeichen geschahe, um ihre Logarithmen zu erhalten.

§. 485. Wir wissen aus §. 458, daß trigonometrische Linien auch negativ werden können, allein in Ansehung ihrer Größe werden sie, wenn man sie durch Logarithmen berechnet, allezeit als positiv betrachtet, denn es kömmt hier auch blos auf die Größe an, und wir wissen, daß die mit einer andern trigonometrischen Linie, welche positiv ist, nach §. 458 ff. einerley ist, und überhaupt wissen wir auch schon aus §. 375 der Arithmetik, daß es keine Logarithmen für negative Größen giebt, sondern daß das unmögliche Größen sind.

§. 486. Es kam vorzüglich bey der Findung der Logarithmen für die trigonometrischen Linien darauf an, nur die Logarithmen der Wer-

the der Sinusse zu wissen, alsdenn ließen sich aus den Formeln für die andern trigonometrischen Linien ihre Logarithmen leicht finden. Ein Exempel mag dieses erläutern.

Wir wissen aus §. 470, daß Tang. a = r. sin. a, also wenn man nach der gewöhnlichen

cos. a

Methode, wie man mit Logarithmen rechnet, verfährt, die wir in der Arithmetik gelehrt haben, so ist also Log. Tang. a = log. r, + log. sin. a, — log. cos. a. Wir haben nun vorausgesetzt, die Logarithmen der Sinus, also auch aller Cosinus wären bekannt, so sieht man, wie man die Logarithmen der andern Linien findet. Es soll nun a = 30° seyn, also:

log. tang. von 30° = log. r = 10,0000000
+ log. sin. 30° = 9,6989700

= 19,6989700.0.0
— log. cos. 30°
oder — log. sin. 60° = 9,9375306

abgezogen, giebt log. tang. 30° = 9,7614394. Welcher sich auch also in den Tafeln findet.

§. 487. Man hat, wie wir schon gesagt haben, in den Tafeln für den Radius 10000000000, und die davon abhangenden übrigen Sinus und andern trigonometrischen Linien die Logarithmen gesucht. Daher hat man

auch

auch in den Tafeln blos positive Logarithmen erhalten, denn der Logarithme noch von dem Sinus von einer Minute hat zur Charakteristik noch die Ziffer 6. Es geschahe dieses zur Bequemlichkeit im Rechnen, daß man den Sinus totus in so viel Theilen annahm, um positive Logarithmen für die trigonometrischen Linien zu bekommen. Hätte man den Sinus totus = 1 angenommen, so würden also alle andere Sinus kleiner als 1, also als Brüche haben müssen betrachtet werden, (wie sie eigentlich auch wirklich sind) ihre Logarithmen wären nun bey dem gewöhnlichen Logarithmensystem negativ geworden, wie die Logarithmen ächter Brüche sind, §. 353 Arithm. Denn obschon Logarithmen negativer Größen unmöglich sind, so sind doch nicht negative Logarithmen unmöglich. Es wäre aber nicht so bequem gewesen, mit negativen Logarithmen zu rechnen.

§. 488. Wir finden in den gemeinen kleinen Tafeln nur die Logarithmen der Minuten der Grade des Quadranten. Es könnten Vorfälle kommen, wo man auch die Secunden gebrauchen wollte. Wir wollen jetzt noch zeigen, wie man auch durch Hülfe der gemeinen Tafeln die Logarithmen einer trigonometrischen Linie finden könne, welche zu einem Winkel gehört, der außer den Graden und Minuten, die er groß ist, auch noch Secunden enthält. Es geschieht dieses auf eine ähnliche Art, wie wir §. 359 ff. Arithm. lehrten,

Logarithmen von Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen zu finden, wovon so viel ganze Zahlen nicht in den Tafeln waren. Es ist zwar dieses Verfahren, das wir angeben werden, nicht nach der ganzen Schärfe richtig, allein wenn die Winkel ziemlich groß sind, ist der Fehler doch nur klein, und auf die mehrsten Fälle, da man nicht eine sehr große Schärfe verlangt, ganz gut zu gebrauchen. Man nimmt nemlich auf eine ähnliche Art in der Arithmetik an, daß die Differenzen der Logarithmen bey Winkeln, die nicht über eine Minute sind, den Differenzen der Winkel proportional sind. Das ist nun freylich nicht völlig richtig, und je kleiner die Winkel sind, desto unrichtiger, allein der Fehler kann sich auch da nur auf einige Secunden erstrecken, worauf man bey den mehrsten Rechnungen nicht sehr zu achten nöthig hat.

Wenn man nun den Logarithmen eines solchen Winkels suchen soll, der nebst den Graden und Minuten auch Secunden enthält, so nehme man erst den Logarithmen des Winkels, welcher nur die Grade und Minuten enthält, und ziehe diesen Logarithmen von dem Logarithmen eines Winkels ab, der um eine Minute größer ist, so hat man die logarithmische Differenz zwischen beyden Winkeln, und nun schließe man: 60 Secunden : zu der verlangten Anzahl Secunden = wie die gefundene Differenz : zu der zu suchenden vierten Zahl. Was man also findet, addirt man zu dem Logarithmen, der nur die Grade und Minuten

nuten hatte. Und so findet man den Logarithmen auch für den Winkel, der neben diesen Graden und Minuten auch noch aus Secunden bestand. Es gilt diese Regel für aller Sinus, Tangenten und Secanten Logarithmen, (zwar die letztern finden sich in den Tafeln nicht) weil diese immer mit dem Winkel größer werden, und also auch ihre Logarithmen wachsen. Z. E. man sucht den Logarithmen des Sinus von 48° 20′ 30″. Nun ist der Logarithme von

log. 48° 21 = 9,8734476 davon abgezogen den
log. 48° 20′ = 9,8733352

die Differenz 1124.

Nun schließt man:

60 Secunden : 30 Secunden = 1124 : x

und $x = \frac{1124 \cdot 30}{60} = 562.$

Dieses addirt zum log. 48° 20 Minuten

also 9,8733352
\+ 562

9,8733914 = log. 48° 20′ 30″.

Eben so mit den Logarithmen der Tangenten Man sucht den Logarithmen des Tangens von 4° 5′ 16″

log. tang. 4° 6′ = 9,9253 · 524
log. tang. 4° 5′ = 9,9250 960

Diff. 2 564.

Man schließt 60 Sec. : 16 Sec. = 2564 : x
und $x = \frac{2564 \cdot 16}{60} = 683$
also log. tang. 4° 5′ = 9,9250960
+ 683
9,9251643
= log. tang. 4° 5′ 16″.

Die Cosinus und Cotangenten, auch Cosecanten, nehmen ab, wie die Winkel wachsen, folglich muß man, wenn man auf die Art die Logarithmen für die Cosinus und Cotangenten, auch Cosecanten, finden wollte, zwar eben so verfahren, aber die gefundene vierte Zahl von der nächst größern abziehen. Es sey denn, daß man die Cosinus, Cotangenten und Cosecanten auch als Sinus, Tangens und Secanten behandelte, da denn die erste Methode bleibt.

Exempel: Man sucht den Logarithmen col. 53° 28′ 54″, so wäre, weil bey den Cosinus die Cosinus mit den Winkeln abnähmen, der nächst größere Cosinus, der Cosinus 53° 28′, und der nächst kleinere Cosinus, Cosinus 53° 29′

also log. col. 53° 28′ = 9,7747288
log. col. 53° 29′ = 9,7745583
Diff. = 1705

also 60 Secunden : 54 Secunden = 1705 : x
und $x = \frac{1705 \cdot 54}{60} = 1534.$

Das vom nächst größern Logarithmen abgezogen, also

also log. col. 53° 28′ = 9,7747.288
1534
9,77457 54

= log. col. 53° 28′ 54″.

Da man weiß, welche Sinus die Cosinus eines Winkels sind, so kann man sie also als Sinus bey Suchung der Secunden behandeln, und denn würde dieses Exempel also gemacht werden müssen. Weil col. 53° 28′ 54 Secunden = sin. 36° 31′ 6″, so sucht man davon den Logarithmen für die Secunden, da denn eben das heraus kömmt. Man fand aber diesen andern Ausdruck leicht, wenn man 53° 28′ 54″ von 90°, oder von 89° 59′ 60″ abzog. Man hätte denn also gerechnet:

log. sin. 36° 32′ = 9,7747.288
log. sin. 36° 31′ = 9,7745583

Diff. = 1705.

Man schließt 60 Sec.: 6 Sec. = 1705 : x
und $x = \frac{1705 \cdot 6}{60} = 171$.

Das zu log. sin. 36° 31′ = 9,7745583
addirt 171

9,7745754

= log. sin. 36° 31′ 6″, welches mit dem vorigen col. 53° 28′ 54″ einerley Logarithmen giebt. Eben so kann man mit den Cotangenten verfahren.

§. 489. Wir betrachteten jetzt, Logarithmen für Winkel zu finden, welche noch Secunden neben den Graden und Minuten enthielten.

Wir können aber nun auch in den Rechnungen Logarithmen für Winkel bekommen, welche Logarithmen sich nicht in den Tafeln befinden, und deren Winkel man doch genauer wissen wollte. Bis auf Minuten kann man ihn schon aus den gemeinen Tafeln wissen, wenn man sieht, zwischen welche Logarithmen der Winkel des gefundenen Logarithmen fällt. Dieses giebt uns auch schon die Anleitung, den Winkel selbst ziemlich richtig zu finden, zu welchem der Logarithme gehört. Man kehrt nemlich das Verfahren des vorigen Paragraphen um. Der Logarithme, den man gefunden hat, oder der gegeben ist, und sich nicht so genau in den Tafeln findet, würde doch gewiß, wenn er da wäre, zwischen zwey Logarithmen oder Winkeln stehen müssen, und diese sind also seine Gränzen. Man suche diese beyden Logarithmen in den Tafeln auf, und ziehe den Kleinern von dem größern ab, oder man nehme beyder ihre Differenz, man suche auch die Differenz des gegebenen Logarithmen von dem nächst Kleinern Logarithmen unter den beyden, die man als Gränzen angenommen hat. Und nun schließe man also: Wie sich verhält die Differenz der Gränzen: Differenz des gegebenen Logarithmen = also 60 Secunden: zur vierten Zahl. Hiedurch bekommt man eine Anzahl Secunden, diese addirt man zu dem Winkel, der dem nächst kleinern Logarithmen von den beyden Gränzen in den Tafeln zugehört, wenn nemlich die trigonometrischen Linien mit dem Winkel wach-

wachsen. Wenn aber die trigonometrischen Linien mit dem Winkel abnehmen, so ziehe man sie davon ab. Der Grund dieses Verfahrens ist eben der, als im vorigen Paragraphen, nemlich man kann annehmen, daß die Differenzen der Logarithmen bey Winkeln, die nicht über eine Minute sind, den Differenzen der Winkel proportional sind. Obschon dieses nicht völlig wahr ist, so trift es doch so ziemlich bey großen Winkeln ein, und ist überhaupt bey einer nicht gar zu großen Schärfe wol anzunehmen. Exempel sollen die Sache erläutern. Man hat folgende Logarithmen des Sinus eines Winkels 9,7089828. Dieser befindet sich nicht in den kleinen Tafeln, aber man findet, er gehört zwischen

log. sin. 3° 47′ = 9,709.0.943 und zwischen
log. sin. 3° 46″ = 9,708 8 822

---

die Differenz beyder = 2121.

Nun ist der gegebene Logarithme = 9,7089828
der nächst kleinere
log. sin. 3° 46′ = 9,7088822

---

beyder Differenz = 1006.

Man schließt nun 2121 : 1006 = 60 Sec. : x, und $x = \frac{60 \cdot 1006}{2121} = 28$, diese 28 addire man zu dem nächst kleinern Winkel, nemlich hier zu 3° 46′, und der gegebene Logarithme wird also für den gegebenen Sinus eines Winkels seyn, welcher 30 Grad, 46 Minuten, 28 Secunden

enthält. Man habe den Logarithmen eines Tangenten 9,8449781. Dieser ist nicht in den Tafeln, aber seine Gränzen sind

log. tang. 35° = 9,8452268 und
log. tang. 34° 59′ = 9,8449579

ihre Differenz 2689.

Der gegebene Logar. = 9,8449781
der nächst kleinere
in den Tafeln
log. tang. 34° 59′ = 9,8449579

ihre Differenz = 202.

Man schließt 2689 : 202 = 60 Secunden : x,
und $x = \frac{202 \cdot 60}{2689} = 4$ Secunden, diese zu 34° 59′
addirt, so ist also der gegebene Logarithme der Logarithme für den Tangens des Winkels von 34° 59′ 4″ wenigstens so ziemlich genau. Nun auch ein Paar Exempel für trigonometrische Linien, welche so wie die Winkel wachsen, abnehmen, nemlich für Cosinus und Cotangenten. Es sey der Logarithme eines Cosinus eines Winkels = 9,5643214. Die Gränzen, wozwischen er fällt, sind

log. cos. 68° 29′ = 9,5643960. Nun ist die andere Gränze,
log. cos. 68° 30′ = 9,5640754 weil die Cosinus, so wie sie steigen, kleiner werden.

ihre Differenz = 3206

Ferner

Ferner der gegebene Logarithme = 9,5643214
der nächst kleinere log. cos. 68° 30′ = 9,5640754

ihre Differenz = 2460.

Man schließt 3206 : 2460 = 60 Secunden : x, und $x = \frac{2460.60}{3206} = 46$. Das nun, weil hier Cosinus sind, von dem Winkel des nächst kleinern Logarithmen abgezogen, giebt cos. 68° 30′ — 46″, oder wenn wirklich abgezogen ist, 68° 29′ 14″, also der gegebene Logarithme war der Logarithme des Cosinus 68° 29′ 14″, welches der Sinus von 21° 31′ 46″ ist. Noch ein Exempel über einen Cotangens. Es mag der Logarithme des Cotangens eines Winkels folgender seyn: 9,7341685, die Gränzen davon sind

log. cot. 61° 31′ = 9,7344631
log. cot. 61° 32′ = 9,7341616

ihre Differenz = 3015.

Ferner der gegebene Logarithme = 9,7341685
der nächst kleinere log. cot. 61° 32′ = 9,7341616

ihre Differenz = 69.

Man schließt 3015 : 69 = 60 : x,
also $x = \frac{69.60}{3015} = 1$ Secunde.

Diese von dem Winkel des nächst kleinern Logarithmen abgezogen, also von 61° 32′, giebt also 61° 31′ 59″, also der gegebene Logarithme war der

Logarithme des Cotangenten von 61 31 59″, welches der Tangens von 28 28 1″ ist.

Wenn man die Tafeln zur Hand nimmt, diese Exempel nachsieht, und sich darinn übt, so wird man nicht leicht in der Berechnung irren können; nur muß man bey den Cotangenten, Cosinussen nicht vergessen, daß, so wie der Winkel wächst, diese Linien, und also auch ihre Logarithmen abnehmen. Man versteht dieses leicht von selbst, aber wir haben es doch bemerken wollen, weil Anfänger auch wol in solchen Kleinigkeiten leicht irren, und manchmal einige Stunden darüber sich aufhalten, ehe ihnen die Auflösung, die sie schon selbst wissen, einfällt.

§. 490. Wir beschließen dieses Kapitel mit zwey Anmerkungen: 1) Unter allen trigonometrischen Linien, welche sich in den Tafeln befinden, sind nur drey völlig wahr und richtig, alle andern sind nur durch Näherung angegeben, und sind nach dem angenommenen System Irrationalgrößen, denen man sich zwar immer mehr und mehr nähern, aber sie nicht völlig ausdrücken kann, doch ist der Irrthum auch in den gemeinen Tafeln noch kein $\frac{1}{100\,000\,000}$ Theilchen des Radius.

Die völlig wahren trigonometrischen Linien sind 1) der Sinus totus oder Radius, den man zu einer gewissen Größe angenommen; 2) der Sinus von 30°, oder nach §. 453 gleich dem halben Radius, und endlich der Tangens 45°.

Dieser

Dieser ist gleich dem Radius. Dieses letztere haben wir noch nicht bewiesen, es wird uns aber sehr leicht seyn.

Es sey Fig. 263 der Winkel BCA = 45°, so ist AC der Radius, und AB der Tangens von 45°. Nun ist bey A ein rechter Winkel, weil AB Tangens ist; bey C ist nach der Voraussetzung 45°, also muß der Winkel bey B auch 45° seyn, weil alle drey Winkel in einem Triangel 180° ausmachen. Ist der Winkel bey B auch 45°, also = dem bey C, so ist der Triangel ABC gleichschenklicht, folglich auch AC = BA, oder weil AC Radius, so ist AB = Radio, also die Tangente von 45° = Radio. Fig. 263.

§. 491. Aus allen diesen Betrachtungen läßt sich auch die Methode herleiten, wie man eine besondere Art des Transporteurs verzeichnen kann, welchen man den geradlinichten Transporteur nennt. Dieser geradlinichte Transporteur beruht zum Theil darauf, wie man die Winkel, die auf dem Papiere gezeichnet sind, vermöge der Sinus messen könne. Wir wollen erstlich diese Methode vortragen, die wir dem geradlinichten Transporteur sowol als dem gemeinen Transporteur weit vorziehen, und nachher vom geradlinichten Transporteur reden.

Es sey ein Winkel Fig. 264 ACB auf dem Papiere gegeben, welchen man messen soll. Man nehme einen seiner Schenkel AC, und theile ihn in 1000 Theile nach §. 158, so kann man diese Fig. 264.

AC als den Radius betrachten; nun lasse man von dem Punkte A auf des andern Schenkel CB das Perpendikel AB herab, so ist AB der Sinus des Winkels ACB; man messe nun diese AB auf dem 1000 theilichten Maasstabe, den man von AC gemacht hat, so weiß man, wie viel er solcher Theile enthält, und man bekömmt doch auf die Art 3 Zahlen; diese Theile oder Zahlen, die man also bekömmt, sucht man in den Tafeln der Sinus in den Anfangszahlen derselben auf, so findet man doch wenigstens bis auf vier oder fünf Minuten in Minuten und Graden den Winkel, weil die ersten drey oder vier Zahlen in den Tafeln der Sinus sich nur in drey oder vier Minuten verändern. In ganz kleinen Winkeln ist es freylich nicht so scharf, aber von $\frac{1}{2}$ Grade bis auf 50 Grade weit genauer, als wenn man die Winkel mit dem Transporteur mißt, auf welchem gewöhnlich nur Grade verzeichnet sind, und da man durch Schätzung höchstens Viertelgrade erreicht. Steigen die Winkel über 50 Grade, so sind die drey ersten Zahlen der Sinus in den Tafeln sich in mehrern Minuten gleich. So sind sie z. E. bey 75 Graden sich schon bey 15 verschiedenen Minuten gleich, aber man mißt doch immer wenigstens eben so genau auf diese Art die Winkel, als man mit dem Transporteur thun kann. Vorzüglich dient es aber von $\frac{1}{2}$ Grad bis ohngefehr 50 Grade. Man möchte nun sagen, daß es sehr mühsam wäre, allezeit einen Schenkel des Winkels in 1000 Thei-

le zu theilen. Allein man kann auch dieses ändern. Man darf nur ein für allemal einen angenommenen Maasstab von beliebiger Länge in 1000 Theile theilen, und alsdenn die Schenkel des Winkels ACB so verlängern, welches den Winkel selbst nicht ändert, daß sie der Länge des Maasstabes gleich werden, und alsdenn von dem einen Schenkel auf den andern das Perpendikel AB fallen lassen, so kann man AB, wie wir oben gesagt, auf dem einmal gemachten Maasstabe messen, und alsdenn die gefundenen Größen in den Tafeln der Sinus aufsuchen. Ein Exempel soll dieses erläutern. Wir wollen den Winkel ACB Fig. 264 also messen. Es mag der einmal zu solchem Gebrauch gemachte oder angenommene 1000 theilichte Maasstab die ganze Länge AC Fig. 267 haben, welche nach §. 158 in 1000 Theile getheilt ist. Man verlängere nun die Schenkel AC und CB des Winkels ACB Fig. 264, also daß sie der AC Fig. 267 gleich werden. Dieses wird die Figur 265 geben. Kann man es auf dem Papiere, worauf der Winkel steht, nicht bequem genug thun, so trage man ihn ab auf ein Papier, das groß genug ist. Man ziehe nun das Perpendikel AB, und messe das auf dem 1000 theilichten Maasstabe. Dieses trägt auf diesem angenommenen Maasstabe 781, diese 781 suche man in den ersten Zahlen der Sinus auf, und man findet für den 51° 22′ bis 51° 26′, diese drey Zahlen zu den Anfangszahlen, also der Winkel ist nicht kleiner, als 51° 22′, Fig. 265.

und

und nicht größer, als 51° 26′. Durch Schätzung kann man auch noch sehen, wie viel etwa noch an Decimalbrüchen AB über 781 hatte, und dadurch noch genauer den Winkel bestimmen, so wird dieser Winkel, der nach einem tausendtheilichten Maasstab nach der Länge AC gemessen ist, ohngefehr 51° 23′ halten. So genau ließ sich das mit keinem Transporteur bewerkstelligen. Man kann auch auf eine ähnliche Art auf einer gegebenen Linie BC an einen gegebenen Punkt C einen Winkel auftragen, der also weit richtiger ist, als wenn man ihn mit dem Transporteur aufträgt. Es sey Fig. 265 die Linie BC gegeben, und man soll an den Punkt C den Winkel 51° 22′ tragen, so suche man in den Tafeln den Cosinus von 52° 22′ auf, schneide die vier hintersten Zahlen von ihm ab, und nehme die Größe der drey erstern Ziffern auf dem tausendtheilichten Maasstab AB. Dieses Winkels 51° 22′ Cosinus ist der Winkel 38° 38′. Also dieses Winkels Cosinus erste drey Zahlen, welche in den Tafeln 624 sind, nehme man auf dem tausendtheilichten Maasstabe, und trage sie von C nach B. Ist CB nicht lang genug dazu, so muß es verlängert werden. Nun richte man in B ein Perpendikel AB auf, welches die Länge hat, als die drey ersten Zahlen des Sinus des verlangten Winkels in Tafeln zeigen, welche Länge gleichfalls aus dem tausendtheilichten Maasstabe genommen hat, ziehe durch den Endpunkt A dieses Perpendikels und durch den gegebenen Punkt C die Linie AC, so ist das

Bei-

Begehren erfüllt, und der Winkel ACB wird doch bis auf ein Paar Minuten gewiß richtig seyn. Macht man einen 10000 theilichten Maasstab, und verfährt auf die gelehrte Art, so wird der Irrthum noch kleiner, und beträgt selten drey Minuten, als in ganz großen Winkeln nahe an 90°, sonst ist in den mittlern Graden der Winkel schon auf Minuten richtig. Allein ein 10000 theilichter Maasstab ist schon unbequem, weil der doch etwas groß seyn muß, wenn man alle Theile darauf gut ausdrücken wollte. Man muß aber überhaupt bey allen diesen Messungen und Auftragung der Winkel sehr genau verfahren, und die Winkel fein und genau auf das Papier tragen, und einen accuraten und fein gezogenen Maasstab haben, um richtige Messungen der Winkel zu bewerkstelligen. Daß wir die Richtigkeit dieses Verfahrens beweisen, wäre überflüssig, es leuchtet seine Richtigkeit aus der ganzen Theorie der trigonometrischen Linien sattsam hervor.

§. 492. Zum Theil auf dieses Verfahren gründet sich der sogenannte geradlinichte Transporteur. Der vorhergehende Paragraph lehrte die Winkel durch Sinus zu messen; dieser geradlinichte Transporteur mißt sie durch Chorden. Es ist uns aus dieser ganzen Lehre schon sattsam bekannt, daß jeder Sinus eines Winkels die halbe Chorde eines noch einmal so großen Winkels sey, und also jeder verdoppelte Sinus die Chorde

eines

eines noch mal so großen Winkels sey, als der ist, welcher durch den Sinus gemessen werde. Fig. 266 Also wenn Fig. 266 AD der Sinus von ACD, welchen Winkel wir $\frac{1}{2}$ a nennen wollen, so ist AB = 2AD = 2lin. $\frac{1}{2}$ a, oder = Chorde von a. Wenn man also die Sinus der Winkel hat in Theilen des Radius, so kann man auch die Chorden derselben in Theilen des Radius finden, man darf nur den Sinus des halb so großen Winkels verdoppeln. Nun findet man diese Sinus in den gewöhnlichen Sinustafeln, wenn man also einen Fig 267. Maasstab AC Fig. 267 machte, selbigen in 1000 oder 10000 Theile (wir wollen hier 1000 Theile annehmen) theilte, und die Länge AC als den Radius annähme, so könnte man, wenn man eines Winkels beyde Schenkel eben so lang, als AC gemacht hätte, und alsdenn durch beyde Endpunkte derselben eine gerade Linie zöge, diese gerade Linie als die Chorde dieses Winkels betrachten, und ihre Länge auf dem Maasstabe Fig. 267 abmessen. Hätte man nun berechnet, wie groß die Chorden für die Winkel in Theilen eines solchen angenommenen Radius wären, und man hätte die Chorde gemessen, so wüßte man auch, wie groß der Winkel wäre, für welchen man sie gezogen hatte. Wenn man ein für allemal eine gewisse Länge zum Radius angenommen, die Chorden der Winkel darnach berechnet, und diese Längen der Chorden auf eigene dazu gezogene Linien getragen hat, so kann man allezeit ein solches Maas für die Winkel gebrauchen, und

dieses

dieses nennt man den geradlinichten Transporteur. Man wird in der 268sten und 269sten Figur diesen geradlinichten Transporteur gezeichnet antreffen, und in Fig. 267 den Maaestab, wornach er gemacht ist. Gewöhnlich pflegt man auf ihn nur die Sehnen von 5 zu 5 Graden zu tragen, und die dazwischen fallenden Winkel vermittelst Transversallinien, wie beym verjüngten Maasstabe zu bestimmen, welches auch bey einem solchen kleinen Radius, als AC ist, eben keinen großen zu merklichen Irrthum verursacht. Wir wollen erstlich zeigen, wie er von 5 zu 5 Graden Fig. 265 gemacht sey, und nachher Fig. 269 deutlicher beschreiben. Man fängt gewöhnlich mit dem Sinus von 2° 30′ an. Dieser ist in den Tafeln, den Radius zu 10000000 angenommen, 436194, das mit 2 multiplicirt, giebt 872388, welches also die Chorde von 5° ist; weil wir den Radius nur = 1000 angenommen hatten, schneiden wir die hintersten vier Zahlen ab, und setzen nur 87, oder noch wol einen Decimalbruch dabey von den übrigen Zahlen, als 87, 2; diese 87 nimmt man nun auf dem tausendtheilichten Maasstabe Fig. 267, und trägt sie Fig. 268 von A nach B, so hat man die Chorde von 5 Graden. Nun ist ferner der Sinus von 5 Graden = 871557, mit 2 multiplicirt, giebt die Chorde von 10 Graden, und ist = 1743114; hievon wieder die vier hintersten Zahlen aus eben angeführter Ursache abgeschnitten, giebt 174 oder 174,3; diese nimmt man wieder auf dem tausend-

Fig. 268 & 269.

theil-

theilichten Maasstabe, und trägt sie Fig. 267 unten von C nach D. So trägt man nun die auf die Art gefundene Chorde von 15° oben von A nach F, und die von 20° unten von 10 nach G und so weiter, die Chorden, die sich in den Zehnern endigen, unten, und die in den Fünfern oben, wie dieses schon aus dem Anblick der Figur
Fig. 268. 268 deutlich ist. Diese Punkte nun, wo sich die Chorden endigen, zieht man mit Transversallinien zusammen, wie man in der Figur sieht, und es ist sehr begreiflich, daß also zwischen diesen Linien die Chorden der dazwischen sich befindenden Grade fallen müssen, und wenn mit AF und CG Parallelen gezogen wären, auf diese Parallelen aufgetragen werden könnten, da sie denn durch die Transversallinien so ziemlich genau bey einem solchen kleinen Radius, als AC ist, abgeschnitten werden.

Nun ist auf eine ähnliche Art der geradlis-
Fig. nichte Transporteur Fig. 269 gemacht. Es sind
269. nemlich 2 Parallellinien AB und CD gezogen, darauf, wie in der Figur zu sehen, die Chorden von 0 Grad bis 90 Grad nach der obigen Methode aus dem verjüngten Maasstabe Fig. 267 getragen sind. Die Punkte, wo diese Chorden sich oben und unten endigen, sind mit Transversallinien zusammen gehängt. Die Entfernung AC beyder Parallellinien ist wieder in fünf gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspunkte, mit der obersten und untersten Parallellinie, wieder Parallellinien EI, FK ꝛc. gezogen.

Auf

Auf diese Linien fallen nun die einzelnen Grade, die allezeit zwischen 5 und 5 Graden sich befinden, und werden durch die Transversalen abgeschnitten, diese Grade sind auch nun in der Figur mit den ihnen zukommenden Zahlen bemerkt. Man zählt nemlich erst herauf, und denn herunter, und denn wieder herauf ꝛc. wie das aus der Natur der Sache auch hervorleuchtet, weil unten 5, denn oben 10, denn unten wieder 15 Grade ꝛc. sich befinden. Zwischen jeder der Parallellinien, wo die Zahlen stehen, sind wieder 5 mit diesen parallele Linien, darauf befinden sich nun die Chorden von jedem Grad, von 10 zu 10 Minuten, und werden gleichfalls durch die Transversallinien abgeschnitten. Dieses alles wird durch die Betrachtung der Figur deutlich genug. Man kann also auf diesem hier gezeichneten geradlinichten Transporteur die Chorden der Winkel von 10 zu 10 Minuten messen. Man sieht leicht ein, daß man ihn auch hätte einrichten, ja völlig berechnen, und nach der Berechnung zeichnen können, daß man die Chorden der Winkel von 2 zu 2 Minuten auf den geradlinichten Transporteur hätte tragen können. Gemeiniglich begnügt man sich mit dieser Art.

Wir wollen doch nun diese Art der Messung der Winkel durch ein Exempel erläutern. Es sey Fig. 270 der Winkel ACB auf die Art zu messen. Man verlängere die beyden Schenkel desselben bis in E und F, bis nemlich CE und CF = dem angenommenen Radio AC Fig. 267, oder Fig. 270.

auch auf dem geradlinichten Transporteur der Chorde von 6°, also C 60 Fig. 269 (denn diese ist auch = Radio) gleich wird; nun ziehe man durch E und F Fig. 270 die Linie EF, dieses ist die Chorde dieses Winkels; diese EF nehme man zwischen dem Cirkel, und messe sie auf dem geradlinichten Transporteur, so wird man finden, daß sie so ziemlich zu der Chorde von 17° 50′ gehört, also ist der Winkel ECF = 17° 50′. Es ist hierinn gar nichts schweres.

Indessen ist es doch allezeit weit genauer und besser, vermittelst der Sinus auf einem tausendtheilichten Maasstabe, nach dem, wie wir im §. 491 unsere Betrachtungen angestellt haben, die Winkel auf dem Papiere zu messen. Daher wir auch über den geradlinichten Transporteur uns nicht weiter einlassen wollen.

Das dritte Kapitel.

Die Berechnung der Seiten und Winkel der geradlinichten Dreyecke.

§. 493.

Nach den Vorbereitungen, die wir in den vorhergehenden Kapiteln gemacht haben, können wir nun zu den Berechnungen der Seiten

und

und Winkel der geradlinichten Dreyecke schreiten. In den Exempeln, welche wir bey der Theorie dieser Berechnung geben werden, wollen wir uns aber der logarithmischen Rechnungsart bedienen, weil die viel kürzer und bequemer ist, und ein jeder auch leicht einsehen wird, wie man mit den Werthen der Sinus und Tangenten hätte rechnen müssen, wenn man ihre Logarithmen nicht hätte. Man wird gut thun, wenn die Arten der logarithmischen Rechnungen nicht mehr geläufig genug sind, das Kapitel, welches davon handelt, aus der Arithmetik zu wiederholen.

§. 494. Der erste allgemeine Satz, der allezeit vorkömmt, und worauf viele Lehren dieses Kapitels gegründet sind, und den wir jetzt beweisen wollen, und welcher von allen Dreyecken, sie mögen rechtwinklichte oder spitzwinklichte, gleichschenklichte, gleichseitige oder ungleichseitige Dreyecke seyn, wahr ist, ist folgender: **In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der den Seiten gegenüber stehenden Winkel**, oder Fig. 271 AB : sin. D = AD : sin. B, oder AB : AD = sin. D : sin. B. Fig. 271.

Nun hätte man zwar bey rechtwinklichten und gleichschenklichten Triangeln, wozu auch die gleichseitigen gehören, wenn man nemlich weiß, daß es solche Triangel sind, ihn eben nicht nöthig, weil man auch ohne ihn die Seiten und Winkel derselben finden könnte, wie wir auch zeigen werden. Indessen ist er doch allgemein wahr, und

geht daher allen an. Wir wollen ihn jetzt auf eine sehr leichte Art beweisen Fig. 271. Wir wissen aus der Geometrie §. 171, 173, daß durch drey gegebene Punkte ein Cirkel kann beschrieben werden, und also ein jedes Dreyeck gleichfalls im Cirkel kann beschrieben werden, so daß seine Spitzen an die Peripherie des Cirkels stoßen. Das sey nun bey dem Dreyecke ABD Fig. 271 geschehen, wie es mit allen möglichen Dreyecken geschehen kann. Wir wissen ferner aus der Geometrie §. 181, daß ein Peripheriewinkel zu seinem Maaße den halben Bogen hat, worauf seine Schenkel stehen. Die Winkel in einem Triangel, welcher also im Cirkel beschrieben ist, können also alle als Peripheriewinkel betrachtet werden, wie das aus der Construktion erhellt. Also hat der Winkel A zu seinem Maaße den halben Bogen BD, der Winkel B den halben Bogen AD, und der Winkel D den halben Bogen AB. Allein wir wissen auch aus unsern bisherigen Betrachtungen, daß die Bogen durch die Sinus gemessen werden, und daß auch ferner der Sinus eines Bogens die halbe Chorde eines nochmal so großen Bogens sey nach §. 453. Nun sind die Seiten dieses Triangels alle Chorden. Die Hälften davon werden also die Sinus des halben Bogens seyn. Und da diese halbe Bogen das Maas der gegenüber stehenden Peripheriewinkel in diesem Trinangel sind, also auch als die Sinus, und folglich als das Maas dieser Winkel betrachtet werden können, also werden sich nun

auch die Sinus dieser Winkel verhalten, wie die halben den Winkeln gegenüber stehenden Chorden, weil es einerley, welches man von beyden nimmt. Es wird also z. E. richtig seyn:

sin. D : ½ AB = sin. B : ½ AD, welches eine identische Proportion ist.

folglich auch

½ AB : ½ AD = sin. D : sin. B. 2, die zwey vordersten Glieder mit 2 multiplicirt.

AB : AD = sin. D : sin. B

also auch

AB : sin. D = AD : sin. B.

Welches der Satz war, den wir erweisen wollten.

Wir wollen ihn doch kurz bloß in Zeichen wiederholen, damit man ihn gleich übersehen kann:

Winkel D = ½ Bogen AB
Winkel B = ½ Bogen AD

---

folglich sin. Winkel D = sin. ½ Bogen AB
sin. Winkel B = sin. ½ Bogen AD

---

folglich ½ Chorde AB = sin. ½ Bogen AB und ½ Chorde AD = sin. ½ Bogen AD

---

also ½ Chorde AB = sin. Winkel D und ½ Chorde AD = sin. Winkel B.

Folglich

sin. D : sin. B = ½ Chorde AB : ½ Chorde AD oder. 2

---

sin. D : sin. B = AB : AD, also muß

AB : sin. D = AD : sin. B.

Eben dieser Beweis gilt auch für die andern Winkel und Linien in diesem Triangel. Also auch z E. BD : AB = sin A : sin. D oder auch gleichfalls BD : AD = sin. A : sin. B.

§. 495. Weil AB : AD = sin. D : sin. B, so heißt das auch gleichfalls den vorigen Satz umgekehrt ausgedrückt: **Die Sinus der Winkel verhalten sich wie die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten**, wie man aus der Proportion gleich sieht.

§. 496. Die Wahrheit dieser Betrachtungen fällt sogleich deutlich in die Augen, so lange die Triangel spitzwinklicht oder auch rechtwinklicht sind. Denn auch bey einem rechten Winkel, wenn man ihn als Peripheriewinkel betrachtet, ist sein Maas ein Quadrant des Cirkels nach §. 187, und die halbe Chorde des Bogens, worauf er steht, der Radius. Man hätte können also in Fig. 271 auch für den dort geführten Beweis einen rechtwinklichten Triangel verzeichnen. Indessen ist doch aber auch unser Satz für stumpfwinklichte Triangel wahr, daß sich seine Seiten verhalten, wie die Sinus der ihnen entgegen gesetzten Winkel, und man also schließen kann Fig. 272: AB : BD = sin. D : sin. A, nur nimmt man anstatt des Sinus des stumpfen Winkels den Sinus seines Nebenwinkels zu 180 Grad, welcher mit ihm, wie wir aus §. 457 wissen, einerley ist. Daß nun auch dieses richtig sey, wollen

Fig. 272.

wir

wir sogleich zeigen Fig. 272. Es sey der Triangel ABD ein stumpfwinklichter Triangel, und der stumpfe Winkel bey D; man verlängere die Grundlinie AD desselben, woran der stumpfe Winkel D liegt, nach E hin, und lasse aus der Spitze A des Triangels ein Perpendikel BE auf diese verlängerte Grundlinie fallen, welches ausser dem Triangel fallen wird. Dadurch erhält man nun einen rechtwinklichten Triangel BAE. Wenn man nun die ganz unveränderte Seite AB als den Radius eines Cirkels betrachtet, dessen Centrum A ist, so wird, weil nun bey E ein rechter Winkel ist, die BE als der Sinus des Winkels A betrachtet werden können. Es würde also folgende Proportion sehr wahr seyn:

AB : BE = radius : sin. A.

Betrachtet man nun den durch den Perpendikel entstandenen Triangel BDE besonders, so gilt nach dem Lehrsatze des vorigen Paragraphen die Proportion von ihm: BE : BD = sin. D : sin. E. Man weiß nun, daß der Sinus des spitzen und stumpfen Winkels bey D einerley ist. Der Sinus aber von E ist, weil bey E ein rechter Winkel ist, der Radius. Die letztere Proportion könnte man daher also ausdrücken: BE : BD = sin. D : rad. Vergleicht man beyde Proportionen mit einander, als AB : BE = rad. : sin. A, und BE : BD = sin. D : rad. die beyde mit den allgemeinen verglichen, so gilt AB : BD = sin. D : sin. A, und unser Satz ist auch für die stumpfwinklichten Triangel erwiesen. Nun wird es ei-

nem jeden von selbst einfallen, daß, weil man keine Sinus der stumpfen Winkel hat, man anstatt ihrer allezeit den Sinus des Nebenwinkels setzt. Z. E. es mag Fig. 272 der stumpfe Winkel bey D = 110° seyn, und der bey A sey = 30°, so würde man also die Proportion setzen: AB : BD = sin. 70° : sin. 30°. Denn der Nebenwinkel von 110° ist = 70°. Was man in acht zu nehmen hat, wenn man auf die Art stumpfe Winkel suchen will, werden wir an den gehörigen Orten erinnern.

§. 497. Dieser Lehrsatz kömmt nun allerwärts bey der Berechnung der Triangel vor, daher wir ihn auch zuerst anführten. Jetzt wenden wir uns nun zu der Auflösung der Triangel selbst. Die Triangel, welche wir zu betrachten haben, sind nun **rechtwinklichte**, **gleichschenklichte** und **schiefwinklichte**, oder wir wollen vielmehr über die beyden erstern, worunter auch die gleichseitigen gehören, weil sie gleichschenklicht sind, besondere Betrachtungen anstellen, und alsdenn allgemeine Betrachtungen und Auflösungen über alle Dreyecke geben. Dahin lassen sich nun die erstern beyden Gattungen auch ziehen, und auf eben die Art berechnen, allein weil man besondere und bequemere Auflösungen hat, so wollen wir sie auch besonders noch vornehmen. Ueberdem dient es uns sehr zur Uebung.

§. 498. Ein Dreyeck hat drey Seiten und drey Winkel; wenn nun von diesen sechs

Stücken

Stücken drey gegeben sind, so lassen sich die andern drey durch Rechnung finden. Es muß aber allezeit unter den drey Stücken wenigstens eine Seite seyn, weil die drey Winkel unendlich vielen Dreyecken zukommen können, wie uns aus der Aehnlichkeit der Dreyecke auch noch bekannt seyn wird. Es kann also von den drey Winkeln und drey Seiten gegeben seyn:

gegeben,	es wird also	gesucht
a) eine Seite und zwey Winkel. Es mögen nun diese Winkel an der Seite liegen oder nicht, so sind doch, wenn zwey Winkel gegeben sind, wirklich alle drey gegeben, weil alle drey zusammen 180° ausmachen.	die beyden übrigen Seiten.	
b) zwey Seiten und ein Winkel. Dieser eine Winkel sey 1) nicht von den beyden Seiten eingeschlossen, also einer Seite entgegengesetzt.	Die beyden übrigen Winkel und die dritte Seite.	
2) Dieser nebst den gegebenen zwey Seiten gegebene eine Winkel sey von beyden Seiten eingeschlossen.	Die beyden andern Winkel und die dritte Seite.	
c) Alle drey Seiten.	Die drey Winkel.	

Dieses sind alle Fälle, die bey der Berechnung der Dreyecke möglich sind, wie man bey einem leichten Nachdenken selbst finden wird.

§. 499. Erstlich nun von rechtwinklichten Dreyecken. Wir haben gleich zu bemerken, daß auf alle Fälle ein Winkel, nemlich der rechte Winkel desselben, bekannt sey. Also es sey nach (a) §. 498 in einem rechtwinklichten Dreyecke ABC Fig. 273 die Hypotenuse AB, und ein schiefer Winkel ABC gegeben; jetzt sind wirklich zwey Winkel gegeben, nemlich der bey B, und der rechte bey C, also alle drey Winkel bekannt. Man kann also hier noch suchen die Seite AC und die Seite BC. Wir wollen erstlich AC suchen.

Fig. 273.

Wenn man die gegebene Hypotenuse AB als den Radius eines Cirkels betrachtet, da das Centrum des Cirkels in B, so wird AC der Sinus des Winkels ABC, der gegeben ist, denn AC steht auf BC unter einem rechten Winkel. Man kann also daher schließen: AB : AC = rad. : sin. ABC, oder weil man AC sucht, rad. : sin. ABC = AB : AC, also $AC = \frac{AB \cdot \sin. ABC}{rad.}$

oder $\frac{AB \cdot \sin. ABC}{\sin. totus}$

Exempel: Es sey AB = 459 Fuß, der Winkel ABC = 5°, so wäre also AC =

459

459. sin. 50°, und das logarithmisch berechnet:

sin. totus

log. : 459 = 2,6618127

+ log. sin. 50° = 9,8842540 addirt

12,5460667

davon abgezogen

log. sin. totus = 10,0000000

giebt 2,5460667.

Diesen Logarithmen in den Tafeln für die natürlichen Zahlzeichen aufgesucht, weil man hier die AC oder eine Länge sucht, giebt für diesen Logarithmen die Zahl 351,6, welches die Größe AC ist.

Man sucht die andere Seite BC des Triangels ABC Fig. 273 aus den oben gegebenen Datis. Wenn AB als der Radius betrachtet wird, AC als der Sinus des Winkels ABC, der gegeben war, so kann BC als der Cosinus dieses Winkels angesehen werden. Und man kann daher sehr richtig also schließen: rad. : cos. ABC = AB : BC und BC, also = $\frac{\text{cos. ABC . AB.}}{\text{rad.}}$

Es mögen die Maaßen des vorigen Exempels bey diesem Exempel gleichfalls bleiben, so wird hier BC = $\frac{\text{cos. 50°. 459,}}{\text{sinus totus}}$ also das logarithmisch berechnet, giebt

log.

log. col. 5° = log. sin. 4° = 9,8080675
+ log. 459 = 2,6618127 addirt

12,4698802
— log. sinus totus = 10,0000000

giebt 2,4698802.

In den Tafeln der natürlichen Zahlzeichen diesen Logarithmen gesucht, so gehört er zu 295, und dieses ist die Größe von BC.

§. 500. Es sey aber nun Fig. 273 nicht die Hypotenuse AB, sondern einer der beyden Catheterum; etwa die BC, und ein schiefer Winkel ABC gegeben; man sucht die übrigen beyden Seiten, nemlich die Hypotenuse AB, und die Seite AC. Wir wollen erstlich die Seite AC suchen. Wenn man BC als einen Radius ansieht, so kann man AC als die Tangente des Winkels ABC betrachten §. 459, und alsdenn würde man schließen können: rad. : tang. ABC = BC : AC, und AC = BC . tang. ABC.
rad.

Es sey BC = 601, der Winkel ABC = 5°, so ist AC = logarithmisch berechnet, also zu finden:

log.

log. 601 = 2,7788745
+ log. tang. 5° = 10,0761865 addirt

12,8550610

— log. sin. tot. = 10,0000000

2,8550610.

Dieser Logarithme kömmt in den Tafeln der natürlichen Zahlzeichen am nächsten, dem für die Zahl 716,3, welches also die AC ist. Man hätte aber auch können diese AC aus den gegebenen Dingen, nemlich der BC, und dem Winkel ABC, auf eine solche Art finden, daß man AB als den Radius betrachtet hätte, so wäre AC = Sinus, und BC = Cosinus des Winkels ABC geworden, und man hätte schließen können: cos. ABC : sin. ABC = BC : AC, wo eben das für AC herauskommen muß, wenn man eben die Data annimmt, und AC wäre =

$$\frac{BC \cdot \text{sin. } ABC}{\text{cos. } ABC}$$

Man nimmt aber lieber solche Proportionen, worinn der Radius vorkömmt, weil solches die Rechnung kürzer macht, man mag nun die Zahlen oder ihre Logarithmen gebrauchen.

Nun wollen wir aus der gegebenen BC und dem Winkel ABC die Hypotenuse AB suchen. Man betrachte nun AB als den Radius, AC als den Sinus, und BC als den Cosinus, so

läßt

läßt sich schließen: cos. ABC : rad. = BC : AB, und $AB = \frac{BC \cdot rad.}{\cos ABC}$

Exempel: Es bleibe BC = 601, der Winkel ABC = 5°, so ist AB logarithmisch berechnet:

log. 601 = 2,7788745
+ log sin. tot. = 10,0000000 addirt
12,7788745
− log. cos. 5° oder
log. sin. 4° = 9,8080675 abgezogen
2,9708070.

Dieser Logarithme gehört am nächsten der Zahl 935, welches denn die AB ist. Anstatt dieser Art, die AB zu finden, hätte man sie auch durch die Secanten finden können. Wenn man BC, wo B das Centrum, als den Radius betrachtet hätte, so wäre AB die Secante des Winkels ABC, so wie die AC die Tangente desselben wäre, und man hätte schließen können: rad. : secans ABC = BC : AB, und AB wäre $= \frac{BC \cdot sec. ABC}{sin. totus}$.

Weil in den wenigsten Tafeln Logarithmen für die Secanten sind, so wäre es mit Zahlen zu berechnen oft unbequem, und man sieht auch, daß man die AB aus den gegebenen Datis, ohne die Secante mit in die Rechnung zu bringen, hat finden können. Wir wollen doch aber nur

dieses eine Exempel ausrechnen, um unsern Lesern die Probe davon zu machen. Es mag BC eben wol = 601, und der Winkel ABC = 50° seyn. Wir müssen hier mit Zahlen rechnen, weil in den gewöhnlichen kleinen Tafeln keine Logarithmen für die Secanten sind.

Der Secans von 50° = 15557238

multiplicirt mit 601 — 601

15557238

933434280

9349900038.

Dieses dividirt durch den Sinus totus 10000000, giebt 934,99.... oder fast 935 für die AB, welches wir auch aus dem vorhergehenden Exempel auf die vorhergehende Art erhielten.

Der Winkel ABC, welcher hier nun gegeben ist, liegt an der gegebenen Seite BC. Wenn aber nun nicht dieser Winkel, sondern nebst der BC der Winkel A gegeben wäre? Auch alsdenn würde man doch auf die angezeigte Art verfahren können. Denn man konnte den Winkel B leicht finden, weil der Winkel C ein rechter Winkel ist, und A wäre gegeben, so wäre der Winkel B allezeit = 90° — Winkel A. Es wäre hier z. E. der Winkel A = 40°, so wäre B = 90° — 40° = 50°.

Dieses wären die Betrachtungen über (a) §. 498 von den rechtwinklichten Dreyecken, wenn nemlich eine Seite und zwey Winkel gegeben sind.

Die

Die gegebene Seite könnte entweder die Hypotenuse oder einer der Catheterum seyn, und die andern beyden Seiten wären zu suchen.

§. 501. Es sey nun nach (b, 1) §. 498 beym rechtwinklichten Dreyeck zwey Seiten, und ein Winkel, der nicht eingeschlossen ist, gegeben. Unter diesem Winkel, der nicht eingeschlossen ist, wird bey dieser Aufgabe der in jedem solchen Dreyecke befindliche rechte Winkel verstanden. Denn wäre außer diesem noch ein anderer nicht eingeschlossener Winkel nebst zwey Seiten gegeben, so wären dadurch alle drey Winkel bekannt, also die Winkel wären alsdenn nicht mehr nöthig zu suchen. Die übrige dritte Seite könnte man nun alsdenn nach den Sätzen, die wir beym ersten Falle in dem §. 499 und 500 aufgelöst haben, finden, oder auch ohne dieselben durchs pythagorische Problem, wodurch man sie gemeiniglich findet. Daher wir auch von deren Findung bey diesem Falle nichts zu sagen nöthig haben, weil wir wissen, wenn man zwey Seiten eines rechtwinklichten Triangels kennt, die dritte leicht durchs pythagorische Problem gefunden wird. Dieser Fall also nach (b, 1) §. 498 reducirt sich auf folgende einzige Aufgabe und deren Auflösung:

Fig. 273. Aus der Hypotenuse AB und einem Catheius (hier mag es seyn) AC die schiefen Winkel A und B zu finden. Es leuchtet leicht hervor, daß man nur einen zu finden nö-

thig

thig hat, um auch den andern, der sein Complement zu 90° ist, zu wissen. Wenn man AB als den Radius betrachtet, so ist AC der Sinus des Winkels bey B, und BC sein Cosinus, oder der Sinus des Winkels bey A. Man kann also schließen: AB : AC = rad. : sin ABC

oder weil auch AC der Cosinus des Winkels bey A ist, so läßt sich gleichfalls schließen:

AB : AC = rad. : cos. BAC

woraus man also, wenn man den Cosinus von A hat, auch seinen Sinus, folglich den Winkel weiß.

Wir wollen es durch Exempel erläutern. Es sey AB = 636, und AC = 386, so ist, weil Sinus ABC = $\frac{\text{rad. AC}}{\text{AB}}$, dieses logarithmisch berechnet:

log. sin. totus	=	10,0000000
+ log. 386	=	2,5865873 addirt
		12,5865873
— log. 636	=	2,8034571
abgezogen		9,7831302.

Diesen Logarithmen in den Sinustafeln aufgeschlagen (weil man hier Winkel sucht), so findet man, daß er beynahe zu dem Sinus von 37° 22′ gehört, und dieses wird also der Winkel bey B seyn, woraus sich der bey A leicht findet, er ist = 52° 38′. Bey der andern Proportion wäre

gleichfalls cos. BAC = $\frac{\text{rad. AC,}}{\text{AB}}$ dieses giebt hier auch 37° 22′, und also wiederum Sinus von A = 52° 38′.

Wollte man ja die Seite BC aus den gegebenen Datis trigonometrisch finden, so müßte man ferner schließen: rad.: cos. ABC = AB: BC, und also BC = $\frac{\text{AB. cos. ABC.}}{\text{rad.}}$ Denn der Sinus von ABC, also auch der Cosinus desselben, wurde durch die vorhergesuchten Winkel bekannt. Wenn alles in dem Exempel bleibt, wie es vorher war, so wird alsdenn, wenn man BC auf logarithmische Art setzt:

log. 636 = 2,8034571
+ log. cos. ABC
oder log. 52° 38′ = 9,9002403 addirt
= 12,7036974
— log. rad. = 10,0000000
2,7036974.

In den Tafeln für die natürlichen Zahlzeichen aufgesucht, gehört dieser Logarithme fast zu 505,5. Hätte man die BC durchs pythagorische Problem gesucht, so wäre, weil BCq = ABq — ACq, und also BC = √(ABq — ACq), und nach unserm Exempel BC = √(636² — 386²), welcher wirklich ausgezogen = 505,4... Man verfährt gewöhnlich auf diese Art; denn weil man selten

selten solche Logarithmen durch die Rechnung erhält, welche genau auf die Sinus der Winkel passen, und daher nur die nimmt, welche ihnen am nächsten sind, so kann man bey trigonometrischer Suchung solcher Linie, als BC, leicht Fehler begehen. Manchmal erfordern die Umstände keine große Genauigkeit, und denn ist die trigonometrische Suchung auf diese Art bequemer. Sonst wenn man Genauigkeit verlangt, ist es besser, daß man Linien aus Linien sucht, ohne die Winkel mit in die Rechnung zu bringen.

§. 502. Es sey nun ferner nach (b, 2) §. 498 beym rechtwinklichten Triangel zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, man sucht die andern beyden Winkel und die dritte Seite. Dieser eingeschlossene Winkel muß abermals der rechte Winkel seyn, und also müssen die beyden Seiten die beyden Catheti seyn, denn wäre es einer der schiefen Winkel nebst der Hypotenuse und einem der Cathetorum, so wären der gegebene und der rechte Winkel, also alle drey Winkel bekannt, die dritte Seite fände man denn am besten nach dem pythorischen Lehrsatz, oder wenn man die Winkel gefunden hat, auch trigonometrisch nach dem vorhergehenden Paragraphen. Es reducirt sich also dieser Fall zu b2 auf folgende Aufgabe, Fig. 274 aus den beyden Seiten oder Cathetis AC und CB die schiefen Winkel bey A und B zu finden. Man bedarf nur einen zu finden, so ist der andere von selbst bekannt. Fig. 274.

Wenn wir CA als den Radius betrachten, so ist CB die Tangente des Winkels BAC, oder des Winkels bey A. Wir können also schließen: CA : CB = rad. : tang. BAC, und also tang. BAC = rad. CB.
——
CA

Exempel: Es sey CA = 386, CB = 505,5, so ist tang. BAC logarithmisch gesucht:

log. 505,5 = 2,7037212
+ log. sin. tot. = 10,0000000
——
12,7.0.37212
— log. 386 = 2,5865873
——
10,1171339.

Dieses ist nun der Logarithme einer Tangente, und kömmt am nächsten der Tangente des Winkels $5^{\circ}\ 38'$, welches also der Winkel BAC ist.

Hätte man den Winkel ABC zuerst suchen wollen, so hätte man BC als den Radius, und AC als den Tangens von ABC betrachtet, und hätte gleichfalls geschlossen: BC : AC = rad. : tang. ABC, da man denn den Winkel ABC = $37^{\circ}\ 22'$ gefunden hätte. Die Hypotenuse AB trigonometrisch zu finden, könnte man nun, da man die schiefen Winkel weiß, die Hypotenuse AB als den Radius, AC als den Sinus ABC, und BC als seinen Cosinus betrachten, und nun schließen:

cos

cos. ABC : r = BC : AB, also $AB = \frac{BC \cdot rad.}{cos. ABC}$

das giebt nach unserm Exempel:

log. 505,5 = 2,7037212

+ log. sin. tot. = 10,0000000

12,7037212

— log. cos. ABC, hier cos. 37° 22′, oder sin. 52° 38′ = 9,9002403

2,8034809.

Diesen Logarithmen unter den natürlichen Zahlzeichen unter der Charakteristik 3 gesucht, giebt 636,1, als welcher Zahl er am nächsten kömmt.

§. 503. Wir kommen nun auf den dritten Fall, oder zu (c, §. 498) aus den drey gegebenen Seiten die Winkel zu finden. Weil beym rechtwinklichten Triangel Fig. 274 ABC allezeit ein Winkel bekannt ist, nemlich der rechte, und nun auch alle drey Seiten bekannt seyn sollen, so kann diese Aufgabe nach den Lehren der vorhergehenden Paragraphen aufgelöst werden, und haben wir nicht nöthig, uns weiter dabey aufzuhalten. Wir haben nun alle Fälle, die bey rechtwinklichten Triangeln vorkommen können, berührt.

§. 504. Von der Auflösung des gleichschenklichten Triangels. Auch bey

diesem werden wir viele Vortheile in der Auflösung derselben antreffen.

Wir erinnern uns erstlich aus der Geometrie, daß, wenn Fig. 274 bey einem gleichschenklichten Triangel ABC ein Winkel gegeben ist, welcher es auch sey, so sind sie alle drey bekannt. Denn ist der an der Spitze bey C gegeben, den wir u nennen wollen, so sind die andern beyden bey A und B sein Complement zu 180°, und weil, da es ein gleichschenklichter Triangel, wo der Winkel A = B ist, so ist jeder derselben $= \frac{180° - u.}{2}$

Wenn also z. E. der bey C oder $u = 53°$, so wäre jeder der übrigen beyden $= \frac{180° - 53°}{2} = 63° 30'$.

Gleichfalls wenn einer der beyden an den gleichen Schenkeln BC oder AC liegende bekannt ist, so sind sie auch alle drey bekannt. Denn die Winkel A und B sind gleich, und der bey C wäre ihrer beyden Complement zu 180°. Es wäre also, wenn man einen derselben an den gleichen Schenkeln liegenden = e nennte, $u = 180° - 2e$, hier im Exempel $180 - 2 . 63° 30' = 180° - 127° = 53°$.

Wir wissen ferner aus §. 66 ff. der Geometrie, daß, wenn man von der Spitze C eines gleichschenklichten Triangels Fig. 274 ein Perpendikel CD auf die Grundlinie desselben fallen läßt, erstlich der Winkel an der Spitze C in zwey gleiche Theile getheilt wird, oder alsdenn ist ACD

$= \frac{1}{2}$ACB; ferner auch, daß die Basis AB dadurch in zwey gleiche Theile getheilt wird, oder alsdenn ist AD $= \frac{1}{2}$AB, und man bekömmt in dem gleichschenklichten Triangel ABC zwey gleiche und ähnliche, oder zwey **kongruente** rechtwinklichte Triangel ACD und BCD.

§. 505. Diese Betrachtungen erleichtern uns die Auflösung der gleichschenklichten Dreyecke ungemein, und wir wollen daraus drey wichtige Sätze herleiten, die uns die Auflösung aller Fälle bey gleichschenklichten Triangeln geben werden. Um bequemer uns auszudrücken, wollen wir den Winkel an der Spitze, oder den Winkel ACB, wie wir schon in dem vorhergehenden Paragraphen gethan, $=$ u, also den Winkel ACD $=$ BCD $= \frac{1}{2}$u nennen.

Die eine der beyden gleichen Seiten, als AC oder BC, mag $=$ a seyn. Und endlich die Grundlinie oder die AB $=$ b heißen, also die AD $= \frac{1}{2}$b. Der Sinus totus oder Radius heiße r.

So finden wir erstlich, wenn wir eines der beyden rechtwinklichten kongruenten Dreyecke, worinnen der Triangel ABC getheilt ist, ansehen, und eine gleiche Seite oder AC als den Radius annehmen; da wir denn die AD als den Sinus von ACD, oder von $\frac{1}{2}$u betrachten können, folgende Proportion;

1) AC : AD $=$ rad. : sin. $\frac{1}{2}$u oder in den benennten Zeichen

a : $\frac{1}{2}$b $=$ rad. : sin. $\frac{1}{2}$u

also $\sin. \frac{1}{2} u = \frac{\text{rad.} \cdot \frac{1}{2} b}{a} = \frac{rb}{2a}$, oder auf teutsch nach der ersten Formel. Der Sinus des halben Winkels an einer der Seiten ist gleich dem Sinus totus multiplicirt mit der halben Grundlinie, und dieses Produkt dividirt durch die eine Seite.

Ferner 2) wenn man die Glieder der vorigen Proportion umkehrt, so gilt

$AD : AC = \sin. \frac{1}{2} u : \text{rad.}$ oder

$\sin. \frac{1}{2} u : \text{rad.} = AD : AC$ und in den angenommenen Zeichen

$\sin. \frac{1}{2} u : \text{rad.} = \frac{1}{2} b : a$

also $a = \frac{\text{rad.} \cdot \frac{1}{2} b}{\sin. \frac{1}{2} u} = \frac{r \cdot b}{2 \sin. \frac{1}{2} u}$, oder nach der ersten Formel. Die Seite ist gleich dem Sinus totus, multiplicirt mit der halben Grundlinie dividirt durch den Sinus des halben Winkels an der Spitze.

Und endlich 3) weil nach 1) $AC : AD = \text{rad.} : \sin. \frac{1}{2} u$, also auch gilt

$\text{rad.} : \sin. \frac{1}{2} u = AC : AD$

oder in Zeichen $\text{rad.} : \sin. \frac{1}{2} u = a : \frac{1}{2} b$

also $\frac{1}{2} b = \frac{a \cdot \sin. \frac{1}{2} u}{\text{rad.}}$, folglich $b = \frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2} u}{\text{rad.}}$,

oder die halbe Grundlinie ist gleich der einen Seite, multiplicirt mit dem Sinus des halben Winkels an der Spitze, und dieses Produkt dividirt durch den Sinus to-

torus, woraus man denn gleich die ganze Grundlinie findet.

§. 506. Es läßt sich aber noch ein anderer Werth von b oder der Grundlinie in einem gleichschenklichten Triangel finden, nemlich weil Fig. 274, wie wir gesehen haben, wenn der Winkel ACB = u gesetzt wird, DCB = $\frac{1}{2}$ u, also DB = sin. $\frac{1}{2}$ u (denn bey D ist ein rechter Winkel), so ist CD = cos. $\frac{1}{2}$ u. Dieses ist nun schon bekannt, aber CD ist auch zugleich der Sinus von CBD, oder kurz von B, es ist also die B das Complement zu $\frac{1}{2}$ u zu 180°. Nun ferner, weil die Seiten eines Triangels sich verhalten, wie die Sinus der ihnen entgegen stehenden Winkel §. 494, so werden wir gleichfalls auch schliessen können:

AB : CA = sin. ACB : sin. B oder in Zeichen

b : a = sin. u : cos. $\frac{1}{2}$ u folglich auch

cos. $\frac{1}{2}$ u : sin u = a : b

folglich ist $b = \frac{a \cdot \sin. u.}{\cos. \frac{1}{2} u}$

§. 507. In dem §. 505 fanden wir b = $\frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2} u.}{\text{rad.}}$ Der Werth von b in dem vorhergehenden Paragraphen, und diese müssen sich nun gleich seyn, weil sie beyde = b sind,

also $\frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2}u}{rad.} = \frac{a \cdot \sin. u}{\cos. \frac{1}{2}u}$: a, folglich

$\frac{2 \sin. \frac{1}{2}u}{rad.} = \frac{\sin. u}{\cos. \frac{1}{2}u}$. $\cos. \frac{1}{2}u$

$\frac{2 \sin. \frac{1}{2}u \cdot \cos. \frac{1}{2}u}{rad.} = \sin. u$ oder = dem Sinus des Winkels an der Spitze in dem gleichschenklichten Triangel, oder = dem Sinus des Winkels ACB. Diesen Werth für den Sinus u werden wir nachher bey der Betrachtung des Flächeninhalts der Polygone gebrauchen können.

Anmerkung. Durch die §. 505 angeführte drey Formeln werden sich nun die gleichschenklichten Dreyecke leicht auflösen lassen. Sie sind, um sie nochmal zu wiederholen:

1) $\sin. \frac{1}{2}u = \frac{rb}{2a}$ 2) $a = \frac{rb}{2 \sin. \frac{1}{2}u}$ 3) $\frac{1}{2}b = \frac{a \sin. \frac{1}{2}u}{rad.}$.

§. 508. Wir wollen nun, um desto deutlicher zu seyn, hier bey den gleichschenklichten Triangeln eben so verfahren, wie wir bey den rechtwinklichten Triangeln verfuhren. Also nach (a) §. 498 es sey in einem gleichschenklichten Triangel ABC Fig. 274 gegeben **eine** Seite und zwey Winkel, man sucht die andern beyden Seiten. Wir wissen aus dem vorhergehenden Paragraphen, daß im gleichschenklichten Triangel nur

ein

ein Winkel gegeben seyn darf, um alle drey zu kennen, also die Winkel sind uns aus diesen Datis sattsam bekannt, man sucht die beyden Seiten. Die gegeben Seite ist nun entweder die Grundlinie AB, oder einer der gleichen Schenkel AC.

Ist die Grundlinie AB gegeben, so ist eine jede der gleichen Seiten, oder $a = \frac{rb}{2 \sin. \frac{1}{2}u}$

nach vorhergehendem Paragraphen. In dieser Formel ist uns alsdenn alles bekannt, denn weil wir aus den gegebenen Datis die Winkel, also auch den Winkel an der Spitze bey C oder u kennen, so kennen wir auch die Hälfte davon, oder $\frac{1}{2}u$.

Exempel: Es sey AB = 292, einer der Winkel, es sey der bey B = 63° 30′, folglich der Winkel an der Spitze, oder u = 53°, also $\frac{1}{2}u$ = 26° 30′, so würde das Exempel also durch Logarithmen zu berechnen seyn:

log. sinus totus = 10,0000000
\+ log. von b, hier
log. 292 = 2,4653828 addirt

12,4653828

— log. 2 sin. $\frac{1}{2}$u, hier
log. 2 sinus 26° 30′ = 9,9505574 abgezogen

2,5148254.

Dieser Logarithme unter der Charakteristik 3 aufgeſ

gesucht, gehört am nächsten zu 327,2, welches auch die AC ist.

Es möchte noch einem Anfänger Schwierigkeiten machen, wie man 2 sin. $\frac{1}{2}$ u durch Logarithmen ausdrückt, man erinnere sich aber nur an die gelehrten Regeln der Arithmetik in dem Kapitel von Logarithmen, so weiß man, daß dieser Ausdruck logarithmisch wäre: log. 2 + log. sin. $\frac{1}{2}$ u, also in unserm gegebenen Exempel haben wir log. 2 zum log. sin. 26° 30′ addirt, und alsdenn von dem schon durch die Addition des log. sinus totus + log. b erhaltenen Logarithmen abgezogen.

Es mag nun eine der Seiten, als AC oder a in der Formel, und ein Winkel, es sey bey B, gegeben seyn, so hat man nun noch die Grundlinie AB zu finden, welches in den Formeln die b ist. Also hatte man nun nach §. 507 $\frac{1}{2}$ b = $\frac{a \cdot \text{sin. } \frac{1}{2} u}{\text{rad.}}$

Es sey AC = 327,2, ebenfalls auch u = 53°, also $\frac{1}{2}$ u = 26° 30′, so würde die halbe Grundlinie AB oder $\frac{1}{2}$ b logarithmisch also gefunden werden:

log. 327,2	=	2,5148133
+ log. sin. 26° 30′	=	9,6495274
		12,1643407
— log. sinus totus	=	10,0000000
		2,1643407.

Dieser

Dieser Logarithme in den natürlichen Zahlzeichen gesucht, gehört am nächsten zu der Zahl 146, das ist nun $\frac{1}{2}$ b, oder die halbe Grundlinie. Also die ganze Grundlinie AB, oder $b = 146 . 2 = 292$, welches auch die AB ist.

§. 509. Es sey nun nach (b, 1) §. 498 in einem gleichschenklichten Triangel ABC Fig. 274 gegeben zwey Seiten, und der nicht von ihnen eingeschlossene Winkel: man sucht die andern beyden Winkel und die dritte Seite. Weil es ein gleichschenklichter Triangel ist, so sind nach §. 504, da ein Winkel gegeben ist, dadurch alle drey Winkel bekannt worden, also nicht weiter zu suchen nöthig. Man muß also noch die dritte Seite suchen. Weil die gegebenen beyden Seiten, die Grundlinie und ein Schenkel bekannt sind, so ist auch nun schon die dritte Seite bekannt, weil sie dem andern Schenkel gleich ist. Es ist hier also der einzige Fall, daß die beyden gegebenen Seiten die beyden gleichen Schenkel wären, und man also noch die Grundlinie oder AB zu suchen hätte. Diese können wir nun nach §. 507 aus der gegebenen Formel finden: $\frac{1}{2} b = \frac{a \cdot \sin. \frac{1}{2} u}{r}$, und daraus das ganze b, wie wir eben in dem Exempel des vorstehenden Paragraphen gezeigt haben.

Es soll aber nun nach (b, 2) §. 498 gegeben seyn zwey Seiten und der eingeschlossene Win-

Winkel. Auch bey diesem Falle sind abermal dadurch alle Winkel bekannt. Es gelten alle die Betrachtungen, die wir eben in diesem Paragraphen angestellt haben, man hat nur noch die Grundlinie zu suchen, wenn alle die beyden gleichen Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben wären.

§. 510. Endlich mögen nach (c) §. 498 in dem gleichschenklichten Triangel ABC Fig. 274 alle drey Seiten gegeben seyn: man sucht die drey Winkel. Es ist uns schon bekannt, daß wir in einem gleichschenklichten Triangel nur die Größe eines Winkels wissen dürfen, um auch die andern beyden zu kennen. Nun haben wir §. 507 eine Formel für den halben Winkel an der Spitze C, welche aus Werthen der Seiten besteht, und die wir also in diesem Falle gebrauchen können, weil uns alle drey Seiten gegeben sind. Sie ist $\sin. \frac{1}{2} u = \frac{rb}{2a}$.

Exempel: Fig. 274. Es sey AB = 292, welches also die b in der Formel ist, $= a . \sin. u : \cos. \frac{1}{2} u$ oder $2a . \sin. u$; einer der gleichen Schenkel oder rad.

AC sey = 327,2, welches die a in der Formel ist, so ist $\sin. \frac{1}{2} u$ logarithmisch berechnet = log. sin. totus + log. 292 − (log. 2 + log. 327,2)

also log. sin. tot. = 10,0000000
+ log. 292 = 2,46533828 addirt

12,46533828
−(log. 2 + log. 327,2) = 2,8158433 subtrah.

nemlich die beyden Logarithmen addirt, und denn den dadurch erhaltenen Logarithmen von dem erst gefundenen subtrahirt. 9,6495395.

Diesen Logarithmen des Sinus $\frac{1}{2}$ u in den Sinustafeln aufgesucht, so findet man, daß er am nächsten zum Winkel 26° 3′ gehört. So groß ist also der Winkel $\frac{1}{2}$ u, oder der Winkel ACD = BCD. Folglich der ganze Winkel an der Spitze = (26° 3′) . 2 = 53°, also die andern beyden Winkel bey A und B = 180 − 53 = 127°, und da beyde, weil der Triangel gleichschenklicht ist, gleich sind, jeder = $\frac{127°}{2}$ = 63° 30′.

§. 511. Von den gleichseitigen Triangeln haben wir nicht nöthig weiter zu reden, ihre Winkel sind allezeit jeder = 60°. Die hat man also gar nicht nöthig zu suchen, und wenn eine Seite von ihnen gegeben ist, so sind sie alle bekannt, weil sie alle gleich sind.

§. 512. Wir reden nun von der Auflösung der schiefwinklichten Dreyecke, oder von der all-

allgemeinen Auflösung der Dreyecke, weil auch die vorher betrachteten Dreyecke sich also auflösen lassen. Wir betrachten gleichfalls die Ordnung, die in §. 498 angezeigt worden.

Es sey also (a) §. 498 gegeben in dem schiefwinklichten Dreyecke ABC Fig. 275 eine Seite AC, und zwey Winkel, hier bey A und B, man sucht die andern beyden Seiten AB und CB, denn der dritte Winkel ist schon aus dem gegebenen bekannt.

Fig. 275.

Weil man nun also drey Winkel des Dreyecks durch die Data dieser Aufgabe kennt, so kennt man also auch denjenigen, welcher der gegebenen Seite, hier der AC, entgegen gesetzt ist. Man erinnere sich nun an den Lehrsatz des §. 494, die Seiten verhalten sich, wie die Sinus der ihnen entgegen stehenden Winkel, und auch umgekehrt, so wird man schließen können, wenn man die CB sucht:

$$\text{sin. B} : \text{sin. A} = \text{AC} : \text{CB} \text{ und } \text{CB} = \frac{\text{sin. A . AC.}}{\text{sin. B}}$$

Sucht man die AB, so würde man also schließen müssen:

$$\text{sin. B} : \text{sin. C} = \text{AC} : \text{AB} \text{ und } \text{AB} = \frac{\text{sin C . AC.}}{\text{sin. B}}$$

Exempel: Es sey AC = 540, der Winkel bey A 47°; der Winkel bey B = $59^\circ\ 8'$, also der Winkel bey C als dasjenige, was noch an 180 Graden fehlt, so viel Größe der Winkel, der ganze Triangel hat, = $73^\circ\ 52'$, so wird also

$BC = \frac{\sin. 47^\circ . 540}{\sin. 59^\circ 8'}$, und $AB = \frac{\sin. 73^\circ 52' . 540}{\sin. 59^\circ 8'}$.

Dieses wollen wir nun durch Logarithmen berechnen, erstlich BC also:

log. sin. 47° = 9,8641275

+ log. 540 = 2,7323938 addirt

12,5965213

— log. sin. $59^\circ 8'$ = 9,9336713 subtrah.

2,6628500.

Diesen Logarithmen unter den natürlichen Zahlzeichen unter der Charakteristik 3 gesucht, so findet man, daß er fast zu der Zahl 460,1 gehöre, welches also die BC ist. Nun für AB

log. sin. $73^\circ 52'$ = 9,9825506

+ log. 540 = 2,7323938

12,7149444

— log. sin. $59^\circ 8'$ = 9,9336713

2,7812731.

Dieser Logarithme paßt fast zu der Zahl 604,3; welches also die AB ist.

Es soll nun aber unter den gegebenen zwey Winkeln und einer Seite der eine Winkel stumpf seyn, so wissen wir schon aus §. 457 und 496, daß man anstatt des Sinus des stumpfen Wins

kels den Sinus des spitzen Nebenwinkels setzen müsse.

Fig. 276. Es sey also Fig. 276, um dieses durch ein Exempel zu erläutern, der Winkel bey A = 104°, der bey B = 42°, und die Seite AC = 462. Wenn man schließt: sin. B : AC = sin. A : BC und sin. B : AC = sin. C : AB, so wäre CB = $\frac{\text{sin. A . AC}}{\text{sin. B}}$ und AB = $\frac{\text{sin. C . AC}}{\text{sin. B}}$, allein bey der ersten Formel für CB anstatt A müßte man hier im Exempel den Sinus des Nebenwinkels von 104°, nemlich den Sinus von 76° nehmen, und es würde BC durch Logarithmen also berechnet:

log. sin. 76° = 9,9869041
+ log. 462 = 2,6646420 addirt
12,6515461
− log. sin. 42° = 9,8255109
2,8260352.

Diesen Logarithmen unter der Charakteristik 3 gesucht, so findet man, daß er am nächsten der Zahl 669,9 sey. Es ist dieses Verfahren schon aus dem §. 496 sattsam deutlich, aber es wird noch mehr dadurch deutlich werden, wenn man die Grundlinie AB verlängert, und die punktirte Linie CD = AC zieht, welches man leicht kann, wenn man AD zwischen dem Cirkel nimmt, und aus C den Bogen AD zieht, da denn CD und AC

AC Radii sind. Ist aber CD = AC, so ist der Triangel CDA gleichschenklicht, also der Winkel bey D gleich dem spitzen Winkel bey A, hier dem Nebenwinkel von 104°. Betrachtet man nun den Triangel DCB, so würde man, wenn man die CB darinn finden wollte, schließen müssen: sin. B: sin. D = CD: CB, allein der sin. B ist noch eben derselbe, als in dem stumpfen Triangel ACB. Ferner der sin. D ist gleich dem Sinus des stumpfen Nebenwinkels bey A, weil der Triangel CAD gleichschenklicht ist, und die Winkel des D und A daher gleich sind, auch CA und CD von einerley Größe. Man sieht also hier den Grund, warum man bey stumpfen Winkeln die Sinus der Nebenwinkel ganz richtig gebraucht. Man will nemlich nur die Größen der Seiten und ihre Verhältnisse wissen, und es ist, wie man nun leicht einsieht, ganz richtig, daß zwey Triangel, davon der eine stumpfwinklicht, der andere bloß spitzwinklicht ist, doch zwey ganz gleiche Seiten haben können, ob sie auch schon in ihrer Größe und Inhalte sehr verschieden sind, wie man dieses an den beyden Triangeln hier in der Figur 277 ABC und DBC findet, in welchen die Seiten AC und CD gleich sind. Fig. 277.

§. 513. Es sey nun nach (b, 1) §. 498 gegeben zwey Seiten und der nicht eingeschlossene Winkel, der also einer Seite entgegen gesetzt seyn muß, man sucht die beyden übrigen Winkel und die dritte Seite. Es sey also Fig. 277 in dem

Triangel ABC gegeben die Seite AC und die Seite BC, nebst dem Winkel bey A, welcher der Seite BC entgegen gesetzt ist. Wir machen wieder die Anwendung des Lehrsatzes §. 494, und suchen erstlich die Winkel dieses Triangels, oder vielmehr nur noch einen, weil alsdenn der dritte von selbst bekannt ist. Wir schließen daher laut des Lehrsatzes §. 494:

$$CB : AC = \text{sin. } A : \text{sin. } B$$

$$\text{daher sin. } B = \frac{\text{sin. } A \,.\, AC.}{CB}$$

Exempel: Es sey AC = 319, CB = 432, der Winkel bey A = 4° 9′, so fände man den Winkel bey B also:

log. sin. 4° 9′ = 9,8182474
+ log. 319 = 9,5037907

12,3220381
− log. 432 = 2,6354837

9,6865544 = log. sin. des Winkels B.

Dieser Logarithme gehört am nächsten zu dem Sinus des Winkels 29° 4′, welches also der Winkel B ist, folglich ist der Winkel bey C = 109° 47′, also stumpf.

Nunmehr ist die dritte Seite AB leicht nach der Auflösung des ersten Falls, den wir eben berechnet haben, zu finden. Hier würde man nun

schlies

schließen: sin. A : sin. C = CB : AB, und AB = $\frac{\text{sin. C . CB.}}{\text{sin. A}}$

Bey diesem Exempel, da der Winkel bey C stumpf ist, wird man sich erinnern, daß man den Sinus seines Nebenwinkels, der ihn zu 180° ergänzt, nehmen müsse. C ist hier im Exempel 109° 47′, also muß man nun anstatt seines Sinus, den man nicht hat, den Sinus von 70° 13′ nehmen. Es würde dieses Exempel also logarithmisch berechnet, wenn die erstern Data bleiben.

log. sin. 70° 13′ = 9,9735801
+ log. 432 = 2,6354837

12,6090638
− log. sin. 41° 9′ = 9,8182474

2,7908164 = log. AB.

Dieser Logarithme gehört unter der natürlichen Zahlzeichen Logarithmen, unter der Charakteristik 3 aufgesucht, am nächsten zu 617,8, welches auch die AB ist.

Wir suchten erstlich bey dieser Aufgabe die Winkel in dem Triangel ABC, und fanden den Logarithmen für den Winkel bey B, indessen wissen wir auch, daß dieser Logarithme für den Winkel B nicht nur allein gehört, sondern auch für seinen stumpfen Nebenwinkel, der ihn zu 180° ergänzt. Wie werden wir wissen, ob der Wins-

kel bey B stumpf oder spitz ist? Weiß man schon offenbar, daß schon ein stumpfer Winkel außer diesem in dem Triangel sich befände, der etwa gegeben wäre, so wüßten wir gewiß, daß er spitz wäre; wäre das aber nicht, und es wäre ein spitzer Winkel, wie wir bey A gegeben, so muß man darauf sehen, ob die Seite, die an dem gegebenen Winkel anliegt, als hier die AC, größer oder kleiner, als die BC, die ihm gegenüber steht, ist. Ist die gegenüber stehende hier BC größer, als die anliegende hier AC, so ist der Winkel bey B gewiß spitz, weil nach §. 71 die größere Seite allezeit dem größern Winkel entgegen gesetzt ist. Ist also die entgegen gesetzte Seite CB größer, so ist der Winkel bey A nothwendig größer, als der bey B, und wenn der bey A schon ein spitzer Winkel, so muß der bey B noch vielmehr seyn.

Allein wenn die anliegende Seite an dem gegebenen Winkel, hier die AC, größer ist, als die entgegen gesetzte, hier BC, so bleibt die Sache unausgemacht, und der Winkel bey B kann stumpf oder spitz seyn, alsdenn muß man es aus andern Umständen schließen, was er von beyden ist, oder es muß gegeben seyn.

Denn bekümmerte man sich nicht darum, was er wäre, stumpf oder spitz, so könnte man auch den Winkel bey C nicht bestimmen, also auch nicht die Seite AB, gemeiniglich weiß man es aber schon zum voraus, was er von beyden ist, also daß hier selten Irrungen vorkommen, und ist er denn wirklich stumpf, und man hat

den

den Sinus für ihn gefunden, so versteht es sich von selbst, daß man anstatt des spitzen Winkels, den dieser Sinus anzeigt, den stumpfen Nebenwinkel nimmt, wozu eben der Sinus gehört.

Wir haben von diesem Falle Fig. 278 eine Zeichnung gegeben. Man betrachte den Triangel ACB und acb. In dem Triangel ACB ist gegeben AC und CB, und der Winkel bey A. Es ist auch AC größer als CB, die Sache wegen des Winkels bey B, ob er stumpf oder spitz ist, wird dadurch noch nicht bestimmt. Wir haben die Cb noch gezogen, welche = CB ist. Denn wir haben CB zwischen dem Cirkel genommen, die eine Spitze in C gesetzt, und daraus den Bogen bB beschrieben, und wo er AB in b schnitt, die Cb gezogen, welche also = CB ist, weil beydes als Radii betrachtet werden können. Also ist in dem stumpfwinklichten Triangel ACb, und dem spitzwinklichten ACB, AC beyden gemein, der Winkel A gleichfalls auch CB = cb, und das waren die Data, dennoch aber die Winkel bey B und b, der eine spitz, der andere stumpf. Hier mußte also gesagt werden, ob der Winkel, den man aus den gegebenen Datis suchen sollte, spitz oder stumpf wäre, gemeiniglich lehrt es schon auch in der Praxi der Augenschein. Fig. 278.

§. 514. Wir kommen nun zu dem Falle (b, 2) §. 498, wenn zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben ist, man sucht alsdenn die beyden übrigen Winkel und die

dritte Seite. Ehe wir diese Aufgabe auflösen können, müssen wir erst noch zwey Sätze erklären, die wir zu der Auflösung derselben bedürfen. Den ersten haben wir schon in der Arithmetik §. 400 vorgetragen, nemlich aus der Summe zweyer Größen und der Differenz derselben die Größen selbst zu finden, wenn nemlich die Größen, weil sie noch unbekannt sind, x und y heißen, davon y die größte, und x die kleinste seyn soll. Wenn die Summe beyder Größen = S ist, die gegeben ist, und die Differenz beyder, die auch gegeben ist, = d, so ist die größte Größe von beyden oder $y = \frac{S + d}{2}$, und die kleinste Größe oder x $= \frac{S - d}{2}$, wie man dort nachlesen kann, wo wir es bewiesen haben.

§. 515. Der zweyte Satz, den wir noch wissen müssen, ist folgender Fig. 279. In jedem Dreyecke ABC verhält sich die Summe zweyer Seiten AC + AB zu ihrer Differenz AC − AB, wie die Tangente der halben Summe der beyden gegenüber stehenden Winkel zur Tangente der halben Differenz derselben, oder wenn wir den Winkel bey B = m, und den Winkel bey C = n nennen wollen, so ist dieser Satz in Zeichen ausgedrückt folgender:

Fig. 279.

AC

$$AC + AB : AC - AB = \text{tang.}\ \frac{m+n}{2} : \text{tang.}\ \frac{m-n}{2}.$$

Diesen Satz müssen wir nun jetzt beweisen. Man verlängere die Grundlinie AC, als den größten Schenkel unter den beyden, AC und AB, der dem größten Winkel bey B gegenüber steht, nehme BA zwischen dem Cirkel, und beschreibe mit BA aus A den halben Cirkel BDE, und ziehe die Chorde BE, so ist der △ABE ein gleichschenklichter Triangel, denn AB = AE, weil es beyde Radii sind. Also ist auch der Winkel o = dem Winkel S.

Man ziehe ferner durch den Punkt B eine Linie nach D, und verlängere sie oberwärts von unbestimmter Länge nach F hin, und ziehe mit der Chorde BE aus dem Punkte C eine Parallellinie, welche die DF irgendwo, hier in F, schneiden wird, und man erhält auf die Art bey F einen rechten Winkel, denn weil der Winkel DBE mit seinen Schenkeln BE und BD auf dem Diameter AE steht, so ist es nach §. 187 ein rechter Winkel, und weil FC parallel BE ist, so sind die Triangel DBE und DFC ähnlich §. 150, also muß der Winkel bey F dem Winkel DBE gleich, also auch ein rechter Winkel seyn. Der Triangel DFC ist also rechtwinklicht. Nun werde ich beweisen können, daß DF = der Tangente der halben Summe, der Winkel B und C in dem angenommenen Triangel ABC, oder daß DF =

tang. $\frac{m+n}{2}$, und BF = der tang. der halben Differenz, oder tang. $\frac{m-n}{2}$, und daß ferner DF : BF = AC + AB : AC − AB sey. So ist mein Satz erwiesen.

Es ist aber in dem △ABC u = o + r + t, weils ein Winkel an der verlängerten Seite §. 95

ferner in dem △ABE u = o + s

folglich o + r + t = o + s.

Ferner aber der △ABE gleichschenklicht, also ● = s, so ist

o + s = 2s

o + r + t = 2s : 2

o + r + t = s.

Der Winkel s ist also gleich der halben Summe der beyden Winkel bey B und C in dem Triangel ABC, den ich angenommen hatte.

Nun ist ferner, weil CF parallel BE, w = r, weils Wechselwinkel §. 76.

Es ist nun s = r + t nach §. 95

s = w + t, so ist auch anstatt r die

w gesetzt, also ist w + t auch = der halben Summe, weil s = der halben Summe ist.

Nun haben wir angenommen, der Winkel bey B sey der größte unter den beyden Winkeln bey B und C in dem Triangel ABC, und aus §. 400 der Arithmetik wissen wir, daß von zwey Größen die größte allezeit gleich sey der halben Summe plus der halben Differenz. Also ist nun o + r = der halben Summe plus der halben Differenz beyder Winkel bey B und C. Aber o war = s, und s war gleich der halben Summe der beyden Winkel, oder $s = \frac{o + r + t}{2}$, wie wir erwiesen haben; also ist auch o = der halben Summe der beyden Winkel, und folglich muß r = der halben Differenz seyn, weil o + r = der halben Summe + der halben Differenz, indem o + r der größte Winkel von B und C ist, welcher doch unter zwey Größen aus der halben Summe + der halben Differenz besteht.

Wir fanden aber auch, daß s = w + t, und da o = s, und da o = der halben Summe beyder Winkel B und C in dem △ABC, so muß auch w + t = dieser halben Summe seyn. Nun wissen wir auch schon, daß △DBE ∽ △DFC, und beyde rechtwinklicht. Nehme ich nun FC als den Radius an, so ist DF der Tangens von w + t, weil bey F der rechte Winkel, und das ist also folglich der Tangens der halben Summe, und BF ist der Tangens von w in dem Triangel

BCF,

BCF, und weil w = r, wie wir oben gesehen, und r = der halben Differenz beyder Winkel, so ist BF der Tangens der halben Differenz. (Denn der △BCF ist gleichfalls rechtwinklicht.) Wegen Aehnlichkeit der Triangel DBE und DFC kann ich nun schließen: DF:BF=DC:EC, oder in Zeichen tang. der halben Summe; tang. der halben Differenz = DC:EC, aber DC = DA + AC und DA = AB, weil beydes Radii sind. Also dieses statt DA gesetzt, ist DC = AB + AC = der Summe der beyden Seiten.

Es ist ferner AC − AE = EC, aber AE ist = AB, weils gleichfalls Radii sind. Das statt AE gesetzt, so ist AB − AB = EC = der Differenz beyder Seiten. Also kann man in der Proportion anstatt DC die AC + AB, und anstatt EC die AC − AB setzen.

Es gilt also nun tang. der halben Summe : tang. der halben Differenz = AC + AB : AC − AB der beyden Winkel bey B und C; und weil wir den tang. der halben Summe nennten:

$$= \text{tang.} \frac{m+n}{2}$$

und den tang. der halben Differenz nennten:

$$= \text{tang.} \frac{m-n}{2}$$

so gilt also:

$$\text{tang.} \frac{m+n}{2} : \text{tang.} \frac{m-n}{2} = AC+AB : AC-AB$$

oder umgekehrt

AC

$$AC+AB : AC-AB = \text{tang.}\frac{m+n}{2} : \text{tang.}\frac{m-n}{2}.$$

Und dieses war es, was wir erweisen mußten.

§. 516. Nach der Voraussetzung dieser Lehrsätze wird es uns nicht mehr schwer fallen, unsere Aufgabe aufzulösen. Es sey also Fig. 280 in dem Triangel ABC gegeben AC und AB, imgleichen der eingeschlossene Winkel BAC. Die beyden unbekannten sind bey B und C. Ich schließe dahero: Fig. 280.

$$AC+AB : AC-AB = \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}.$$

Es ist uns AC und AB gegeben, also wissen wir, welches von beyden das größte ist, und wir ziehen also im zweyten Gliede das kleinste von dem größten ab. Hier haben wir AC als die größte Seite angenommen.

Da uns der Winkel bey A auch gegeben war, so wissen wir auch, wie viel die beyden Winkel bey B und C zusammen noch ausmachen, nemlich sie sind in dieser Figur 180° — dem Winkel A, also können wir auch den Tangens dieser beyden Winkel zusammen genommen finden, oder den Tangens der Summe beyder Winkel, also auch den Tangens der halben Summe, oder der Hälfte. Das dritte Glied ist uns folglich auch bekannt. Daraus finden wir nun das vierte Glied, oder den Tangens der halben Differenz. Suchen wir für diesen gefundenen Tangens den

Winkel auf, so haben wir den Winkel der halben Differenz beyder Winkel. Addiren wir diesen Winkel zu der halben Summe beyder Winkel, so haben wir nach §. 400 der Arithmetik den größten von beyden Winkeln. Ziehen wir ihn von der halben Summe ab, so haben wir den kleinsten von beyden Winkeln. Welcher nun von beyden der größte oder kleinste sey, dieses leuchtet aus den gegebenen Seiten schon hervor, weil allezeit die größte Seite dem größten Winkel entgegen liegt §. 71.

Ein Exempel soll es erläutern. Es sey Fig. 280 $AC = 600$, $AB = 500$, der Winkel bey $A = 30^\circ$, so ist also $AC + AB = 600 + 500 = 1100$, und $AC - AB = 600 - 500 = 100$. Ferner weil $A = 30^\circ$, so sind die Winkel bey B und C zusammen, oder ihre Summe $= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, also die halbe Summe oder $\frac{m+n}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$. Also anstatt:

$$AC + AB : AC - AB = \text{tang.}\ \frac{m+n}{2} : \text{tang.}\ \frac{m-n}{2}$$

kann man nun schließen:

1100 : 100 = tang. 75° : tang. der halben Differ.

Der tang. der halben Differenz beyder Winkel bey B und C also = tang. $\frac{75^\circ \cdot 100}{1100}$.

Logar

Logarithmisch:

log. tang. 75° + log. 100 — log. 1100

wirklich gesucht log. tang. 75° = 10,5719475

+ log. 100 = 2,0000000

12,5719475

— log. 1100 = 3,0413927

9,5305548 =

log tang. der halben Differenz.

Diesen Logarithmen unter den Logarithmen der Tangenten aufgesucht, so findet man, er gehört zunächst zu dem Winkel 18° 44′, das ist also der Winkel der halben Differenz beyder Winkel bey B und C. Diesen Winkel zu der halben Summe beyder Winkel addirt, welche 75° war, so ist der große Winkel = 75° + 18° 44′ = 93° 44′. Und eben diesen Winkel von der halben Summe abgezogen, so ist der kleine Winkel = 75° — 18° 44′ = 56° 16′. Welches nun von beyden der große ist, sieht man gleich daraus, weil AC größer als AB ist. Also ist der Winkel bey B der große.

Der Winkel bey A also	= 30°
der ber B	= 93° 44′
der bey C	= 56° 16′
und alle drey Winkel	180°

wie in jedem △.

Wenn man die drey Winkel kennt, so ist es leicht, die dritte Seite BC zu finden, nemlich:

sin. Winkel C : sin. Winkel A = AB : BC und BC = $\frac{\text{sin. A . AB}}{\text{sin. C}}$, hier also im Exempel anstatt der Zeichen

BC = $\frac{\text{sin. } 30^\circ\ 500}{\text{sin. } 56^\circ\ 16'}$. Logarithmisch:

log. sin. 30° + log. 500 — log. sin. 59° 55'.

Wenn wir das wirklich logarithmisch suchen, so finden wir BC = 300,7.

Wir könnten noch ein Paar Auflösungen dieses Problems anführen, uns gnügt aber, diese als eine ganz leichte Auflösung erklärt zu haben. Will man die andern noch wissen, so wird man sie unter andern auch in des Herrn Professor Karstens Lehrbegrif der gesamten Mathematik 2ter Th. S. 346 und 347 antreffen.

§. 517. Wir wenden uns zur Auflösung des dritten Falls, oder (c §. 498). Wenn in einem Triangel alle drey Seiten gegeben sind, die Winkel daraus zu finden. Ehe wir die Betrachtungen hierüber anfangen, erinnere man sich noch des Satzes, den wir §. 249 bewiesen haben; daß, wenn Fig. 281 aus einem Punkt A außer dem Kreise zwey gerade Linien AE und AB den Kreis in F und G schneiden, und bis an die Peripherie wieder in E und B reichen, alsdenn

Fig. 281.

AB : AE = AF : AG sey.

Wir werden diesen Satz in unsern Betrachtungen nöthig haben.

Es

Es mögen nun Fig. 281 in dem Triangel ABC gegeben seyn AB, AC, CB, oder die drey Seiten, man sucht daraus die Winkel. Man ziehe mit der kürzesten von diesen Seiten, hier mit CB, einen Kreis, welcher die andern beyden Seiten einerwärts, hier in F und G, schneide. Es mußte also hier C als der Mittelpunkt des Kreises genommen werden. Man verlängere den einen Schenkel AC bis an die Peripherie des Kreises, hier in E, und lasse aus dem Mittelpunkte C ein Perpendikel CD auf die Grundlinie AB herab. Dieses wird die GB, welches eine Chorde des Kreises geworden ist, in zwey gleiche Theile theilen, auch wird dadurch der gegebene Triangel ACB in zwey rechtwinklichte verwandelt.

Nun ist $CE = CB =$ Radiis, also $AE = AC + CE = AC + CB$. Ferner da auch $CF = CB =$ Radiis, so ist auch $AF = AC - FC = AC - CB$. Ferner da $AB : AE = AF : AG$, wie wir im Anfange angeführt, so ist, wenn man anstatt AE und AF das gefundene setzt, gleichfalls

$$AB : AC + CB = AC - CB : AG$$

also $AG = \frac{(AC - CB).(AC + CB)}{AB}$.

Da man nun AG gefunden hat, so wird man auch sehr leicht das übrige Stück des Schenkels, oder die GB wissen. Denn es ist $GB = AB - AG$, welches man nun beydes kennt, denn AB war gegeben. Man weiß auch, daß $DB = GD$

$= \frac{1}{2}$GB §. 166, also weiß man auch die AD, denn AD $=$ AG $+$ GD $=$ AG $+ \frac{1}{2}$GB.

Man kennt daher nunmehro in dem rechtwinklichten Dreyecke CDB die CB $=$ rad. die gegeben war, die DB $= \frac{1}{2}$DG, und den rechten Winkel bey D. Daraus läßt sich der Winkel bey B finden nach §. 502. Ich schließe: CB : DB $=$ rad. : cos. B, weil ich CD als den Sinus, und daher DB als den Cosinus von B betrachten kann. Kennt man den Winkel des Cosinus B, so kennt man auch B.

In dem rechtwinklichten Dreyecke ACD kennt man auch die AC als die gegebene Seite, die AD, die wir gefunden haben, und den rechten Winkel bey D. Ich kann also schließen, wenn ich AC als den Radius, CD als den Sinus, A und AD folglich als den Cosinus A betrachte, AC : AD $=$ rad. : cos. A. Und weiß ich den Winkel des Cosinus A, so weiß ich auch den Winkel A selbst. Weiß ich die Winkel A und B, so weiß ich auch folglich den Winkel bey C, welcher das Complement beyder zu 180 Grad ist. Ein Exempel mag dieses erläutern.

Fig. 282. Es seyn Fig. 282 in dem Triangel ABC alle drey Seiten gegeben, man sucht die Winkel. Es sey AB $=$ 1100, AC $=$ 900, CB $=$ 700. Man fälle auch nur in Gedanken das Perpendikel CD, weil man die AD und DB eigentlich in lauter bekannten Werthen der Schenkel des Tri-

an-

angels bekommt, so ist, wenn man mit die vorrige Figur 281 betrachtet, $AG = \frac{(AC - CB) \cdot (AC + CB)}{AB}$, hier $= \frac{(900-700) \cdot (900+700)}{1100} = \frac{200 \cdot 1600}{1100} = \frac{3200}{11} = 290{,}9$. Folglich Fig. 281 $GB = AB - AG$, hier $= 1100 - 290{,}9 = 809{,}1$, und daher DB (Fig. 281 und Fig. 282) $= \frac{1}{2}GB$, hier $= \frac{809{,}1}{2} = 404{,}55$, und $AD = AG + \frac{1}{2}GB$ (Fig. 281 und Fig. 282), hier $= 290{,}9 + 404{,}55 = 695{,}45$. Nun kann man nach vorhergehendem Paragraphen schließen:

$$CB : DB = \text{rad.} : \text{cos. } B$$

also in unsern gefundenen Werthen:

$$700 : 404{,}5 = \text{rad.} : \text{cos. } B.$$

Das logarithmisch aufgelöst, da man 404,5 unter der Charakteristik 3 suchen kann, ist

log. sin. tot.	= 10,0000000	
+ log. 404,5	= 2,6069185	addirt
	12,6069185	
− log. 700	= 2,8450980	subtrahirt
	9,7618205	= log. cos. B.

Dieser Logarithme, unter den Sinus gesucht, kömmt am nächsten dem Winkel 35° 18′, sein Complement, welches seinen Cosinus hat, also zu 90° ist = 54° 42′, und das ist der Winkel B.

Ferner kann man schließen:

AC : AD = rad. : cos. A, und in unsern Werthen:

900 : 695,4 = rad. : cos. A

also $\cos. A = \frac{\text{rad. } 695{,}4.}{900}$ Dieses logarithmisch gesucht:

log. sin. tot. = 10,0000000

+ log. 695,4 = 2,8422347 addirt

12,8422347

− log. 900 = 2,9542425 subtrahirt

9,8879922 = log. cos. A.

Dieser in den Logarithmen der Sinus aufgesucht, kömmt am nächsten dem Logarithmen des Sinus des Winkels 5° 35′, sein Complement zu 90° ist also 39° 25′, und das ist der Winkel A.

Also der Winkel A = 39° 25′

der Winkel B = 54° 42′

weil beyde zusammen 94° 7′,

so ist das Complement zu 180°,

also der Winkel C = 85° 53′

alle drey Winkel 180°.

§. 518.

§. 518. Man hat noch eine andere Art, die Winkel aus den Seiten zu finden, welche man auch in der im vorhergehenden Paragraphen angeführten Schrift nachlesen kann. Wir haben nun alle Fälle erwogen, welche bey der Auflösung der Triangel durch Rechnung vorkommen können, und wollen daher auch dieses Kapitel beschließen.

Das vierte Kapitel.

Von der trigonometrischen Berechnung der Polygone.

§. 519.

In der Abhandlung über die Polygone, welche im 7ten Kapitel vorkam, versprach ich diese Materie nochmals zu behandeln, wenn wir uns mit den trigonometrischen Rechnungen bekannt gemacht hätten. Ich erfülle jetzt dieses Versprechen, und erläutere einige Hauptsätze, welche für die Absicht dieser Schrift nöthig zu seyn scheinen. Einer der ersten ist, **wie man aus dem gegebenen Radius eines Cirkels, und dem Winkel am Mittelpunkte eines**

regulären Polygons, dessen Seite durch Rechnung trigonometrisch finden könne.

Fig. 283. Es ist also in dem regulären Polygon Fig. 283 ABCDE gegeben der Radius CA, er sey = a, der Winkel am Mittelpunkte AcB, dem eine Polygonseite entgegen steht, er sey = u. Man sucht die Seite AB = b. Weil AC = CB = Radius, so ist der Triangel ACB gleichschenklicht. Da nun der Winkel an der Spitze desselben bekannt ist, so läßt sich daraus seine Grundlinie AB = der Seite des Polygons finden. Es ist nemlich nach §. 507 $\frac{1}{2}$ b = $\frac{\text{a . sin. } \frac{1}{2} \text{ u}}{\text{rad.}}$ die halbe Grundlinie, oder hier die halbe Seite des Polygons = AF

$$= \frac{\text{AC . sin. } \frac{1}{2} \text{ ABC}}{\text{rad.}}$$

$$\frac{1}{2} \text{b} = \frac{\text{a . sin. } \frac{1}{2} \text{ u}}{\text{rad.}}$$

$$\text{AB oder b} = \frac{2 \text{ a . sin. } \frac{1}{2} \text{ u}}{\text{r}}$$

Radius multiplicirt mit dem Sinus des halben Centriwinkels, dividirt durch den Sinus totus, ist gleich der Polygonseite.

Exempel: Es sey der Radius des Polygons oder des Cirkels, worinn das Polygon beschrieben ist, oder man es sich beschrieben gedenkt, hier die CA = a = 159. Das Polygon selbst

sey

sey ein Fünfeck, also sein Centriwinkel $= {}^{3}\frac{6}{5}{}^{0} =$ 72°, hier $= u$, also $\frac{1}{2}u = 36^{\circ}$, so ist AB oder $b = \frac{2 \cdot 159 \cdot \text{sin. } 36^{\circ}}{\text{sin. tot.}}$, oder logarithmisch ausgedrückt $=$ log. 2 + log. 159 + log. sin. 36 − log. sin. tot. Dieses ist also berechnet:

log. 2 = 0,3010300

+ log. 159 = 2,2013971

+ log. sin. 36° = 9,7692187 addirt

12,2716458

− log. sin. tot. = 10,0000000 subtrahirt

2,2716458 = log. AB = log. b.

Dieses unter den Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen aufgesucht, gehört am nächsten zum Logarithmen der Zahl 186,9, welches also die Polygonseite ist.

Nähme man allgemein den Radius, wie er in den Tafeln steht, zu 10000000, so würde alsdenn $a = r$, also aus der Formel $b = \frac{2a \text{ sin. } \frac{1}{2}u}{r}$ würde alsdenn $\frac{2r \text{ sin. } \frac{1}{2}u}{r} = 2 \text{ sin. } \frac{1}{2}u$, hier $=$ 2 sin. 36°. Dieses wäre in Zahlen, wenn man den Sinus 36° in den Tafeln sucht, $= 2.5877853$ $= 11755706$. Für das Sechseck ist der Centriwin-

winkel $= \frac{3}{6}\mathfrak{U} = 60°$, also der halbe $= 30°$, also 2 sin. $\frac{1}{2}$u $=$ 2 sin. $30° = 2.5000000 =$ 100000000 $=$ Radius, wie uns auch schon aus der Geometrie bekannt ist. Ist der Polygonwinkel gegeben, so läßt sich daraus der Centriwinkel finden nach §. 199, und also auch das Problem auf diese Art auflösen.

§. 520. Wäre die Seite des Polygons $=$ b nebst dem Centriwinkel u gegeben, so läßt sich auch daraus leicht der Radius desselben, oder hier in der Formel die a finden.

Denn weil $b = \frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2}u}{r}$

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \cdot r$

so ist $rb = 2a \cdot \sin. \frac{1}{2}u$

$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} : 2 \sin. \frac{1}{2}u$

$\frac{rb}{2 \sin. \frac{1}{2}u} = a.$

Oder der Sinus totus der Tafeln multiplicirt mit der Seite des Polygons, dividirt durch den doppelten Sinus des halben Centriwinkels, ist gleich dem Polygon Radius.

Exempel: Es sey das Polygon ein Fünfeck, also sein halber Centriwinkel $= 36° = \frac{1}{2}u$, seine Seite $=$ b sey $=$ 186,9, so ist sein Radius oder $a = \frac{\text{sin. tot. } 186{,}9.}{2 \text{ sin. } 36°}$ logarithmisch $=$

log.

log. sin tot. + log. 186,9 — (log. 2 + log. sin 36°).

Im Exempel log. sin. tot. = 10,0000000

+ log. 186,9 = 2,2716093 addirt

12,2716093

— (log. 2 + log. sin. 36°) = 10,0702487 subtrah.

2,2013606 = log. a.

Diesen Logarithmen in den Tafeln für die natürlichen Zahlzeichen aufgesucht, so findet man, daß er am nächsten zu der Zahl 159 paßt, welches die AC ist.

§. 521. Ebenfalls läßt sich auch sehr leicht aus dem gegebenen Radius des Polygons, und der Seite und Centriwinkel desselben die Höhe des Polygon Dreyecks ACB, oder das Perpendikel CF finden. Weil CB = Radius, und FB auf CF senkrecht steht, indem CF ein Perpendikel ist, so kann man FB als den Sinus von FCB = $\frac{1}{2}$ u betrachten, CF wird also der Cosinus von $\frac{1}{2}$ u seyn. Man kann also schließen: Fig. 283 rad. : cos. $\frac{1}{2}$ u = CB : CF, und wenn, wie wir vorher CB = a nennen, und CF = e setzen wollen: rad. : cos. $\frac{1}{2}$ u = a : e, also $CF = e = \frac{a \cdot \cos. \frac{1}{2} u}{rad.}$,

das ist, der Radius des Polygons, multiplicirt mit dem Cosinus des halben

Centriwinkels, dividirt durch den Sinus totus.

Exempel: Es sey abermal ein Fünfeck, das wir betrachten; abermal a = 159, $\frac{1}{2}$u = 36°, so ist cos. $\frac{1}{2}$u = sin. 54°. Also wenn wir e logarithmisch berechnen wollen, so ist

log. 159 = 2,2013971
+ log. sin. 54° = 9,9079576

12,1093547
— log. sin. tot. = 10,0000000

2,1093547 = log. CF oder
= log. e.

Er gehört am nächsten zu 128,6, welches die CF ist.

§. 522. Auch der quadratische Inhalt eines Polygondreyecks, als ACB Fig. 283, wird sich leicht trigonometrisch berechnen lassen. Es bleibe wie vorhin die Grundlinie des Polygondreyecks, die AB = b; das Perpendikel desselben, welches die Höhe dieses Dreyecks bestimmt, oder die CF = e, so wissen wir aus §. 129, daß der Flächeninhalt des Dreyecks ACB = $\frac{eb}{2}$; nun war §. 521 e = $\frac{a \cdot \text{cos. } \frac{1}{2}u}{r}$, und aus §. 519

Fig. 283.

b

$b = \frac{2a \sin. \frac{1}{2}u.}{r}$ Dieses beydes anstatt e und b

substituirt, giebt den Flächeninhalt des Dreyecks

$ACB = \frac{2a^2 . \text{cos.} \frac{1}{2}u . \sin. \frac{1}{2}u}{2r . r} = \frac{a^2 . \text{cos.} \frac{1}{2}u . \sin. \frac{1}{2}u}{r . r}$.

Es ist aber nach §. 507 $\frac{2 \text{cos.} \frac{1}{2}u . \sin. \frac{1}{2}u}{r} = \sin. u$

$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{r} : 2$

$\frac{\text{cos.} \frac{1}{2}u . \sin. \frac{1}{2}u}{r} = \frac{\sin. u.}{2}$

Diesen $\frac{\sin. u}{2}$ anstatt $\frac{\text{cos.} \frac{1}{2}u . \sin. \frac{1}{2}u}{r}$ in der

oben für den Flächeninhalt des Triangels ACB in der Formel substituirt, so wird aus dieser Formel für Flächeninhalt des Polygontriangels ACB $= \frac{a^2 . \sin. u}{2r}$, oder **das Quadrat des Radius des Polygons multiplicirt mit dem Sinus des ganzen Centriwinkels, und dieses Produkt dividirt mit dem doppelten Radius der Tafeln**, giebt den Flächeninhalt des Polygondreyecks. Wir wollen doch ein Exempel hievon sowol durch die gewöhnliche Rechnungsart, als auch logarithmisch berechnen. Es sey a oder der Polygonradius $= AC = 159$. Das Polygon sey wieder ein Fünfeck, also der ganze Centriwinkel ist $= \frac{360}{5}° = 72°$, nun also $a^2 = 159^2 = 25281$. Der Sinus von 72° aus den Tafeln $= 9510561$, und 2r aus den Tafeln $=$

2.10000000 = 20000000, also $\frac{9510561.25281}{20000000}$

= 12031,54...

Logarithmisch: log. a^2 = log. a . 2 = log. 159 . 2

= 4,4027942

+ log. sin. 72° = 9,9782063 addirt

14,3810005

— log. 2r, das ist

— (log. 2 + log. r) = 10,3010300 subtrahirt

4,0799705 = log. Flächeninhalt △ACB.

Dieser Logarithme ist nicht in den gemeinen Tafeln, allein unter der Charakteristik 3 aufgesucht, und denn die gefundene Zahl durch 10 vermehrt, paßt er am nächsten zu 12030, also kömmt fast eben das heraus, als wenn man auf die gewöhnliche Art verfahren wäre. Diese 12030 ist in solchen Quadratmaaßen, als die a in Längenmaaße gegeben ist, wie es sich von selbst versteht.

§. 523. Hieraus läß sich nun leicht der Flächeninhalt eines ganzen Polygons berechnen. Wir wissen, daß in jedem Polygon so viel Polygontriangel können gemacht werden, als es Seiten hat, welche Triangel alle einander völlig gleich sind. Man darf also nur den Inhalt eines solcher Triangel mit der Anzahl der Seiten des

des Polygons multipliciren, um den Flächeninhalt des ganzen Polygons zu wissen. Wenn wir also ganz allgemein die Zahl der Seiten eines Polygons $= n$ setzen, so hätte es auch n gleiche Triangel zum Inhalte, und so würde die allgemeine Formel für den Inhalt eines jeden Polygons seyn $\frac{n \cdot a^2 \cdot \text{sin. } u}{2r}$ = Polygonfläche. Das ist: Die gegebene Anzahl der Polygonseiten mit dem Quadrat des Polygonradius und dem Sinus des Centriwinkels multiplicirt, und durch den doppelten Sinum totum dividirt, ist gleich der Polygonfläche.

Exempel: Wir wollen jetzt einmal in einem Sechseck es nehmen. Der Polygonradius oder a sey $= 50$; der Centriwinkel oder u ist $= \frac{360}{6} = 60°$; der Seiten also $n = 6$, so ist folglich der Inhalt $\frac{6 \cdot 50^2 \cdot \text{sin. } 60}{2 \text{ sin. tot.}}$ Dieses logarithmisch berechnet, stünde also:

	log. 6 =	0,7781512
+ log. 50^2 = log. 50 . 2 =		3,3979400
+ log. sin. 60° =		9,9375306 add.
		14,1136218
— log. 2 . sin. tot.		
= — (log. 2 + log. sin. tot.) =		10,3010300
		3,8125918

wel-

welches der Logarithme des Flächeninhalts dieses gegebenen Sechsecks ist. Dieser Logarithme paßt am nächsten zu den Logarithmen von 6496. Das wäre also der Flächeninhalt des Polygons, nemlich in solchem Quadratmaaße, als a hier = 50 im Längenmaaße gegeben ist. Wäre z. E. hier a = 50 Zoll, so wäre der Inhalt des Polygons = 6496 Quadratzoll, und dieses nach Decimalmaaße = 64 Quadratfuß und 96 Quadratzoll.

§. 524. Diese Betrachtungen lehren uns auch zwey Polygone von verschiedenen Seiten, welche man sich aber in einerley Kreise beschrieben gedenkt, mit einander in Ansehung ihres Flächeninhalts zu vergleichen. Der Radius ist also des Polygons, oder a sey in beyden Polygonen einerley, aber die Anzahl der Seiten, also auch die Größe der Seiten selbst verschieden. Es mögen, ganz allgemein die Sache betrachtet, in dem einen n, und in dem andern N Seiten sich befinden. Sind die Zahl der Seiten verschieden, so müssen auch die Winkel am Mittelpunkt bey beyden Polygonen verschieden seyn. Bey dem von n Seiten sey nun der Winkel am Mittelpunkt = u, und bey dem von N Seiten sey n = U, so wird der Flächeninhalt des einen Polygons seyn = $\frac{n \cdot a^2 \cdot \sin. u}{2r}$, und der Flächeninhalt des andern Polygons = $\frac{N \cdot a^2 \cdot \sin. U}{2r}$

Wenn

Wenn man nun ferner den Flächeninhalt des erstern allgemein $= q$ setzt, und des andern $= Q$, so wäre folgende Proportion richtig, in welcher nur gleiche Dinge für gleiche Dinge gesetzt sind:

$$q : Q = \frac{n \cdot a^2 \cdot \sin. u}{2r} : \frac{N \cdot a^2 \cdot \sin. U}{2r}$$

$$q : Q = n \cdot \sin. u : N \cdot \sin. U$$

die hintersten Glieder mit $\frac{2r}{a^2}$ multiplicirt.

Das ist: Der Flächeninhalt zweyer verschiedener Polygone in eben dem Kreise verhalten sich gegen einander, wie die Anzahl ihrer Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des Centriwinkels.

Exempel: Wir wollen eins wählen, wo das Verhältniß zweyer Polygonflächen klein ist. Das Viereck hat zu seinem Centriwinkel 90°, also der Sinus davon ist gleich Radius, also hier in der Proportion sey $n = 4$, und $\sin. u = r$. Das Zwölfeck hat zum Centriwinkel $\frac{360}{12}° = 30°$, und dessen Sinus ist $= \frac{1}{2}$ Radius, also hier in der Proportion $N = 12$, und $\sin. U = \frac{r}{2}$. Es

gilt also in diesem Falle:

$q : Q$

$q : Q = 4r : \frac{12r}{2}$ oder

$q : Q = 4r : 6r : 2r$ die hintersten Glieder

$q : Q = 2 : 3$ also auch

$2 : 3 = q : Q$, folglich $Q = \frac{3}{2} q$, oder in eben dem Cirkel ist die Fläche des Zwölfecks gleich $\frac{3}{2}$ der Fläche des Vierecks, oder die Fläche des Vierecks $\frac{2}{3}$ des Zwölfecks. Es sey nun z. E. die Fläche des Vierecks = 16 Quadratfuß, so wird die Fläche des Zwölfecks in eben dem Kreise = $\frac{16}{2} \cdot 3 = \frac{48}{2} = 24$ Quadratfuß seyn.

§. 525. Es mag ein Polygon doppelt so viel Seiten haben, als ein anderes, so ist sein Centriwinkel nur halb so groß, als der Centriswinkel des erstern, oder wenn also $U = \frac{1}{2} u$, so ist $n = 2n$. Wenn man nun dieses in der Proportion des vorhergehenden Paragraphen anstatt U und N setzt, so gälte folgende Proportion:

$q : Q = n . \sin. u : 2n . \sin. \frac{1}{2} u : n$ die hintersten Glieder

$q : Q = \sin. u : 2 \sin. \frac{1}{2} u.$

Es ist aber nach §. 507 $\sin. u = 2 \cos. \frac{1}{2} u . \sin. \frac{1}{2} u.$

r

Dieses anstatt sin. u in der Proportion gesetzt, giebt folgende:

q : Q

$$q : Q = \frac{2 \text{ cof. } \frac{1}{2}u \text{ . sin. } \frac{1}{2}u : 2 \text{ sin. } \frac{1}{2}u}{r}$$

$$\frac{}{} \text{ . r die hinters}$$

$$q : Q = 2 \text{ cof. } \frac{1}{2}u \text{ . sin. } \frac{1}{2}u : r \text{ . } 2 \text{ sin. } \frac{1}{2}u \quad \text{sten Glied.}$$

$$\frac{}{} : 2 \text{ sin. } : \frac{1}{2}u$$

$$q : Q = \text{cof. } \frac{1}{2}u : r \quad \text{die hinters}$$

sten Glieder.

Aber es ist $\frac{1}{2}u$ der Centriwinkel in dem Polygon von doppelt so viel Seiten. Dieser Winkel in dem größern Polygon soll nun U heißen, oder es war $U = \frac{1}{2}u$, wie wir oben anzeigten, also ist nunmehr die Proportion $q : Q : \text{cof. } U : r$, oder die **Flächen zweyer Polygone, davon das eine doppelt so viel Seiten hat. als das andere, verhalten sich, wie der Cosinus des Centriwinkels des Polygons, das die meisten Seiten hat, zum Radius.**

Exempel: Im Dreyecke unter den Polygonen ist der Centriwinkel $= \frac{360}{3}° = 120°$, das ist nun U. Der Sinus davon nun ist der Sinus von $60°$, weil der Nebenwinkel von $120° = 60°$ ist, also der Cosinus desselben = dem cof. $60° =$ sin. $30° = \frac{1}{2}$ Radius. Wenn nun q die Fläche des Dreyecks, Q die Fläche eines Sechsecks bedeutete, so würde:

$$q : Q = \frac{1}{2}r : r \text{ . } 2$$

$$q : Q = r : 2r : r$$

$$q : Q = 1 : 2$$ oder des Sechsecks Fläche

ist eben nochmal so groß, als die Fläche des Dreyecks in einerley Cirkel beschrieben.

Auf eine ähnliche Art, aber freylich nicht völlig so bequem, weil die Sinus sich nicht so kurz, als dieser ihre, die wir im Exempel gebraucht haben, ausdrücken lassen, vergleicht man aller Polygonflächen mit einander.

§. 526. Der Cirkel selbst kann als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden; je mehr Seiten nun ein Polygon hat, desto kleiner wird der Unterschied zwischen dem Bogen und der Chorde, oder zwischen dem Bogen und der Polygonseite. Wenn wir Chorden in einem Cirkel ziehen wollten, die einen Bogen von 2 Minuten spannten, so würde die Größe dieser Chorden, und die Größe des Bogens, den sie spannten, wenn dieser als eine gerade Linie gedacht würde, nur ungemein wenig von einander unterschieden, und in einem schon sehr großen Cirkel noch nicht zu bemerken seyn. Dieses dient uns auch, die Peripherie eines Cirkels in Theilen des Diameters zu suchen, oder das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, freylich nicht ganz scharf, doch daß wir ziemlich damit zufrieden seyn können, zu finden. Es ist natürlich, daß wir ein gleiches Verhältniß herausbringen müssen, als §. 221 sich findet.

Ein Cirkel hat 360°, dieses mit 60 multiplicirt, giebt 21600 Minuten; wenn wir also

annehmen, jede Chorde soll einen Bogen von 2 Minuten spannen, so erhalten wir ein Polygon im Cirkel von 10800 Seiten. Der Radius soll in 10,000000 Theile getheilt seyn, wie er sich in den Sinustafeln findet. Der Centriwinkel eines solchen Polygons ist also = 2 Minuten, also der halbe Centriwinkel = 1 Minute. Nun haben wir alles, was dazu gehört, die Seite dieses Polygons in Theilen des Radius zu finden. Die Formel dazu §. 505 ist $b = \frac{2a \sin. \frac{1}{2}u.}{r}$. Weil nun aber hier a = r, indem wir den Radius des Polygoncirkels mit dem Radius in den Tafeln gleich annehmen, so ist daher b = 2 sin. $\frac{1}{2}$u, oder in unserm Falle b = 2 sin. 1 Minute. Der Sinus von 1 Minute ist in den Tafeln = 2909, dieses mit 2 multiplicirt, giebt 5818 = der Seite des Polygons von 10800 Seiten, da der Radius = 10,000000. Diese Polygonseite, weil sie nur unendlich wenig von ihren Bogen verschieden seyn wird, darf nur mit 10800, als der Zahl der Seiten, multiplicirt werden, um die ganze Peripherie des Cirkels zu bekommen. Es ist nun aber 5818 . 10800 = 62834400. Nun haben wir den Radius = 10,000000 angenommen, also ist der Diameter = 20,000000, folglich würde sich nach diesen Voraussetzungen der Diameter zur Peripherie verhalten:

wie 20,000000 : 62834400

beyde Glieder des Verhältniſſes durch 2 dividirt = 10,000000 : 31417200

beyde durch 100 divid. = 10,0000 : 314172

oder beyde durch 10,0000 = 1 , : 3,14172.

Dieſes Verhältniß iſt bis zur vierten Decimalzahl oder bis 7 richtig, die alsdenn zu groß wird, weil an ihrer Stelle eine 5 ſtehen ſollte, welches auch nicht anders kommen konnte, weil wir vorausſetzten, Bogen und Chorde konnten für eine Größe angeſehen werden, welches nicht mathematiſch wahr iſt. Indeſſen das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, daß man gewöhnlich gebraucht, 1,3141, oder 1000 : 3141, oder 100 : 314 iſt auch auf dieſe Art ganz richtig gefunden.

§. 527. Dieſe Betrachtungen über die Berechnungen des Flächeninhalts der regulären Polygone bringt uns auf die Betrachtung, den Flächeninhalt unregelmäßiger geradlinichter Figuren zu berechnen. Wir fangen vom Dreyecke an. Gleichſeitiger Dreyecke Inhalte wiſſen wir nach §. 522 zu berechnen. Wir wollen nun ungleichſeitige Dreyecke, oder Dreyecke überhaupt, wie ihr Inhalt ſich trigonometriſch finden läßt, betrach-

trachten. Wenn ein Dreyeck trigonometrisch zu berechnen gegeben ist, so muß auch von seinen Winkeln und Seiten dasjenige gegeben seyn, welches nach §. 498 zu der Berechnung seiner übrigen Seiten und Winkel erfordert wird. Wir setzen also nun voraus, daß uns seine Seiten und Winkel dadurch bekannt worden sind, oder was gegeben ist, was zu ihrer Erkenntniß gehört. Wir haben Fig. 284 zwey Dreyecke gezeichnet, eins mit drey spitzen Winkeln, wo also das Perpendikel BD, das seine Höhe anzeigt, in das Dreyeck fällt; das andere mit einem stumpfen Winkel, wo also das Perpendikel BD außerhalb desselben auf die verlängerte Grundlinie AC fällt, um auf beyde Fälle deutlich zu seyn. Unsere Demonstration geht auch beyde Fälle an, ob man schon auch das zweyte Dreyeck so betrachten konnte, daß man BC als seine Grundlinie ansähe, da denn auch das Perpendikel, das die Höhe anzeigt, ins Dreyeck fiele. Man ziehe also Fig. 284 in dem Dreyecke ACB das Perpendikel BD. Uns ist aus der Geometrie §. 129 bekannt, daß der Inhalt des Dreyecks $ABC = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

Fig. 284.

AC ist uns bekannt oder gegeben, und BD werden wir leicht finden, weil BD ein Perpendikel ist, also bey D ein rechter Winkel, so kann es als der Sinus vom Winkel A betrachtet werden, wenn man AB als den Radius ansieht. BC ist uns nun auch bekannt, umgleichen der Winkel C, es mag nun in Zeichen $AC = b$, $AB = c$,

und der Winkel BAD = a (bey dem stumpfen Triangel ist es der Nebenwinkel von dem stumpfen, der ihn zu 180° completirt, also auch bekannt). Wir schließen nun:

AB : BD = r : sin. BAD

also auch r : sin. BAD = AB : BD

und in Zeichen r : sin. a = c : BD

also $BD = \frac{c \cdot \sin. a}{r}$, folglich $\frac{1}{2} BD = \frac{c \cdot \sin. a}{2r}$,

also der Inhalt des $\triangle ABC = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin. a}{2r}$.

Exempel: Es sey beym stumpfwinklichten Triangel von beyden Figuren AC = b = 127,5, AB = c = 54,76, und der Winkel BAC = a = 113° 16′, also sein Nebenwinkel BAD = 66° 44′, so würde dieses Exempel logarithmisch also aufgelöst:

log. b = log. 127,5 = 2,1055102

\+ log. c = log. 54,76 = 1,7384634

\+ log. sin. a

hier = log. 66° 44′ = 9,96931625 add.

13,8071361

— log. 2r

= — (log. 2 + log. r) = 10,3010300

3,5061061 = Logarithmen des Flächeninhalts des Triangels.

Hiezu

Hiezu gehört die Zahl 3207 am nächsten. Suchte man, wie das Kapitel von Logarithmen in der Arithmetik lehrt, die Zahl für diesen gefundenen Logarithmen genauer, weil er nicht genau mit dem, den wir in gewöhnlichen Tafeln finden, übereinstimmt, so würde man auch die Decimaltheile finden, oder hätte man auch die großen Tafeln, und suchte den Logarithmen unter einer größern Charakteristik auf, so würde man, wenn man wegen dieser Charakteristik die hintersten Zahlen abstriche, auch die Decimaltheile zum Theil erhalten.

§. 528. Jeder Triangel kann, wie wir oft betrachtet haben, als die Hälfte eines Parallelograms angesehen werden. Wenn also in einem jeden angegebenen Parallelogram, als z. E. Fig. 285 ACBE die Seite AB, AC, und der Winkel BAC gegeben ist, so läßt sich der Flächeninhalt desselben gleichfalls trigonometrisch finden. Es sey AC = b, AB = c, und der Winkel BAC = a, so wäre der Flächeninhalt des Triangels ABC = $\frac{b.c.\sin.a}{2r}$ nach §. 527, allein △ABC ist = ½ ACBE, also 2△ABC = ACBE, also $\frac{b.c.\sin.a.2}{2r}$ = Parallelogram ACBE, oder wirklich multiplicirt = $\frac{b.c.\sin.a}{r}$ = Parallelogram ACBE. Fig. 285.

Exempel: Es sey AC = b = 127,5, AB = c = 54,76, der Winkel BAC = a = 66° 44′, so wird dieses logarithmisch also gerechnet:

log. b = log. 127,5 = 2,1055102
+ log. c = log. 54,76 = 1,7384634
+ log. sin. a = log. sin. 66° 44′ = 9,9631625 add.

13,8071361
− log. r = 10,0000000

subtrahirt 3,8071361 = log. des Flächeninhalts des Parallelograms.

Zu diesem Logarithmen gehört am nächsten die Zahl 6414, welches der Flächeninhalt des Parallelograms ist. Uebrigens gilt auch hier, was wir am Ende des vorhergehenden Paragraphen anführten.

§. 529. Allein man kann auch den Flächeninhalt eines Dreyecks finden, wenn nur seine drey Seiten gegeben sind, ohne daß man sich um die Winkel vorher bekümmert, oder solche berechnet. Es sey demnach in dem Triangel ABC Fig. 286 gegeben AB = a, BC = b, und AC = c oder alle drey Seiten. Man fälle das Perpendikel BD als die Höhe des Triangels. Es ist offenbar §. 129, daß also $\frac{AC \cdot BD}{2}$ dem Inhalte des Triangels gleich wäre. Weil wir aber BD noch

noch nicht kennen, so sey BD = z, und weil wir AD und DC auch nicht kennen, so sey AD = x, also DC = AC − AD = c − x. Nun ist, weil BD ein Perpendikel, BDq = BAq − ADq, und in Zeichen $z^2 = a^2 - x^2$. Ferner ist auch BDq = BCq − DCq, und in Zeichen $z^2 = b^2 - (c-x)^2$. Aber $(c-x)^2 = c^2 - 2cx + x^2$, also $-(c-x)^2 = -c^2 + 2cx - x^2$, folglich ist $z^2 = b^2 - (c-x)^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$.

Wir haben nun zwey Werthe für z^2, die wir gleich setzen können, und woraus wir x finden. Es ist also, beyde gefundene Werthe für z^2 gesetzt:

$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$ folglich alles mit entgegen gesetzten Zeichen herüber gesetzt, daß x allein bleibt.

$a^2 - b^2 + c^2 = 2cx$ folglich

$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = x$ oder = AD.

Um es nun bequemer in der Rechnung zu machen, wollen wir $a^2 + c^2$ zusammen nehmen, und es sey $a^2 + c^2 = e^2$, folglich das in der Gleichung für x substituirt, so wird x oder $AD = \frac{e^2 - b^2}{2c}$,

aber es ist $e^2 - b^2 = (e+b).(e-b)$, wie jeder durch die Multiplikation selbst finden kann. Das nun wieder anstatt $e^2 - b^2$ substituirt, so wird x oder $AD = \frac{(e+b).(e-b)}{2c}$, also $x^2 =$

$\frac{(e+b)^2 . (e-b)^2}{4c^2}$. Nun war BDq oder $z^2 = a^2 - x^2$, und für x^2 das Gefundene gesetzt, so wird

$$z^2 = a^2 - \frac{(e+b)^2 . (e-b)^2}{4c^2}$$

folglich $z^2 . 4c^2 = 4c^2a^2 - (e+b)^2 . (e-b)^2$

aber $(e+b)^2 = (e+b) . (e+b)$

und $(e-b)^2 = (e-b) . (e-b)$. Dies ses substituirt, giebt also:

$z^2 4c^2 = 4c^2a^2 - (e+b) . (e+b) . (e-b) . (e-b)$

und in dem hintersten Gliede der Faktoren verwechselt:

$z^2 4c^2 - 4c^2a^2 - (e+b) . (e-b) . (e+b) . (e-b)$

aber $(e+b) . (e-b) = e^2 - b^2$. Das wieder substituirt:

$z^2 4c^2 = 4c^2a^2 - (e^2 - b^2) . (e^2 - b^2)$

oder die eine Seite der Gleichung läßt sich auch also ausdrücken:

$z^2 4c^2 = (2ca - e^2 + b^2) . (2ca + e^2 - b^2)$

welches man durch die Multiplikation finden wird.

Wir hatten aber e^2 für $a^2 + c^2$ gesetzt, um die Rechnung bequemer zu machen. Wenn also $e^2 = a^2 + c^2$, so ist $-e^2 = -a^2 - c^2$. Dieses nun ist in die Gleichung statt e^2 gesetzt, so wird:

$z^2 4c^2 = (2ca - a^2 - c^2 + b^2) . (2ca + a^2 + c^2 - b^2)$.

Aber $2ca - a^2 - c^2 + b^2$ entsteht durch die Multiplis

tiplikation von $(a+b-c).(b-a+c)$, und $2ca+a^2+c^2-b^2$ durch $(a+b+c).(a+c-b)$, das wieder substituirt, giebt:

$$z^2 4c^2 = (a+b-c).(b+c-a).(a+b+c).(a+c-b)$$

folglich

$$z^2 = \frac{(a+b-c).(b+c-a).(a+b+c).(a+c-b)}{4c^2}$$

und daher

$$z = \sqrt{\left(\frac{(a+b-c).(b+c-a).(a+b+c).(a+c-b)}{4c^2}\right)}.\frac{2c}{2}$$

Dieses ist nun z oder die BD, das ist die Höhe des Triangels ABC, also die halbe Höhe davon, oder $\frac{DB}{2} =$

$$\sqrt{\left(\frac{(a+b-c).(b+c-a).(a+b+c).(a+c-b)}{4c^2}\right)}.$$

Dieses mit $AC = c$, als der Grundlinie, multiplicirt, giebt den Inhalt des Triangels ABC, also $\frac{DB.AC}{2} =$

$$c\sqrt{\left(\frac{(a+b-c).(b+c-a).(a+b+c).(a+c-b)}{4c^2}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{(a+b-c).(b+c-a).(a+b+c).(a+c-b)}{4}\right)}.$$

Exem-

Exempel; Es ließe sich nun der Flächeninhalt eines Triangels, wovon bloß die drey Seiten gegeben sind, auf die Art durch die gewöhnliche Rechnungsarten finden, nemlich durch Multiplikation der Faktoren des Nenners mit einander, aus welchem Produkte man nachher die Wurzel auszöge, und diese Wurzel durch 4 dividirte. Allein man kann auch solches Exempel mit Logarithmen rechnen, und dieses wollen wir jetzt thun.

Es sey nun AB = a = 172, BC = b = 202, AC = c = 236, so ist (a + b − c) = (172 + 202 − 236) = 138, also der Logarithme von (a + b − c), hier der log. 138.

Ferner (b + c − a) = (202 + 236 − 172) = 266, also der log. (b + c − a) hier = log. 266.

Ferner (a + b + c) = (172 + 202 + 236) = 610, also der log. (a + b + c) hier = log. 610.

Endlich (a + c − b) = (172 + 236 − 202) = 204, also der log. (a + c − b) hier = log. 204.

Der Zähler dieser Formel ist daher also zu bestimmen:

+ log. 138 = 2,1398791

+ log. 266 = 2,4248816

+ log. 610 = 2,7853298

+ log. 204 = 2,3096302 addirt

9,6597207.

Allein aus der Größe des Zählers sollte noch die Quadratwurzel ausgezogen werden. Das geschieht logarithmisch, wenn man diesen gefundenen Logarithmen durch 2 dividirt, also:

$$\frac{9{,}6597207}{2} = 4{,}8298603.$$

Nun ist der Nenner der Formel noch 4, also von diesem Logarithmen wird der log. 4 abgezogen.

4,8298603

− log. 4 = 0,6020600

4,2278003 = Logarithmen des Flächeninhalts des △ABC.

In den gemeinen Zahlzeichen findet man nur die Logarithmen bis 10000, dessen Charakteristik = 4 ist. Da an diesem gefundenen Logarithmen noch Decimalbrüche anhangen, so ist die

Zahl,

Zahl, die zu diesem Logarithmen gehört, über 10000. Sucht man den Logarithmen unter der Charakteristik 3 auf, und vermehrt die gefundene Zahl mit 10, weil hier die Charakteristik 4 ist, so kömmt dieser Logarithme am nächsten dem Logarithmen, welcher zu der Zahl 16890 gehört. In größern Tafeln aufgesucht, findet man, daß er am nächsten zu der Zahl 16897 gehört, welches der Inhalt des Triangels ist. Wären hier die Längenmaaße Zolle, so wäre also sein Inhalt 16897 Quadratzoll, oder im Decimalmaaße 1 Ruthe, 68 Fuß, 97 Zoll Quadratmaas.

§. 530. Wir wissen aus der Geometrie, daß sich jede geradlinichte Figur durch Diagonalen in Triangel eintheilen läßt. Da wir in dem vorhergehenden Paragraphen gelernt haben, jedes Triangels Fläche trigonometrisch zu berechnen, wenn uns gewisse Stücke, die wir überhaupt bey der Berechnung der Triangel nach §. 498 nöthig hatten, bekannt sind, so wird es uns leicht von selbst einfallen, daß sich auch jeder geradlinichten Figur Inhalt trigonometrisch wird berechnen lassen, wenn uns gewisse Stücke davon bekannt sind. Diese Stücke müssen nun seyn ihre Seiten nebst ihren Winkeln, oder ihre Seiten nebst ihren Diagonalen. Es sey also Fig. 287 die Seiten AB, BD, DE, EF, FA nebst den Winkeln, oder anstatt der Winkel die Diagonalen AE und AD gegeben. Man soll den Flächeninhalt der Figur finden.

Fig. 287.

Wäre

Wäre die Figur ein reguläres Polygon, wie Fig. 283, so wissen wir aus ihren Seiten ihren Centriwinkel BCD, und wir haben daher ihren Polygonwinkel nicht einmal nöthig. Wir können ihn leicht daraus finden, auch ferner daraus ihren Radius nach §. 520, und alsdenn auf die §. 523 gezeigte Art das Problem leicht auflösen. Wir führen keine andere Auflösung an, die sich noch geben ließe.

Ist aber die Figur irregulär, als Fig. 287, so mögen erstlich die Seiten, welche sie begränzen, nebst den Winkeln, welche von diesen Seiten eingeschlossen sind, gegeben seyn. So wäre also in Fig. 287 der Winkel bey B und F, nebst den Seiten, die ihn einschließen, AB und BD bekannt, daraus läßt sich AD nun trigonometrisch §. 516 finden. Gleichfalls läßt sich aus AF und FE, und dem Winkel bey F, die AE §. 516 finden. Und nun waren in der Figur 288 alle Seiten aller darinn befindlichen Triangel bekannt, und der Inhalt eines jeden ließe sich nach §. 529 berechnen, deren Summe alsdenn der Inhalt der ganzen Figur wäre. Fig. 288.

Oder wollte man dieses nicht, so berechnete man die Diagonalen zwar auch erst, aber auch die Höhen, die ihnen zugehörten, welches sich nach §. 529 thun läßt. Man finge hier z. E. mit den Triangeln AFE und ABD an, woraus

sich

sich das, was man nöthig hat, den Triangel ADE zu berechnen, gleich ergiebt.

Sind die Höhen gefunden, so rechnet man ferner jedes Dreyeck nach §. 527 aus, und summirt aller Inhalt.

Wären auch in der Figur 287 nur einige Fig. 287. Seiten und Winkel, als z. E. AF, FE, AB, BD, und die Winkel bey B, A, F gegeben, so ließen sich schon daraus alle Winkel und Diagonalen finden, wie jeder, der die vorhergehenden trigonometrischen Betrachtungen aufmerksam durchgelesen hat, leicht einsehen wird. Aus den Seiten AF, FE, AB, BD, und den eingeschlossenen Winkeln B und F ließen sich sehr leicht die Diagonalen AE und BD berechnen. Wir führen keine Exempel hievon an, weil alles dieses ganz leicht ist, und sich überhaupt auch noch auf manche Art verändern läßt.

Das fünfte Kapitel.

Einige praktische Anwendungen der trigonometrischen Rechnungen.

§. 532.

Wir fügen diese Betrachtungen zu den übrigen trigonometrischen Betrachtungen noch hinzu, um unsern Lesern doch einigen Vorschmack der Anwendung der trigonometrischen Lehren zu geben, und etwas von ihrem Gebrauch zu zeigen, da wir sonst nach der Absicht dieser Schrift uns nur mit theoretischen Betrachtungen beschäftigen. Diese praktischen Anwendungen erfodern den Gebrauch der Meßwerkzeuge, der Meßkette, des Astrolabii oder Scheibeninstruments ꝛc. welche wir aber hier nicht weitläuftig beschreiben können, sie sind bekannt genug, ihren gemeinen Gebrauch weiß jeder Feldmesser, und kann ihn zeigen, und die Behutsamkeiten, die man dabey anwenden muß, wird der Geometer bald bemerken, welcher Theorie und Praxin mit einander zu verbinden weiß; wir zeigen nur unsern Lesern etwas von den Gründen ihres Verfahrens.

Fig. 288. §. 533. Fig. 288. Eine Weite AB, zu deren beyden Endpunkten A und B man aus C kommen, aber die Weite AB selbst nicht messen kann, weil z. E. AB ein Busch seyn soll, wo man von A nach B auch nicht einmal sehen kann, läßt sich trigonometrisch bestimmen.

Man nehme einen willkührlichen Punkt C, von welchem man nach A und B kommen kann, und messe den Winkel bey C durch Hülfe des Scheibeninstruments. Man messe mit der Kette die Längen AC und BC, so hat man in dem Triangel ABC zwey Seiten, nebst dem eingeschlossenen Winkel, daraus läßt sich nach §. 516 der Winkel bey A finden, und daraus ferner die Entfernung AB.

Exempel: Es sey der Winkel bey C = 43° 30′, man habe die AC und CB gemessen. Es sey AC = 49 Ruthen 4 Fuß, oder 494 Fuß, CB = 54 Ruthen 7 Fuß, oder 547 Fuß, so wäre der Winkel bey A der größte Winkel unter den beyden unbekannten, und ferner da C = 43° 30 Minuten, so sind beyde Winkel bey A und B zusammen, oder ihre Summe = 180° — 43° 30′ = 136° 30′, also ihre halbe Summe = 68° 15′, also schließt man nun:

547 + 494 : 547 − 494 = Tang. 68° 15′ : Tang. der halben Differenz beyder Winkel

oder 1041 : 53 = Tang. 68° 15′ : Tang. der halben Differenz.

Daraus findet man den Tang. der halben Differenz beyder Winkel, welcher Tang. zu dem Winkel 7° 16′ gehört.

Nun ist der große Winkel nach §. 514 die halbe Summe + der halben Differenz, also hier 68° 15′ + 7° 16′ = 75° 31′, welches hier der Winkel bey A ist. Der kleine Winkel bey B wäre also 68° 15′ − 7° 16′ = 60° 59′. Man kann nun schließen:

sin. A : BC = sin. C : AB, hier

sin. 75° 31′ : 547′ = sin. 43° 30′ : AB.

Welches logarithmisch aufgelöst für AB den Logarithmen giebt 2,5898253, der am nächsten zu der Zahl 388,9 gehört.

Es wäre also AB = 388,9 Fuß, oder 38 Ruthen, 8 Fuß, 9 Zoll Decimallängenmaas. Könnte man von A nach B sehen, so könnte man auch den Winkel CAB messen, und man könnte alsdenn durch den gemessenen Winkel C die Seite AC, und durch den Winkel A leicht die AB finden, man wüßte alsdenn auch den Winkel B

als das Complement der beyden andern zu 180°, und schlösse:

sin. B : AC = sin. C : AB.

§. 534. Es sey nun aber eine Weite zu messen, zu deren einem Endpunkte man nur kommen kann. Z. E. Fig. 289 die Breite eines Flusses AB, oder von einem gegebenen Punkt A auf dem Ufer nach einem gegebenen Punkte B auf der andern Seite, man befindet sich auf der Seite, wo A ist.

Fig. 289.

Man messe von A eine willkührliche gerade Linie mit der Kette AC, je länger je besser, man messe den Winkel BCA an dem einen Ende der AC und dem Winkel BAC, beyde mit dem Instrument, so weiß man auch den Winkel bey B, man kann also nach §. 512 schließen:

sin. B : bekannten AC = sin. C : AB.

Exempel: Es sey AC = 40 Fuß, der Winkel BAC = 7° 30′, der Winkel BCA = 32° 45′, also wäre der Winkel bey B = 180° — (7° 30′ + 32° 45′) = 75° 45′. Man hätte hier folglich also zu schließen:

sin. 75° 45′ : 40 Fuß : sin. 32° 45′ : AB

und also $AB = \frac{\text{sin. } 32^\circ\ 45' \cdot 40.}{\text{sin. } 75^\circ\ 45'}$

Das

Das logarithmisch ausgerechnet, gäbe AB = 22,33, oder 22 Fuß, 3 Zoll, 3 Linien Decimalmaas.

§. 535. Auch eine Distanz, da man zu keinem von ihren Endpunkten kommen kann, läßt sich trigonometrisch messen. Es sey Fig. 290 die Weite AB zu messen, zu keinem deren Endpunkten man wegen des dazwischen befindlichen Flusses kommen kann. Fig. 290.

Man messe eine beliebige Standlinie CD, und nehme in selbiger drey Punkte C, E, D, zwey an beyden Enden, und noch einen in E an. Nun suche man einige Winkel, 1) den Winkel ECA oder den Winkel p; 2) den Winkel AEC oder den Winkel y, folglich hat man auch den Winkel t oder CAE. Die CE ist bekannt, denn wir haben den Punkt E angenommen. Man findet also aus diesen Datis auch die AE, man schließt nemlich:

$$\sin. t : CE = \sin. p : AE.$$

Ferner nun messe man 3) den Winkel DEB oder den Winkel x; 4) den Winkel EDB oder den Winkel q, so hat man auch folglich den Winkel s, daraus findet man die EB, man schließt nemlich:

$$\sin. s : ED = \sin. q : EB.$$

Weil man die Winkel y und x kennt, so weiß man nun auch den Winkel r, er ist nemlich = 180° — (y + x), weil alle drey zusammen, nemlich y + r + x = 180° sind, indem es Nebenwinkel sind. Wenn man den Winkel r nun weiß, imgleichen die Seiten AE und BE, so kann man daraus nach §. 516 die Seite in dem immaginirten Triangel AEB finden, da man aber vorher einen der Winkel n oder m nach §. 516 suchen muß, und alsdenn schließt:

sin. m : AE = sin. r : AB.

Exempel: Es sey CD = 60 Fuß, von dem angenommenen Punkte E bis C oder die CE sey = 40 Fuß, also die ED = 20 Fuß. Ferner der Winkel p sey = 94°, also sein Sinus = Sinus 86°, weils der Sinus eines stumpfen Winkels. Der Winkel y sey = 52° 30', folglich der Winkel t = 33° 30', also gilt der Schluß:

sin. 33° 30' : 40 Fuß = sin. 86° : AE.

Und wenn man AE hier ausrechnet, so ist

AE = 72,3.

Nun ferner der Winkel x = 74°, der Winkel q = 87°, folglich der Winkel s = 19°. Ich schließe wieder:

sin. 19° : 20 Fuß : sin. 87° : EB.

Das

Dadurch finde ich EB = 61,35. Weil y = 52° 30′, x = 74°, so ist also r = 180° − (52° 30′ + 74°) = 53° 30′.

Nun schließe ich in Ansehung des eingebildeten Triangels AEB nach §. 516 die Summe der beyden Seiten AE und BE zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der beyden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz. Weil r = 53° 30′, so sind die andern beyden Winkel n und m zusammen = 180° − 53° 30′ = 126° 30′. Das ist die Summe, und also die halbe Summe = 63° 15′. Ich schließe also:

AE + EB : AE − EB : tang. 63° 15′ : zur Tangente der halben Differenz beyder Winkel n und m

oder anstatt AE und EB die Werthe gesetzt:

133,65 : 10,95 = tang. 63° 15′ : zur Tangente der halben Differenz beyder Winkel.

Dieses logarithmisch gesucht, so findet man die Tangente der halben Differenz beyder Winkel, gehört zu dem Winkel von 9° 14′, das ist also der Winkel der halben Differenz. Nun ist die halbe Summe + der halben Differenz = dem größten Winkel unter den beyden m und n. m ist aber der größte, weil ihm unter den beyden Schenkeln

AE und EB der größte Schenkel AE entgegen stehet. Es ist also $m = 63^\circ\ 15' + 9\ 14 = 72^\circ\ 29'$ Den Winkel n weiß ich nun auch, ich gebrauche ihn aber jetzt nicht; nun kann ich schließen:

$$\text{sin. } 63^\circ\ 15' : 72{,}3 = \text{sin. } 53^\circ\ 30' : AB$$

$$\text{sin. } m : AE = \text{sin. } r : AB.$$

Dieses logarithmisch berechnet, findet man $AB = 65{,}09$ Fuß, oder 6 Ruthen, 5 Fuß, 9 Linien Decimalmaas, und das Problem ist aufgelöset.

Anmerkung. Es sind, wie uns aus der Aufgabe bekannt ist, hier keine wirkliche Linien gezogen, als die Linie CD, da man die angenommenen Punkte, C, D und E mit Stäben in der praktischen Ausübung zu bezeichnen pflegt, alle übrigen Linien sind immaginär. Man pfleget aber in der Ausübung sie auf ein Papier zu zeichnen, und die gefundenen Winkel und Linien dabey zu schreiben, um sich nicht zu irren, oder etwas zu vergessen.

Zweyte Anmerkung. Man bedient sich auch wol dieses und des vorhergehenden Problems, topographische Karten über eine Gegend zu verfertigen, da man eine Standlinie annimmt, die aber etwas groß seyn muß, und aus derselben von ihren beiden Endpunkten die Winkel misset, die verschiedene um sie herumliegende Oerter haben, um erstlich die Hauptpunkte zu bekommen.

Wenn

Wenn die Gegenden nicht gar zu groß sind, ist auch diese Methode allein zureichend. Allein wenn es große Länder wären, so muß man auch zugleich Kenntnisse von den optischen Wissenschaften, den geographischen Linien ꝛc. besitzen, um recht genau verfahren zu können. Doch die Betrachtungen hierüber gehören nicht hieher, sondern in die praktische Geometrie, welche wir nicht vortragen.

§. 536. Man wendet auch die trigonometrischen Berechnungen vorzüglich zu Messung der Höhen an. Auch davon wollen wir ein Paar Exempel geben. Es sey erstlich Fig. 291 eine Höhe BC zu messen, zum Exempel die Höhe eines Thurms, zu dessen Fuße B man kommen kann. Die Höhe eines Orts ist, wie uns bekannt ist, ein Perpendikel von dem Endpunkt seiner Spitze auf die Grundfläche, worauf er stehet, herabgelassen. Man messe also eine willkührliche Linie AB bis an den Fuß der Höhe, hier des Thurms, je länger sie ist, desto besser; am Endpunkte dieser Linie in A setze man das Instrument, das man zum Messen gebrauchet, und messe den Winkel CDE oder den Winkel n, und nun ist alles geschehen, was nöthig war. Denn weil EC als ein Perpendikel angenommen wird, so ist in dem rechtwinklichten Triangel CDE gegeben die Linie DE, welcher die AB parallel und gleich ist. Imgleichen der Winkel n und der rechte bey E. Wenn man also DE

Fig. 291.

als den Radius betrachtet, so wird CE der Tangens des Winkels n, man kann also schließen:

finus totus : tang. n = DE : CE.

Wennn man die CE gefunden, so addire man die Höhe des Instruments, die DA, welche der EB gleich ist, dazu, so hat man die ganze Höhe CB.

Exempel: Es sey AB genommen = 395 Fuß; der Winkel bey n sey = 5°; die Höhe DA = EB sey = 5 Fuß. Ich schlösse:

fin. tot. : tang. 5° = 395 Fuß : CE

also $CE = \frac{395 \cdot \text{tang } 5^\circ}{\text{fin. totus}}$

Wenn man das logarithmisch oder anders berechnet, so findet man CE = 470,8 Fuß, dazu die EB = 5 Fuß addiret, giebt 475,8 Fuß.

§. 537. Es sey aber Fig. 292 eine Höhe gegeben, zu deren Fuß B man nicht kommen Fig. 292. kann. Man erwählet eine willkührliche Linie AD, die man misset. Man misset an deren einem Ende A, wo man das Werkzeug hinsetzt, den Winkel m, und an dem andern Endpunkte den Winkel n, so weiß man auch seinen Nebenwinkel r. Aus m und r kennet man auch den Winkel t, und aus der Linie mr = AD dazu genommen, kennet man nun den Triangel mrC, also auch die Seite Cr, und weil man den Winkel n auch weiß, und bey F ein rechter Winkel ist, so kennet man nun

in

in dem Triangel CnF zwey Winkel, oder also alle drey Winkel, und die Cn, woraus sich die CF finden lässet. Dazu addiret man die Höhe des Werkzeuges mA = FB, so hat man die ganze Höhe von CB.

Exempel: Es sey AD = 40 Fuß = mr; ferner mA = 5 Fuß = FB; der Winkel m = 31°; der Winkel n = 48°, also sein Nebenwinkel r, der ihn zu 180° ergänzet, = 132°. Folglich ist in dem Triangel mCr der Winkel t = 17°. Nun schließe ich:

sin. t : Seite mr = sin. m : Seite Cr

oder sin. 17° : 40 Fuß = sin. 31° : Seite Cr

also $Cr = \frac{\text{sin. } 31 \cdot 40.}{\text{sin. } 17}$

Das giebt wirklich ausgerechnet Cr = 72,11.

Der Winkel n war = 48°, ich kann nun Cr als einen Radius betrachten, und weil bey F ein rechter Winkel ist, CF als den Sinus von n ansehen, und also schließen:

sin. tot. : sin. n = Cr : CF, oder

sin. tot. : sin. 48° = 72,11 : CF

und $CF = \frac{72,11 \cdot \text{sin. } 48°.}{\text{sin. totus}}$

Dieses wirklich berechnet giebt CF = 53,58 Fuß, oder 53 Fuß, 5 Zoll, 8 Linien. Dazu die Höhe FB = 5 Fuß addiret, giebt die ganze CB = 58 Fuß, 5 Zoll, 8 Linien, und das Problem ist also aufgelöset.

§. 538. Wir beschließen hiemit die geradlinichte Trigonometrie. Wir hoffen nichts Wichtiges unberührt gelassen, und einen aufmerksamen Leser in den Stand gesetzet zu haben, wenn er will, weiter auf diese Gründe fortzubauen, und auch Schriften mit Nutzen zu lesen, welche theils diese Wahrheiten voraussetzen, und ihre Beweise darauf gründen, theils weitläuftiger ausführen, und noch genauer aus einander setzen.

Ende der Trigonometrie.

Im Verlage der Meyerschen Buchhandlung zu Lemgo sind zur Ostermesse 1794 folgende neue Bücher herausgekommen:

Ardinghello und die glückseeligen Inseln, 2te rechtmäßige und verbesserte Auflage, 2 Bände, 8.

Aufsätze, geographische und historische, für Schullehrer; nebst einer Charte, 8. (Von Herrn Kammerath G. A. von Breitenbauch.)

Bibliothek, neue historische, zum Gebrauch für alle Classen der Leser, 3tes Stück, 8.

Böhmeri, G. L. Electa iuris civilis, Tom. I. Editio noviſſima, 4. (Von Tom. II. III. hat obige Handlung ebenfalls das Verlagsrecht käuflich übernommen.)

von Breitenbauch, G. A. Versuch einer Erdbeschreibung der sechs Welttheile nach den Stämmen ihrer Regenten und Bewohner; nebst 8 illum. Carten, 8.

Ciceronis, M. Tullii, Epistolae ad diversos & ad Marcum Brutum, nach der Zeitfolge geordnet, und mit Einleitungen und Anmerkungen zum Schulgebrauch erläutert, von Dr. A. C. Borheck, 1ster Theil, 8.

Focke, Dr. J. L. A. Unterricht für die Hebammen in der Grafschaft Lippe, 8.

Gebhardt, Dr. G. L. bibliſches Wörterbuch, als Realconcordanz über die sämtlichen heiligen Bücher des Alten und Neuen Bundes. Mit einer Vorrede des Herrn Geheimen R. Raths Hezel, 2ter Band 1tes Stück gros 8.

Häseler, J. F. Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie, 2ter Theil, mit Kupfern, 2te verbesserte und vermehrte Auflage, 8.

Hermanni, J. W. Versuch einer populären Anweisung für den Bürger und Landmann in den Preuß. Staaten, zum vorsichtigen und mit den Grundsätzen des neuen Preuß. Gesetzbuchs übereinstimmenden Verhalten bey den gewöhnlichsten Geschäften des bürgerlichen Lebens, um Processe und Strafen zu verhüten, und in Ruhe und Frieden leben zu können, 8.

Hesiod's

Hesiod's Schild des Herakles, nebst den Schilden des Achilleus und Aeneas von Homer und Virgil. Metrisch verdeutscht, mit dem Original begleitet und erläutert von J. D. Hartmann, 8.

Kortum, C. G. T. medicinisch-chirurgisches Handbuch der Augenkrankheiten, 2ter Band, gros 8.

Reyland, B. J. allgemeinnütziges und zweckmäßiges Handbuch zur Erhaltung und Wiedererlangung der Gesundheit. Ein Lesebuch für Jedermann, 1ster Theil, 8.

Scherf, J. C. F. Dispensatorium Lippiacum genio moderno accomodatum. Pars II. 8. maj.

— — Briefe über Meinberg, 8

Verzeichnis aller Anonymischen Schriften und Aufsätze in der vierten Ausgabe des gelehrten Teutschlandes, und deren erstem und zweytem Nachtrage, von M. J. S. Ersch, fortgesetzt aus dem dritten und vierten Nachtrage, gros 8.

Vorlesungen über die Federsche Logik und Metaphysik für Anfänger auf Schulen und Universitäten, 2ter Theil, über die Federsche Metaphysik, 8.

Wachler, L. Versuch einer allgemeinen Geschichte der Literatur, für studirende Jünglinge und Freunde der Gelehrsamkeit, 2ter B. gros 8.

Wahlkapitulationen, die neuesten, Leopolds und Franz II. Nebst einem historisch-publicistischen Commentar, 4 (Von Herrn Reg. Rath Erome in Gießen.)

Wörterbuch über den Justinus, zum Behuf derer, welche bey Ermangelung eines allgemeinen Wörterbuchs, dieses als Hülfsmittel der Vorbereitung gebrauchen wollen, herausgegeben von A. C. Meineke, 8. *).

---

*) Dieses Wörterbuch ist, als das Mspt. davon noch in der Druckerey war, also ungesehen, und vor dessen Abdruck, aus Brodneid, von einem elenden Nachahmer des wailand Klotz in der sonst vielen Beyfall mit Recht findenden Oberteutschen allgemeinen Litteraturzeitung nicht recensirt, sondern aus Haß gegen Verfasser und Verleger geschmähet, so wie derselbe auch Vater und Mutter, Weib und Kinder, Hohe und Niedrige, seine Lehrer und Schüler, überhaupt Freunde, Collegen, Nachbaren und alle Welt zu schmähen gewohnt, und folglich allenthalben und bey Jedermann als ein wahres moralisches Scheusaal verhaßt ist. Nächstens davon ein Mehreres im 5ten Nachtrage zum gelehrten Teutschland.

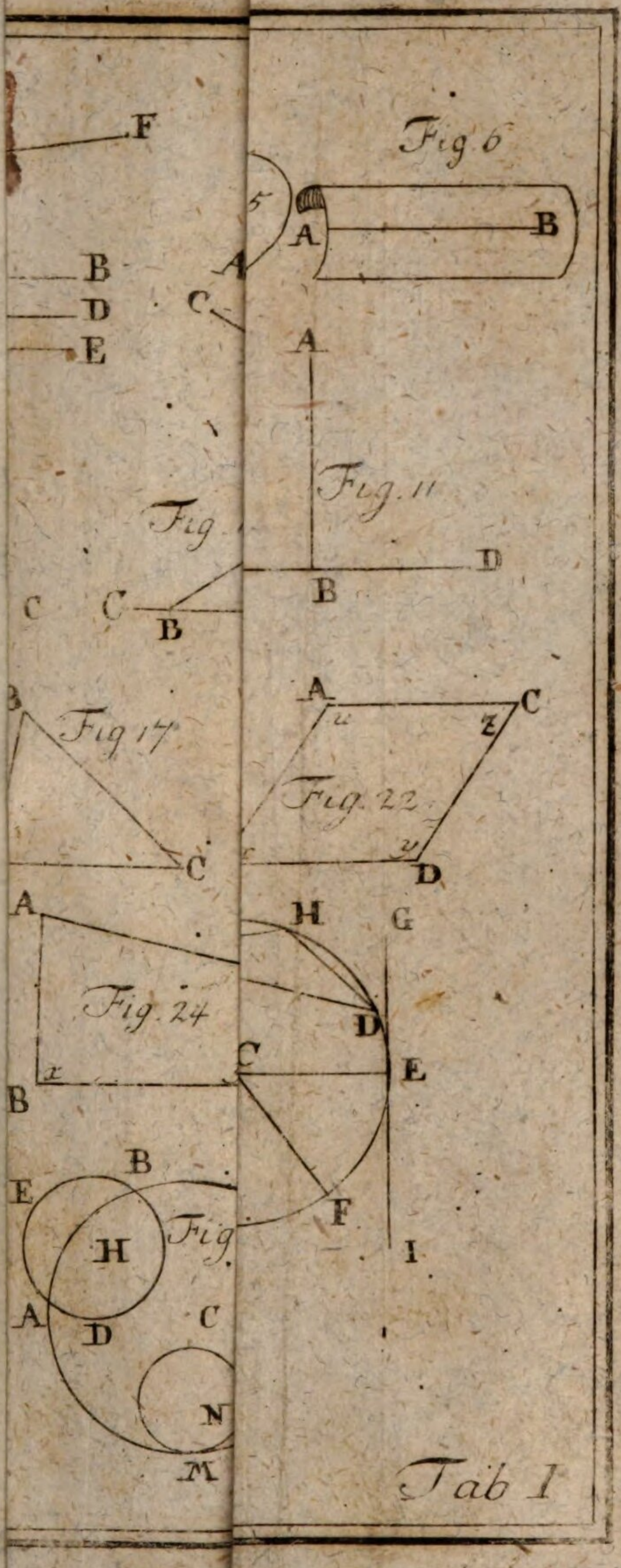
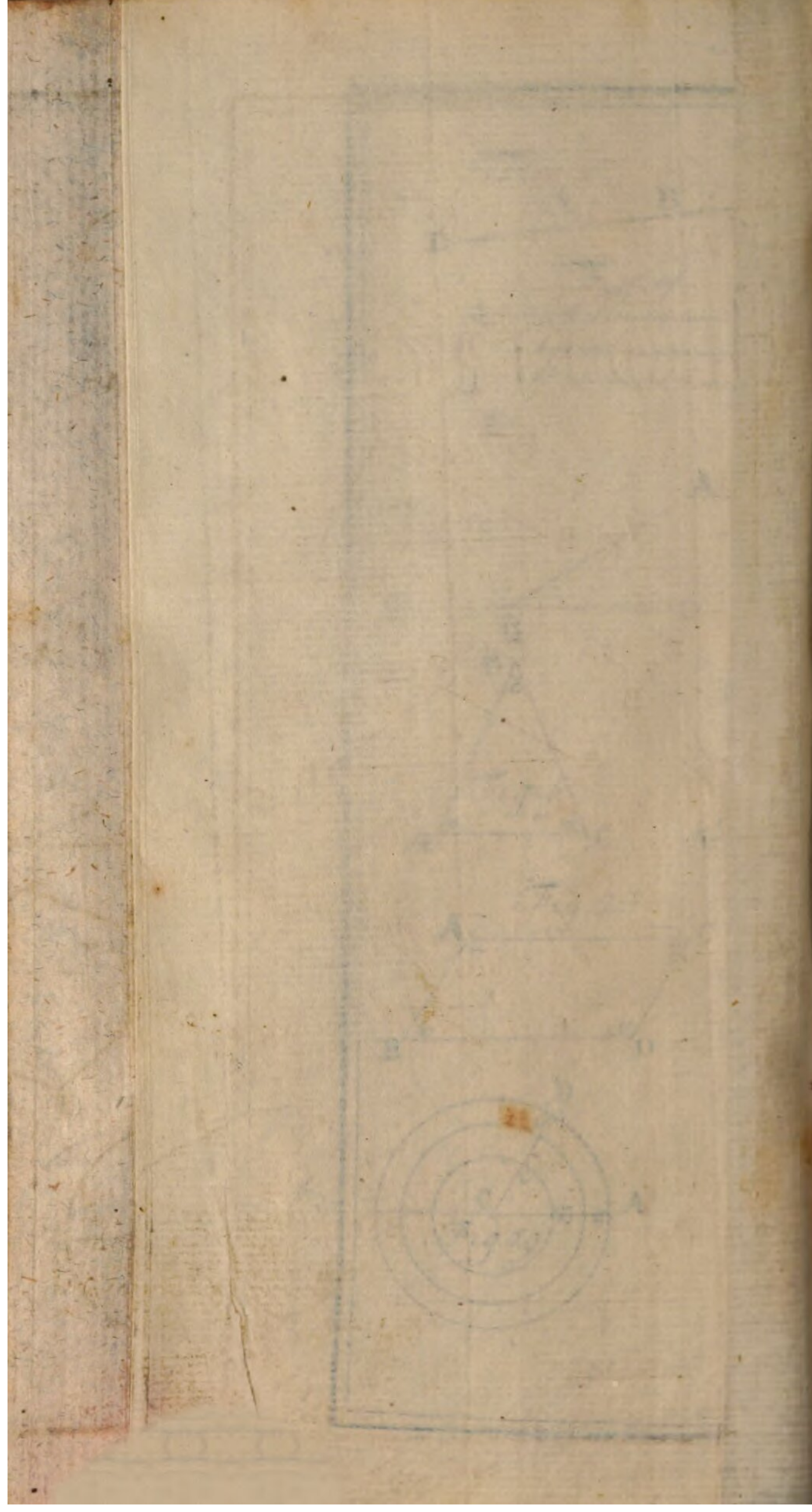
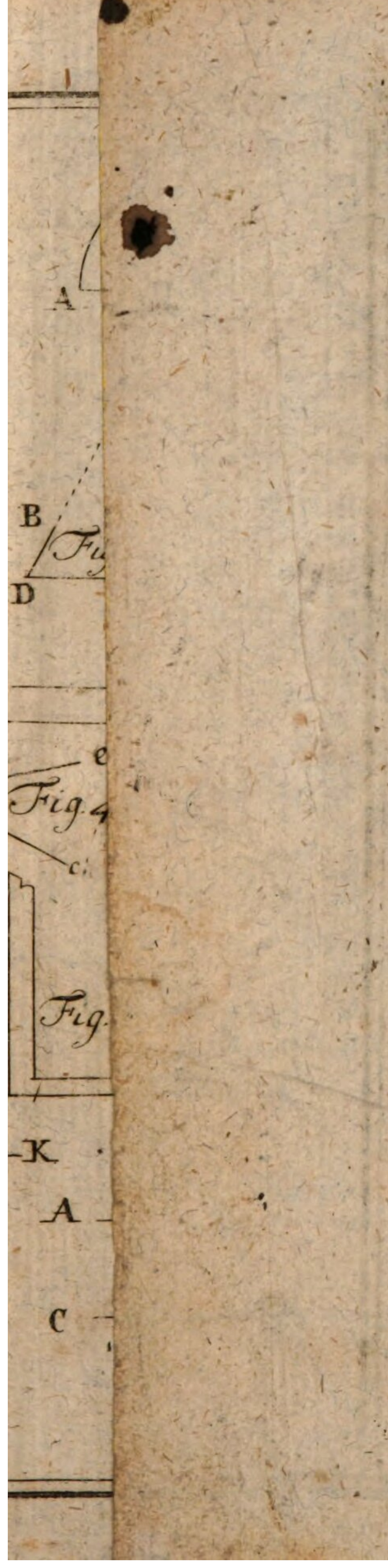
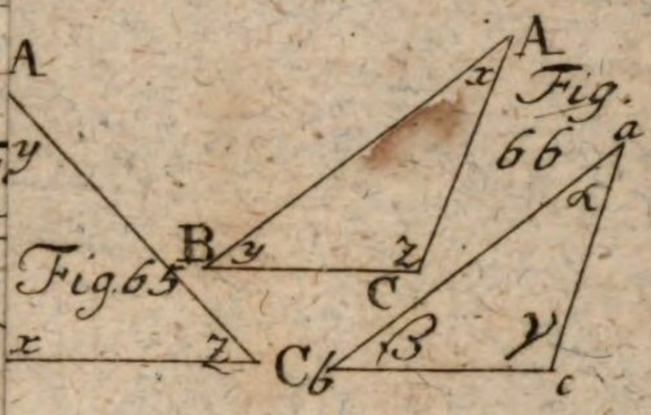


Fig. 6
Fig. 11
Fig. 17
Fig. 22
Fig. 24
Fig.
Tab I




A
B
D
Fig. 4
Fig.
K
A
C



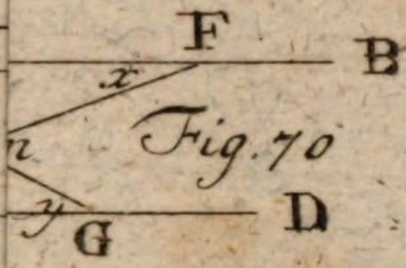


Fig. 70

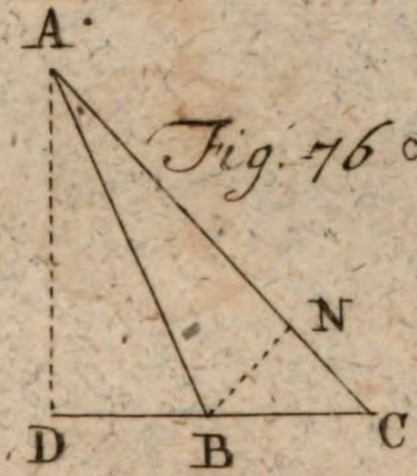
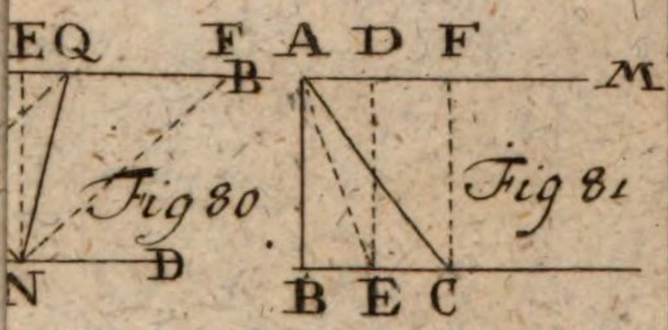
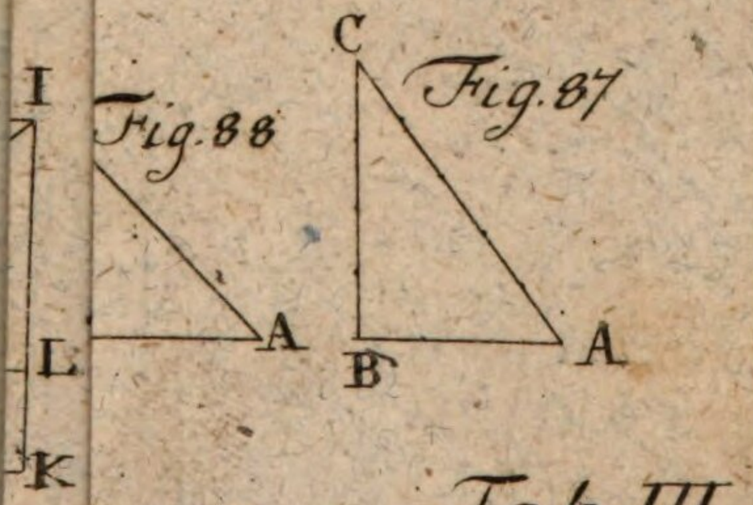


Fig. 76 ∝





Tab. III

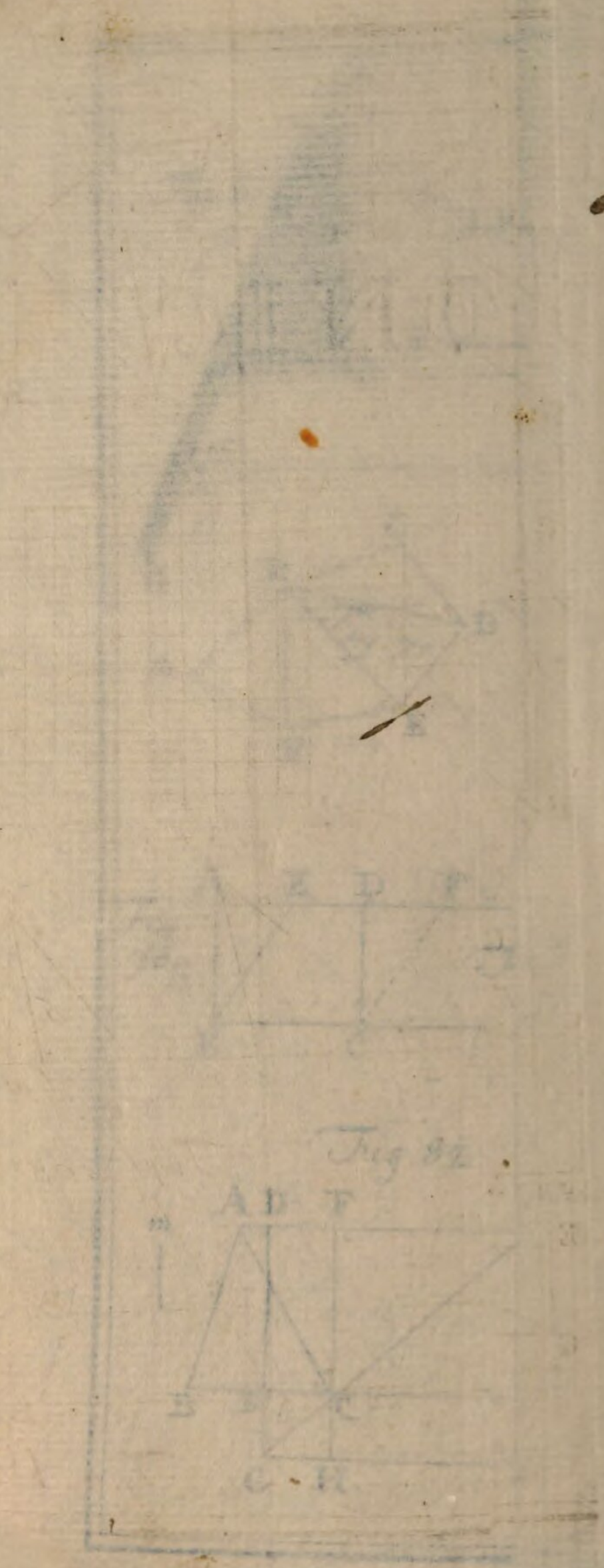


Fig 82

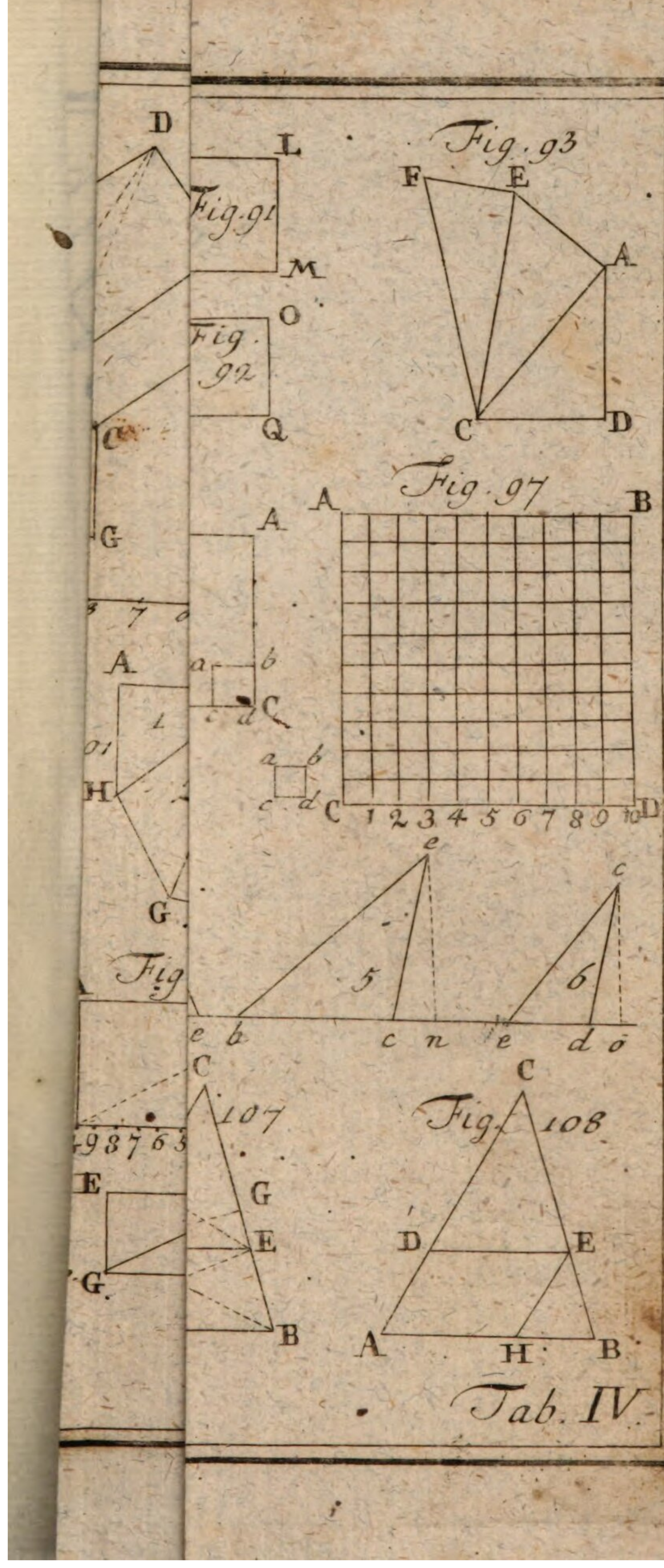


Fig. 91
Fig. 92
Fig. 93
Fig. 97
Fig. 107
Fig. 108
Tab. IV.

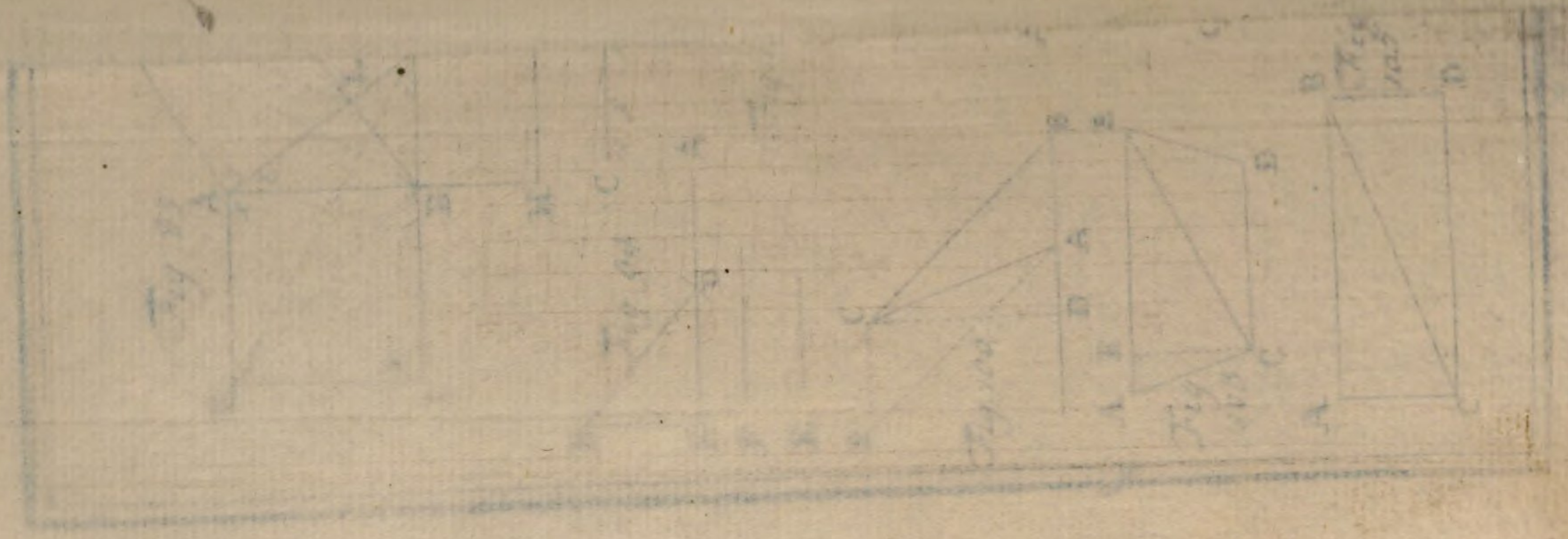
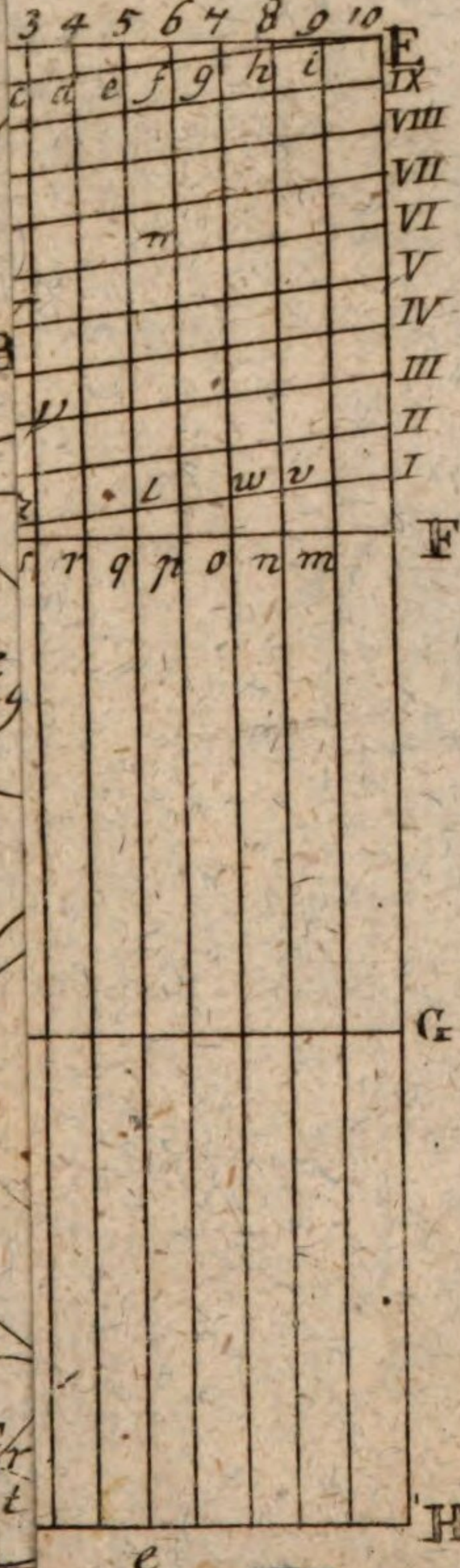


Fig. 113

Fig. 117



Tab: V.

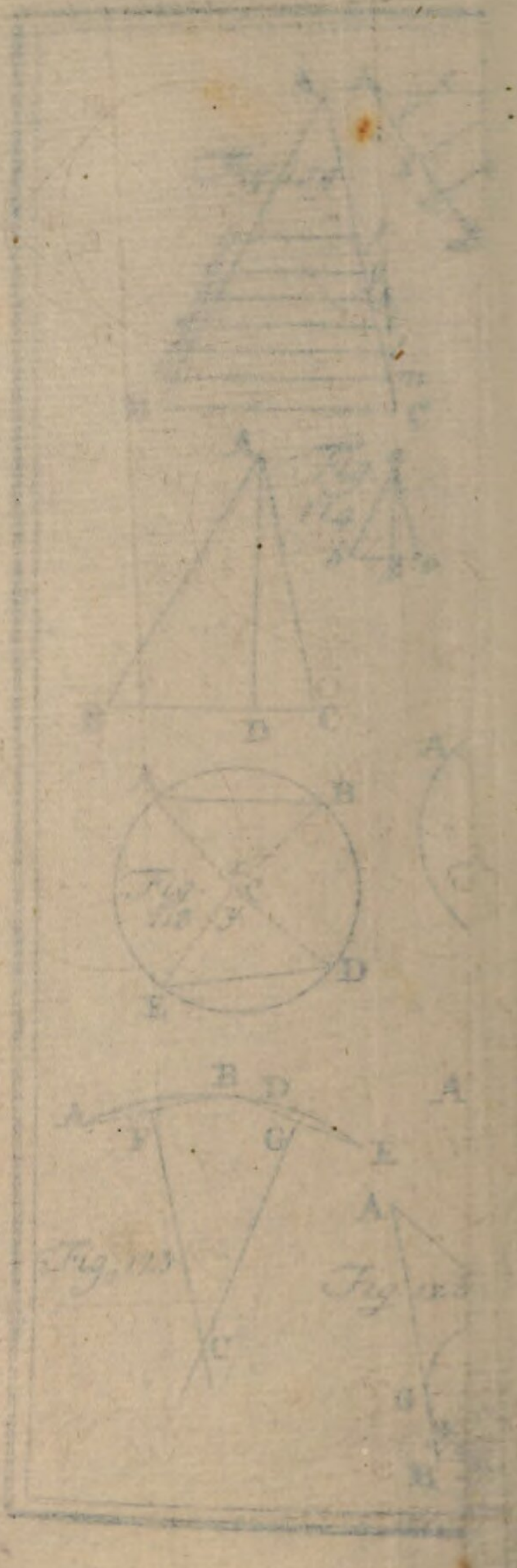

A
B
C
D
E
F
G

Fig. 136

Fig. 139

Fig. 143

Fig. 145

62

E

Fig. 153

Fig. 151

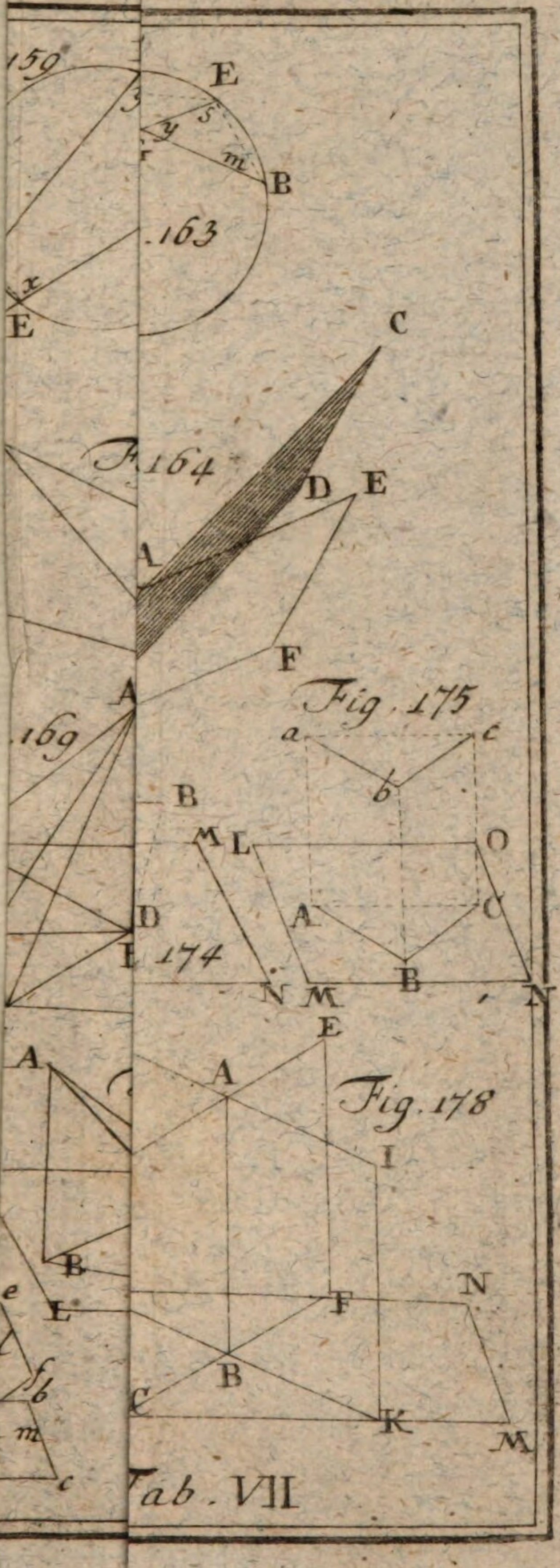
B

Fig. 147

Fig. 15

O

Tab. VI


159
E
3
5
y
m
B
163
x
E
C
Fig. 164
D
E
A
F
A
169
Fig. 175
a
c
b
B
M
L
O
D
A
C
L
174
N
M
B
N
E
A
A
Fig. 178
I
B
e
L
F
N
f
b
B
m
c
K
M
Tab. VII

86
D
E
97
B

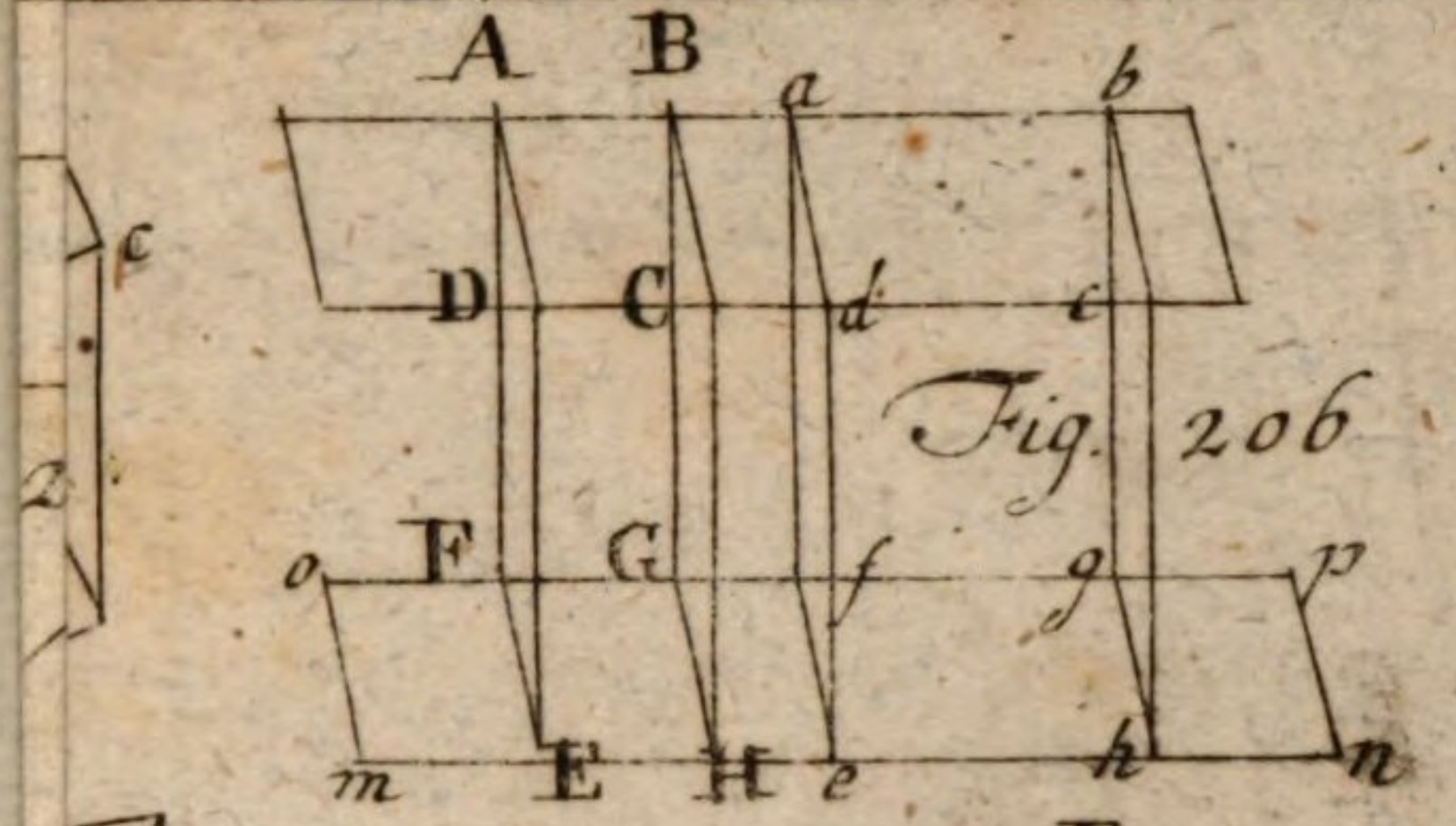


Fig. 206

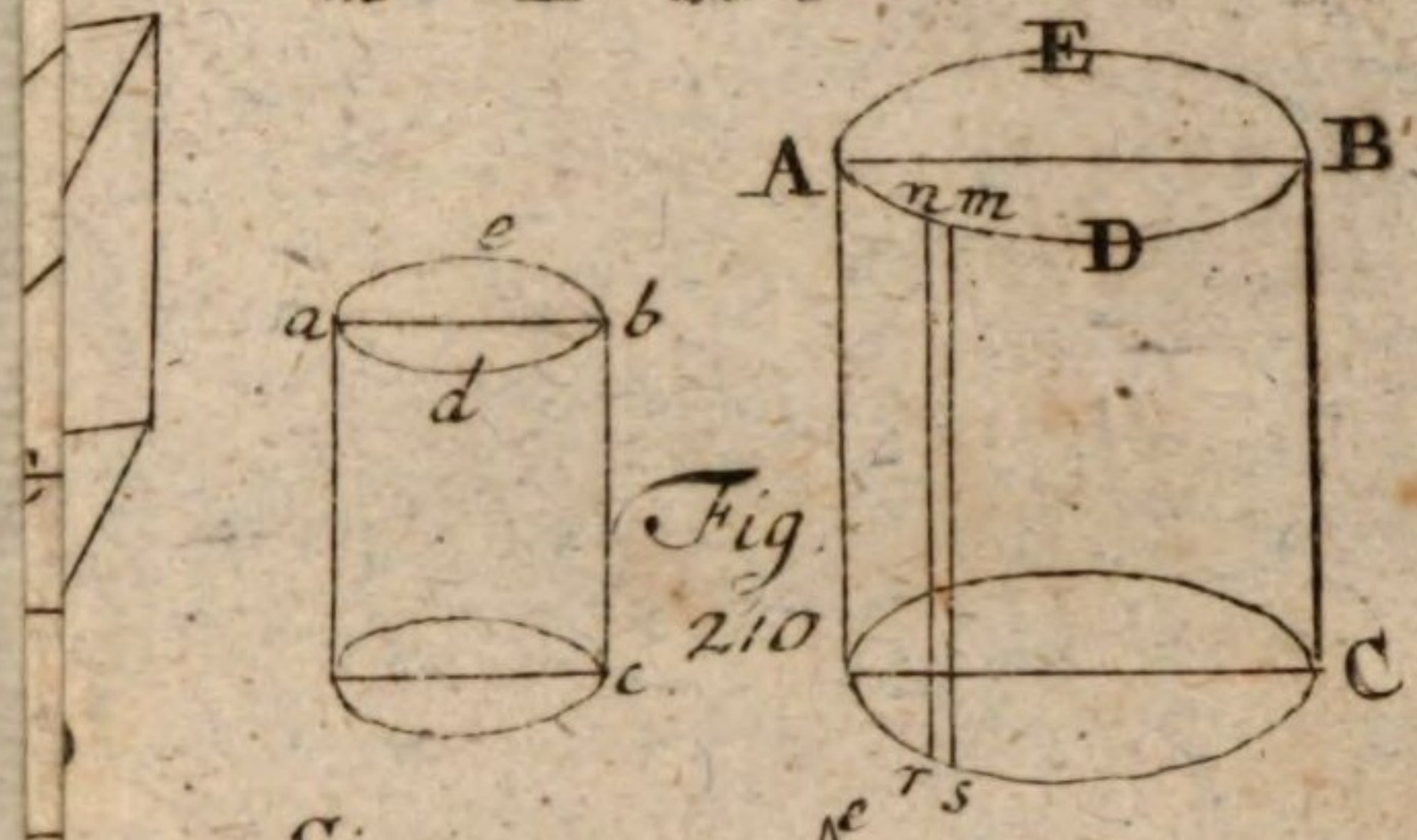


Fig. 210

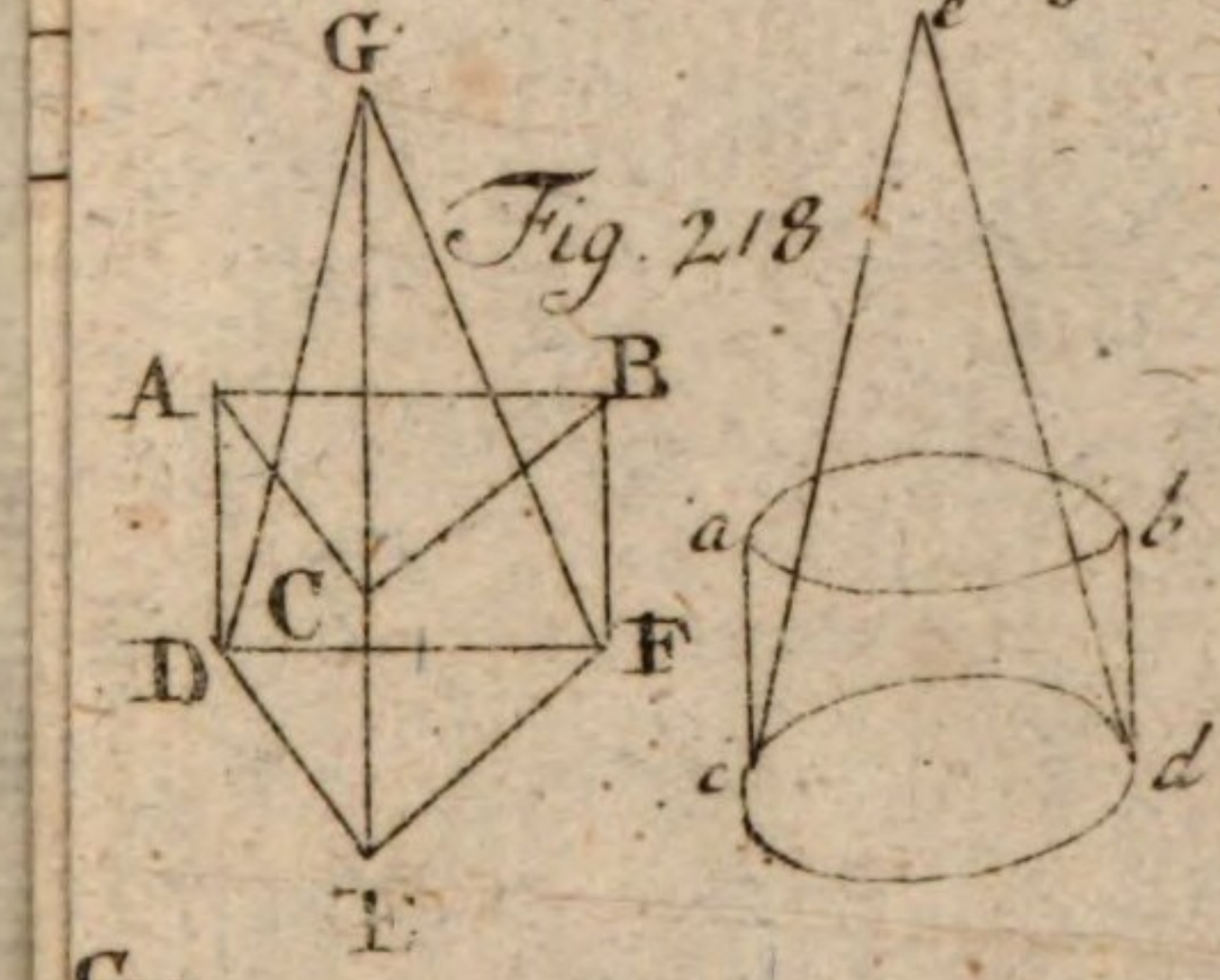


Fig. 218

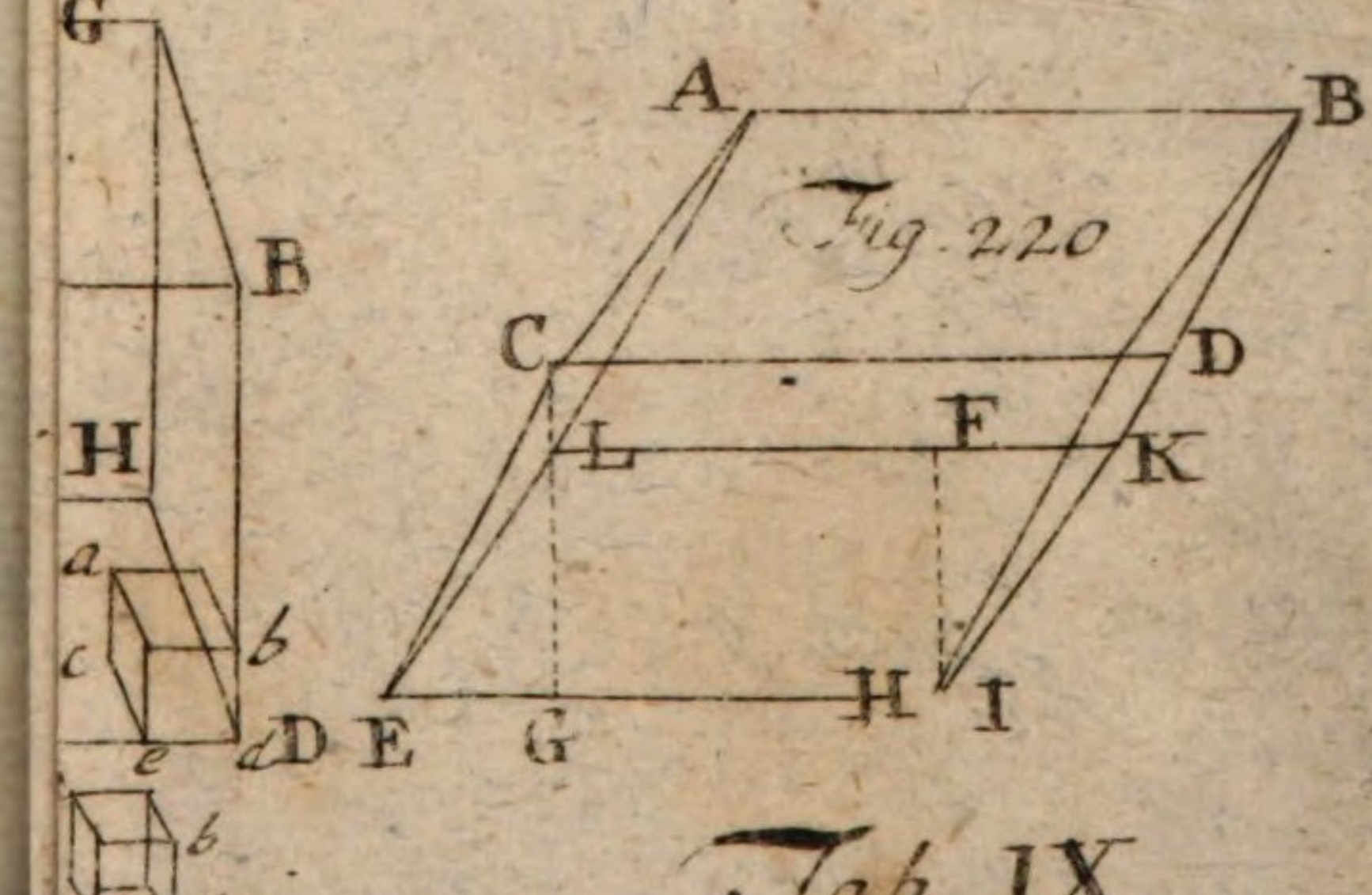


Fig. 220

Tab. IX

Fig 210

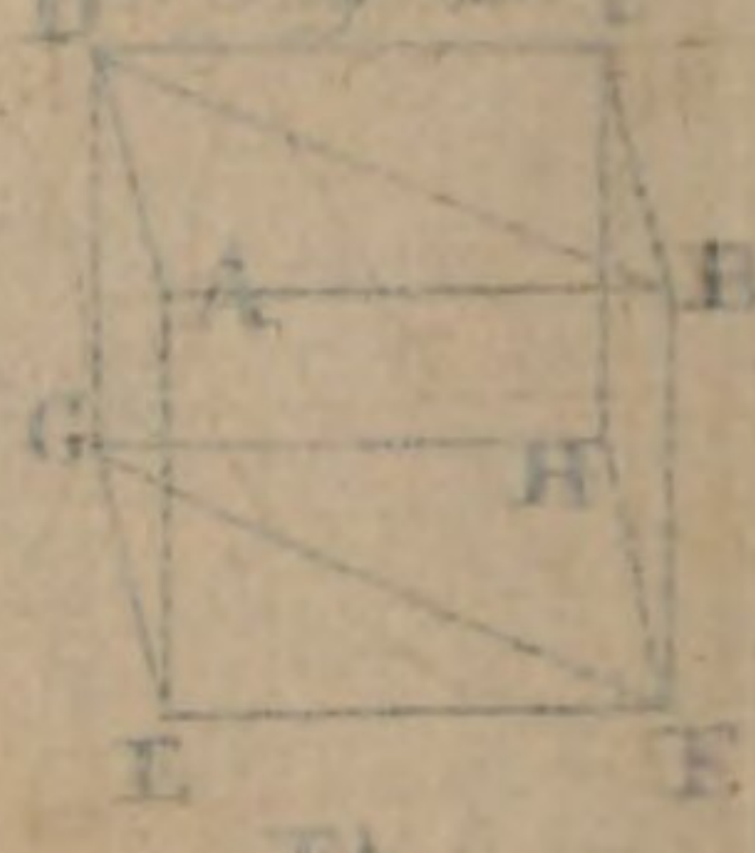


Fig 211

Fig

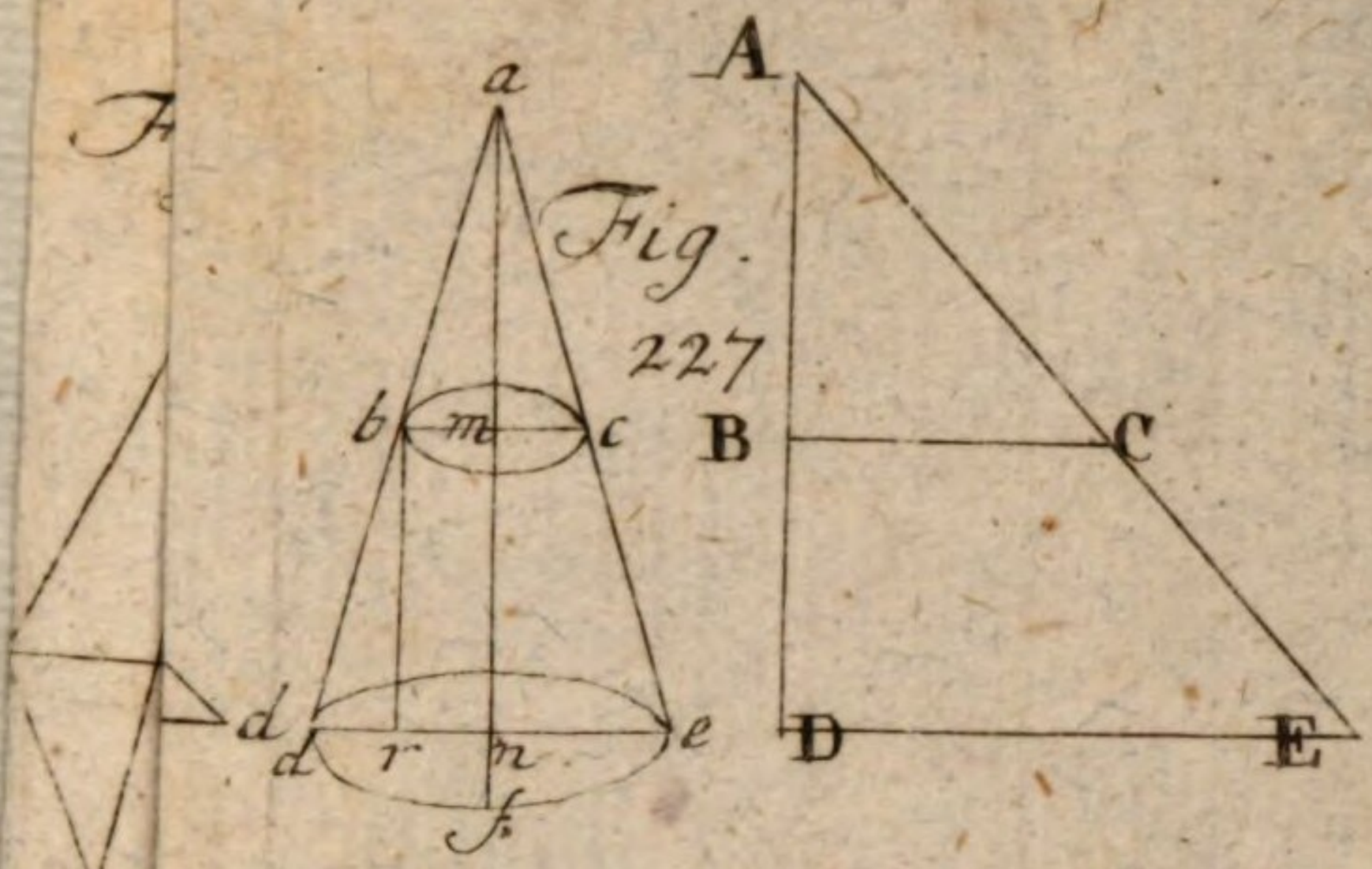
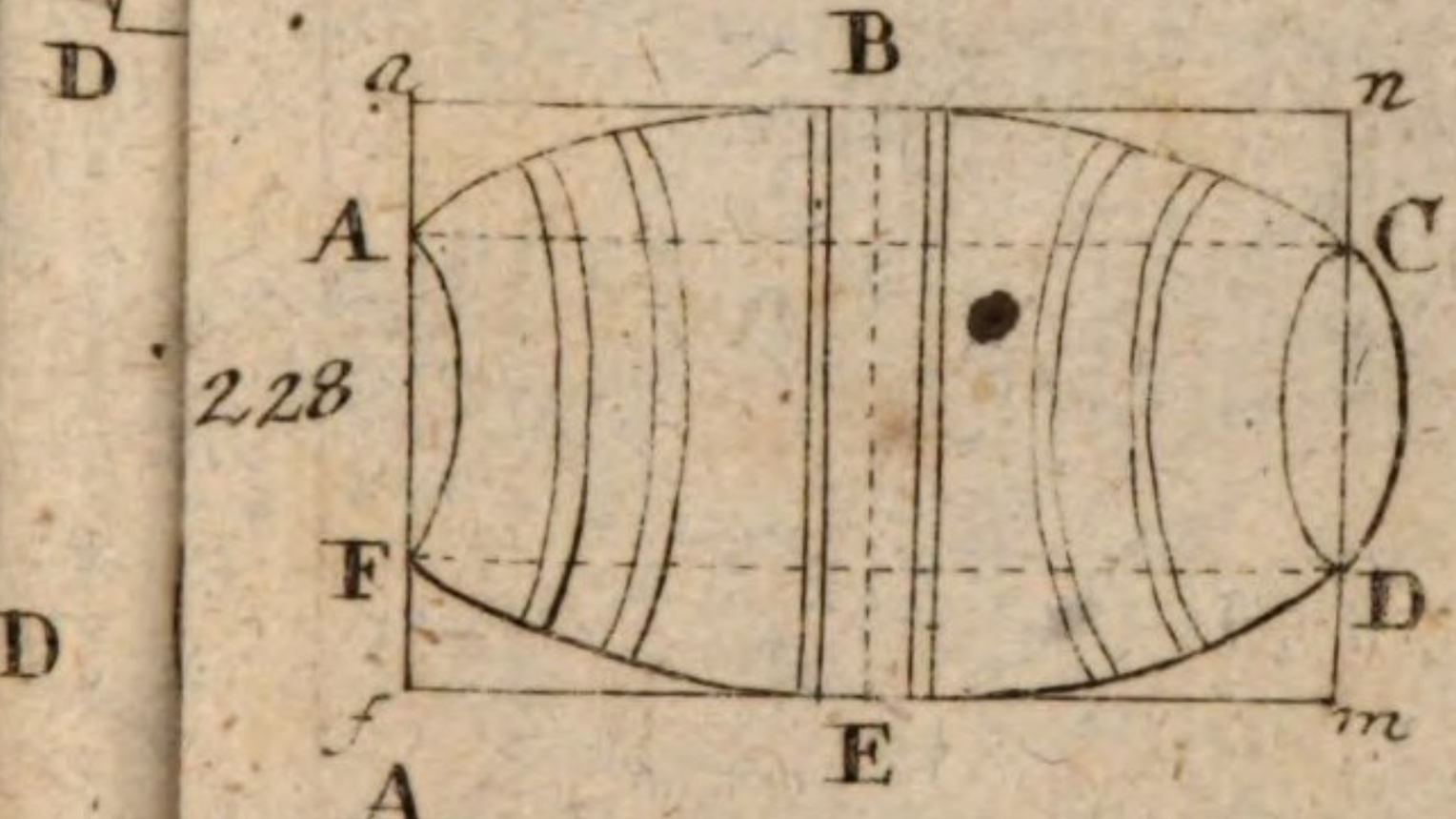


Fig. 227



228

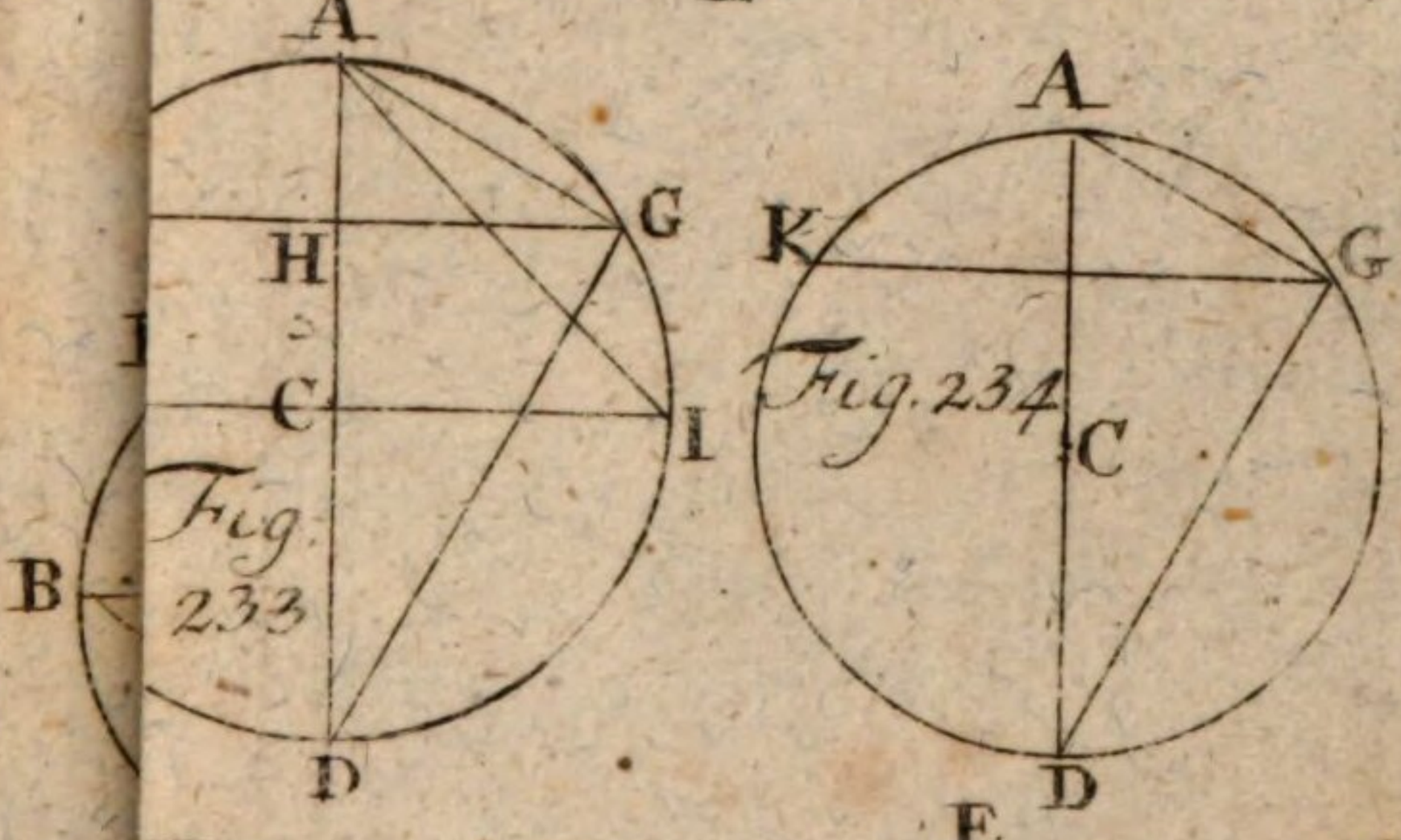
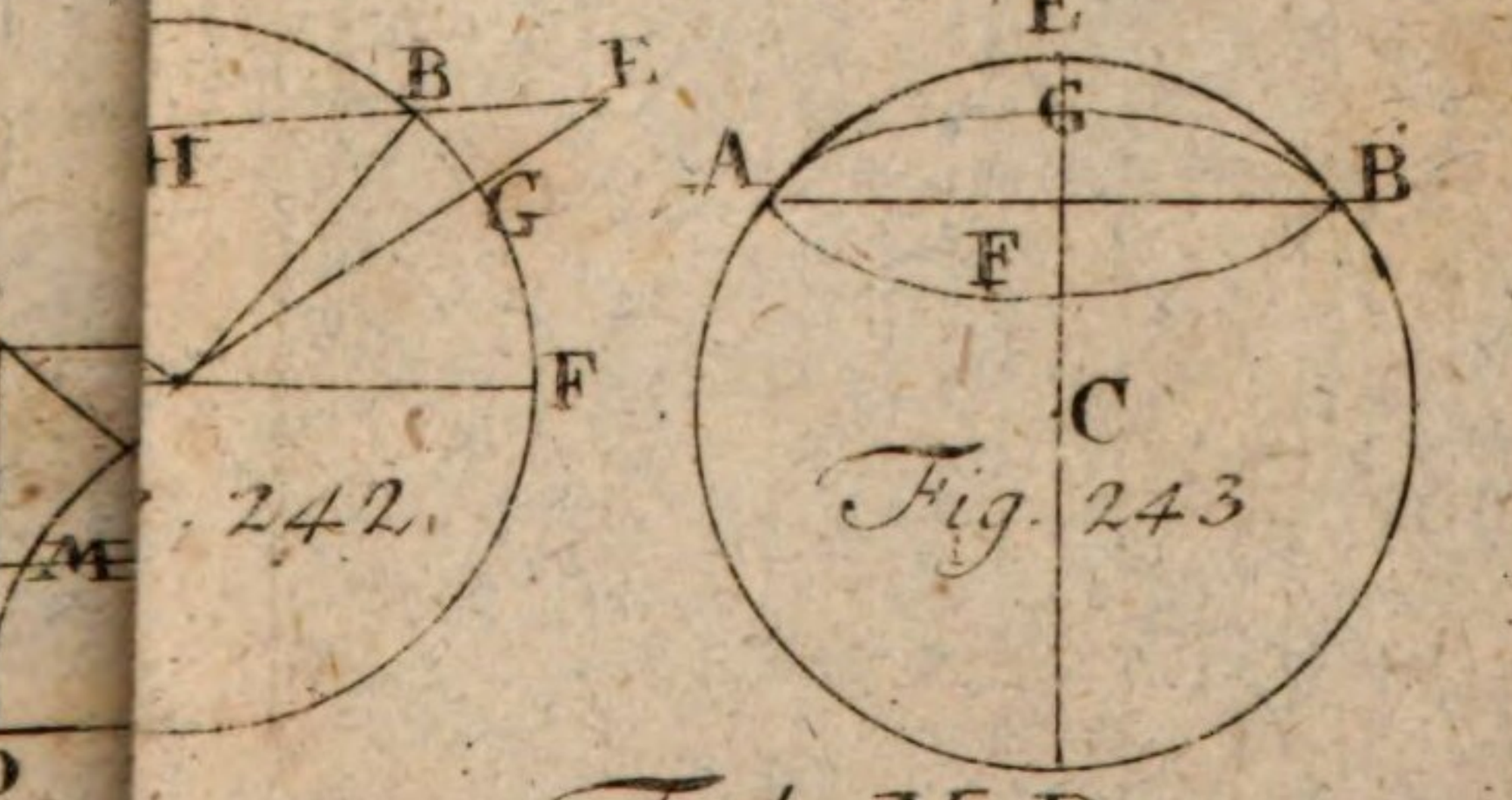


Fig. 233

Fig. 234



242.

Fig. 243

Tab: X

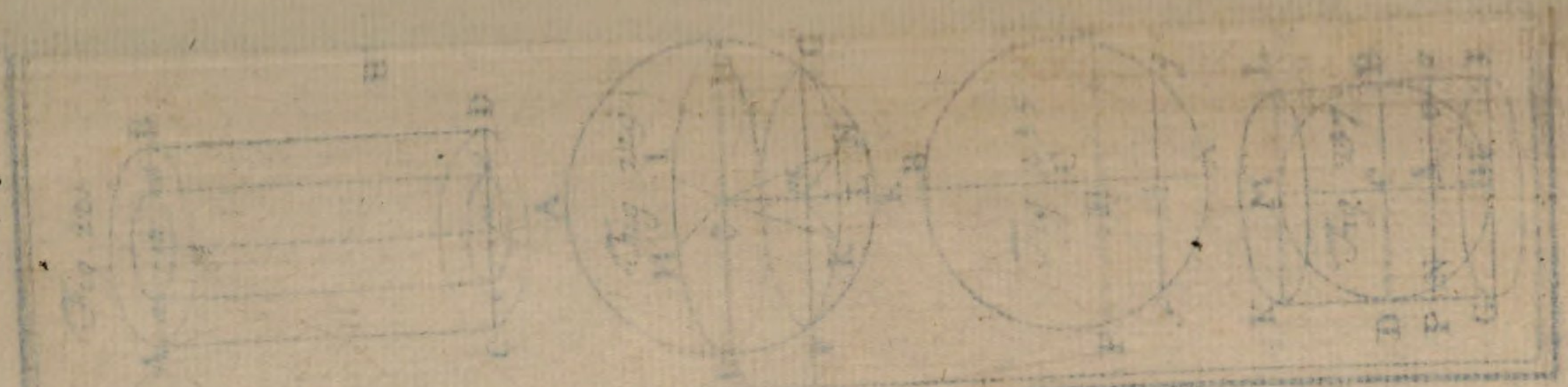
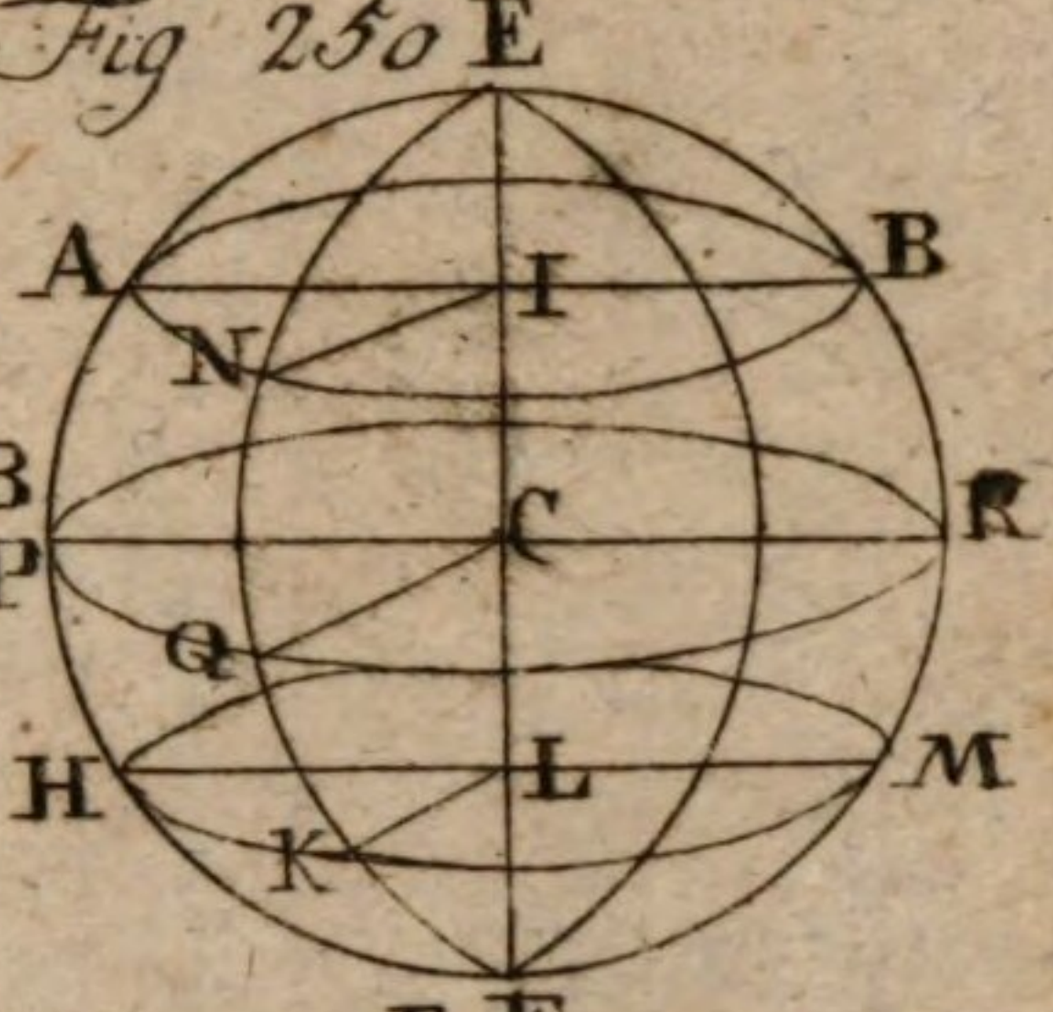
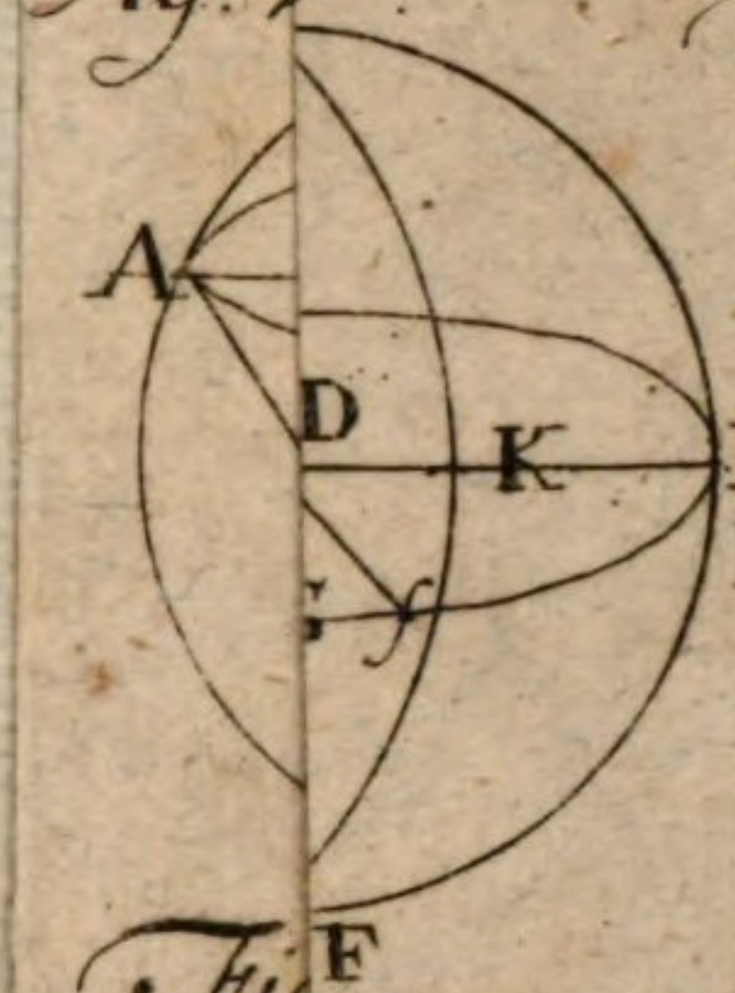
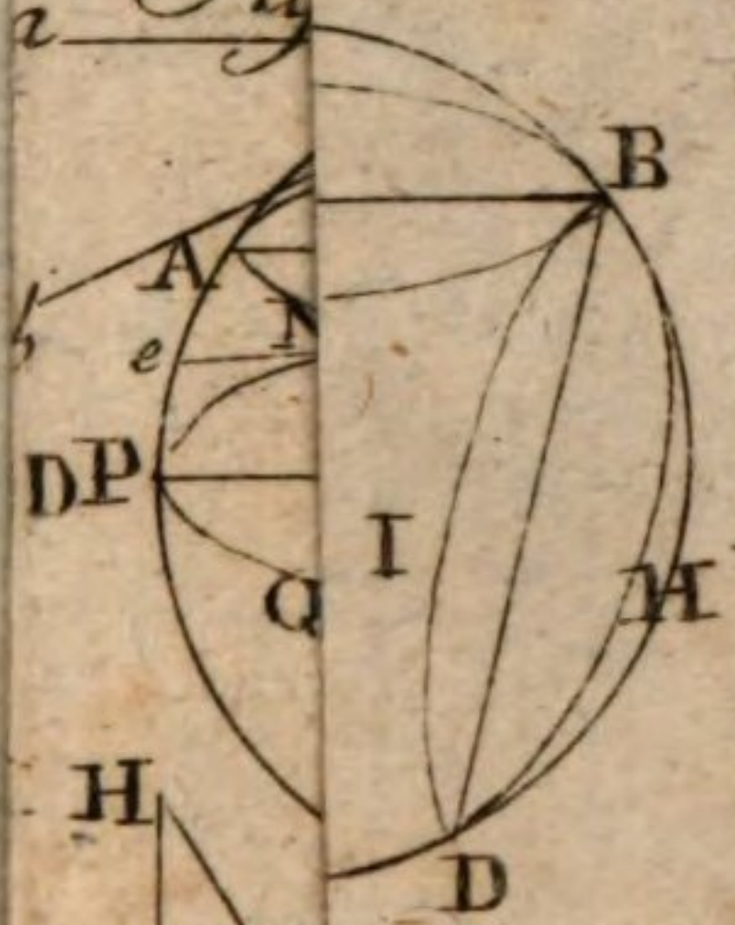


Fig. 250







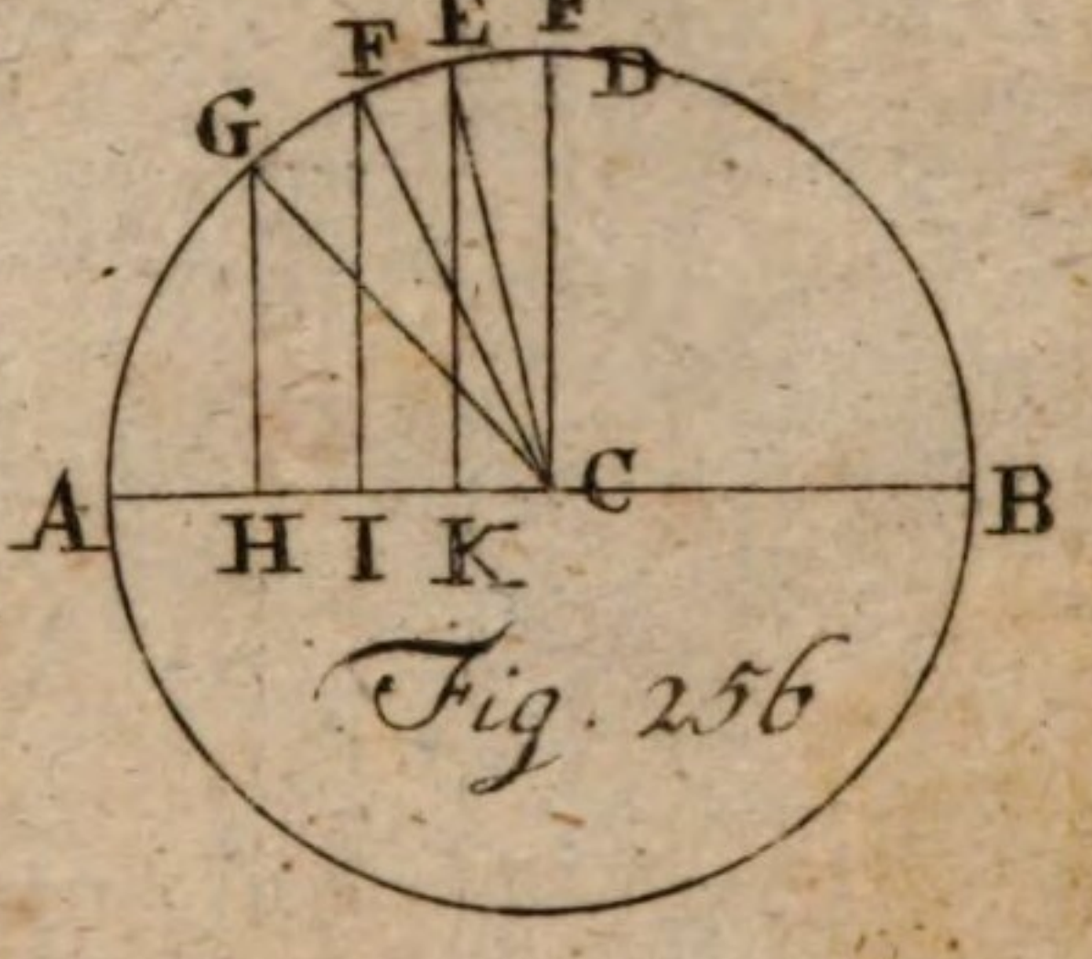


Fig. 256

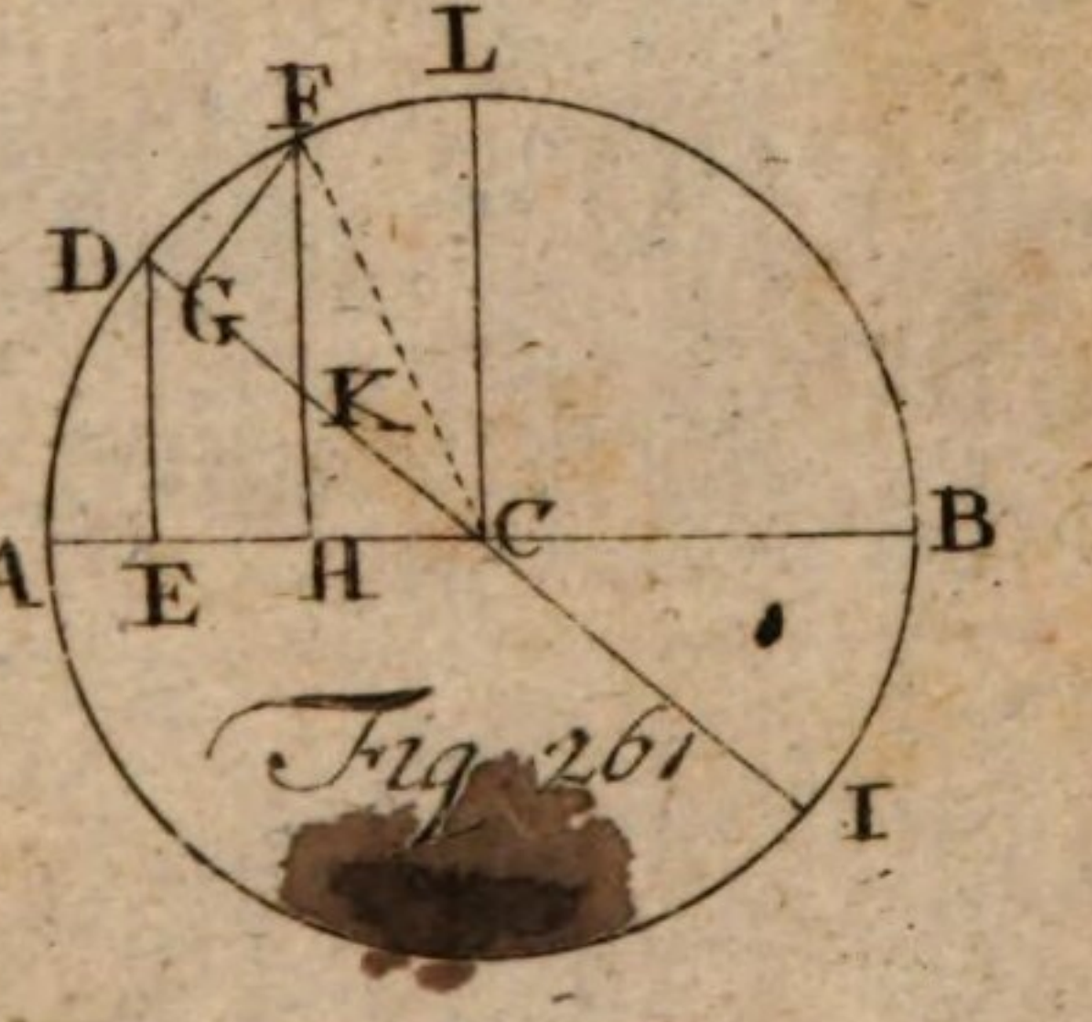


Fig. 261

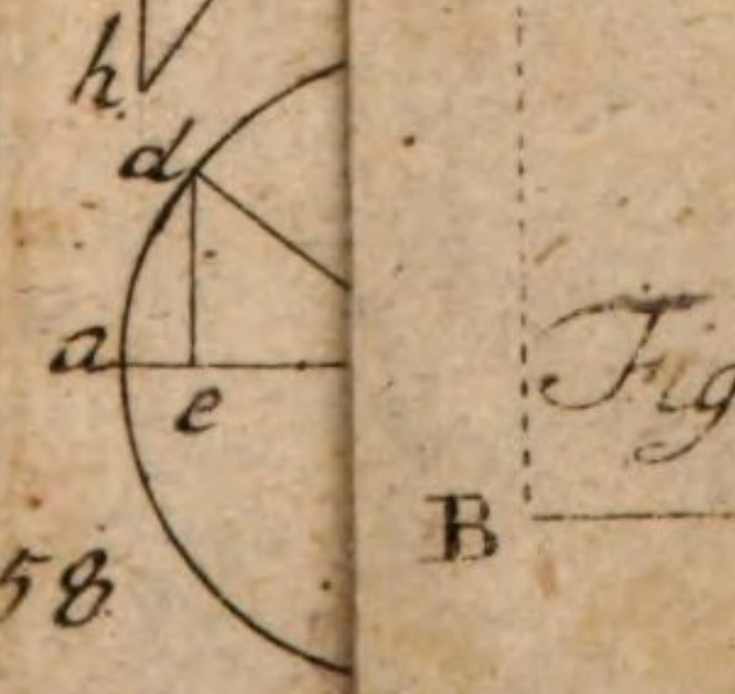


Fig. 264

Tab. XI

75
85
B
66
74
76
86
I
67
73
77
83
87
K
68
72
78
82
88
L
69
71
79
81
89
M
70
80
90
D
A
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
10
30
50
70
90
300
200
35
45
40
50

. 268

C Tab XII

C
E
A
D

Fig. 275

Fig. 286

Fig. 285

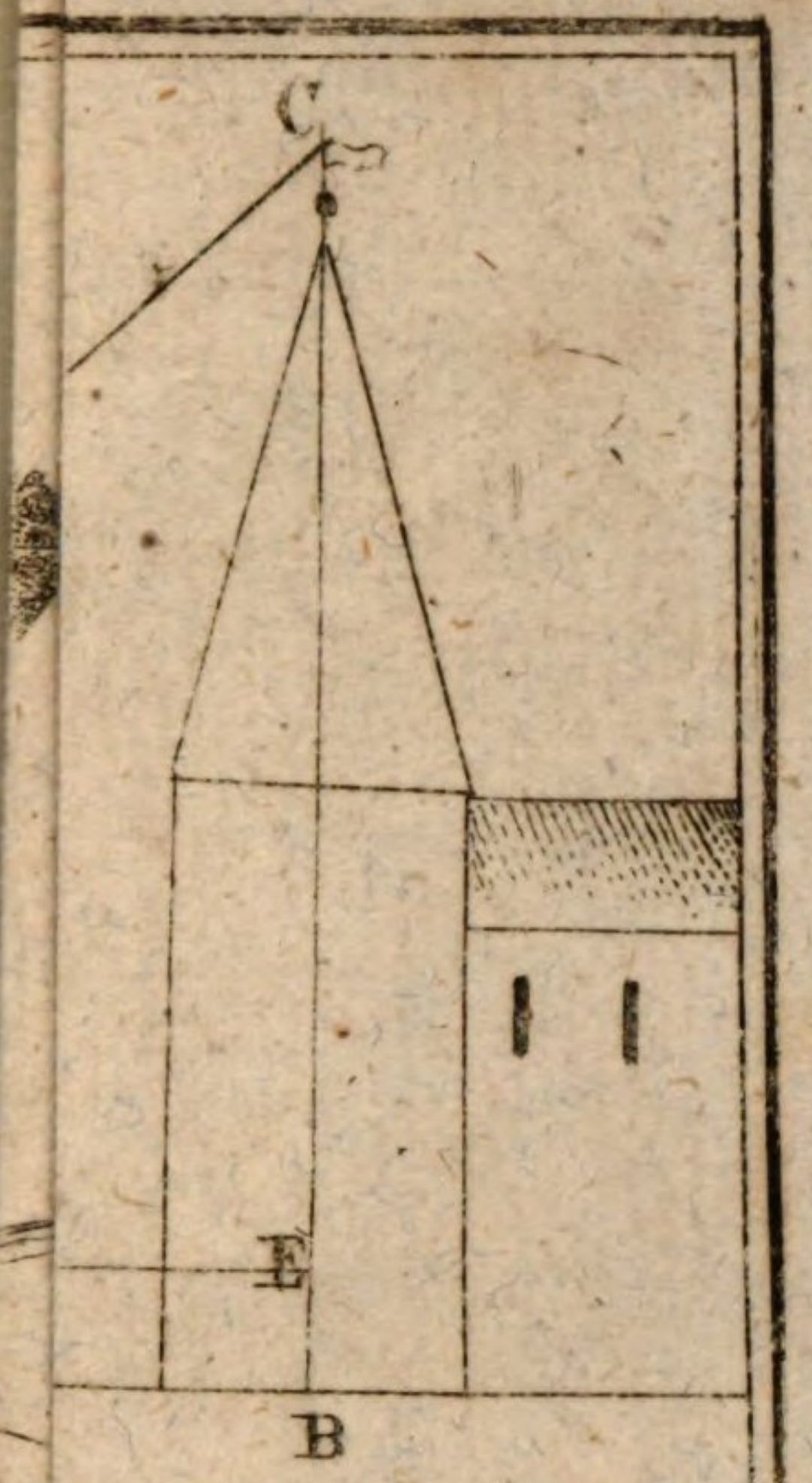
Fig. 282

Fig. 283

Tab. XIII

J. D. Philipp geb. Syfang

A
B
D
A
D
B
A
D


C
E
B

C
F
B

Fig. 188

Fig. 290

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Häseler, Johann F.

Johann Friedrich Häselers Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie zum eignen Unterricht, vorzüglich für Hauslehrer und Gelehrte, welche diese Wissenschaften nicht zur Hauptbeschäftigung machen
Bd.: 2.

Lemgo 1794

Math.u. 65 m-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625407-1
VD18 15466620-001